

非線形緩勾配方程式を用いた碎波限界に関する数値的研究

田島芳満*・磯部雅彦**・渡辺 晃**・横木裕宗***

1. 緒 言

碎波帯を含む波浪場の数値シミュレーションを行なう際、碎波点を精度良く与え、そこから適切な減衰項を導入することが必要となる。今日まで数値シミュレーションにおける碎波点の決定には、実験結果に基づく経験式が用いられてきた。しかし、最近提案された非線形緩勾配方程式によれば碎波直前に至る強非線形の波浪変形を精度良く予測できるため、その数値計算過程における急激な波浪変形に着目することにより、自動的に碎波点を定めることができ、かつそれは複雑な重合波浪場のように実験結果が得られていない条件下にも適用可能となることが期待される。そこで本研究では、碎波機構の異なる単一進行波と完全重複波について、断面2次元における波浪場の数値シミュレーションをおこない、そこから碎波限界に関わりの深いパラメタを幾つか取り出し、それらの変化を調べることによって、数値シミュレーションにおける碎波指標としての有効性を調べる。さらに既往の碎波指標と比較する事により、従来の指標との整合性を検討する。

2. 数値計算方法

波動方程式には磯部 (1994a) の非線形緩勾配方程式を用い、鉛直分布関数の項数については実用性を勘案して2次までの項で打ち切るものとした。すなわち波動方程式は、

$$g\eta + \frac{\partial f_1}{\partial t} + \left(1 + \frac{\eta}{h}\right) \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial x} + \left(1 + \frac{\eta}{h}\right) \frac{\partial f_2}{\partial x} \right\}^2 + \frac{1}{2} \left\{ \frac{2f_2}{h} \left(1 + \frac{\eta}{h}\right) \right\}^2 - \frac{2\eta(h+\eta)}{h^3} \cdot f_2 \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial x} + \left(1 + \frac{\eta}{h}\right) \frac{\partial f_2}{\partial x} \right\} \left(\frac{dh}{dx} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(h+\eta) \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right) + \frac{(h+\eta)^3}{3h^2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \right) \right] + \frac{(h+\eta)^2(h-2\eta)}{3h^3} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \right) \left(\frac{dh}{dx} \right)$$

$$- \frac{2\eta(h+\eta)}{h^3} f_2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left(\frac{dh}{dx} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\left(1 + \frac{\eta}{h} \right)^2 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(h+\eta)^3}{3h^2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right) + \frac{(h+\eta)^5}{5h^4} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \right) \right] - \frac{4(h+\eta)^3}{3h^4} f_2 - \frac{(h+\eta)^2(h-2\eta)}{3h^3} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right) \left(\frac{dh}{dx} \right) - \frac{2\eta(h+\eta)^3}{h^5} f_2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left(\frac{dh}{dx} \right) \quad (3)$$

で表される。ここで h は静水深、 η は水面変動、 f_1 , f_2 は鉛直分布関数の重み係数である。波動方程式における微分形式の差分化および繰り返し計算方法は、磯部 (1994b) に倣った。

(1) 実験条件

単一進行波および完全重複波における水底条件を図-1, 2に示す。単一進行波については沖から岸に向かって一様勾配斜面を設け、岸側で限界水深に達するようにした。また勾配 $\tan \beta$ は 1/10, 1/20, 1/30, 1/50 の4ケースを用いた。入射波には計算初期段階に波を滑らかに入射させる目的で、徐々に波高が大きくなり一定波高に移項する初期遷移波を用いており、この初期遷移波が岸側一様水深部で数値的不安定を引き起こさぬように、岸側にはエネルギー吸収帯を設置した。岸側境界条件は透過境界条件とした(式-4)。ここで C_{on} は岸側境界における波速である。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - C_{on} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (\Phi = \eta, f_1, f_2) \quad (4)$$

完全重複波では、岸、沖ともに水深を深くとり、その間に緩勾配の潜堤を設けた。さらに岸側境界条件を完全反射条件とした(式-5)。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (\Phi = \eta, f_1, f_2) \quad (5)$$

これにより岸側の完全反射壁から沖に向かって完全重複波が形成され、限界水深に達した時点で碎波することになる。

入射波条件の決定については以下のことに留意した。

1. 数値計算結果の適用性について合田 (1970) の碎波指標 (実験曲線) との比較を通して検証するため、その実験曲線の横軸の値である沖波波形勾配を広範囲にと

* 正会員 五洋建設(株) 技術研究所
 ** 正会員 工博 東京大学教授 工学系研究科社会基盤工学専攻
 *** 正会員 工博 茨城大学講師 工学部都市システム工学科



図-1 単一進行波の水底条件

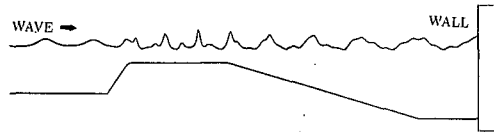


図-2 完全重複波の水底条件

れるようにする。

2. 磯部 (1994b) による非線形緩勾配方程式において鉛直分布関数系に偶数次べき乗式を用いた場合における分散関係の精度、および有限振幅波の適用限界を考慮し、条件に準じて入射波を3次のストークス波及び2次のクノイド波の適用限界内におさめる。

今回の数値実験に用いた入射波条件を表-1に示す。入射波はCASE Aのみ2次のクノイド波で、CASE B～CASE Dは3次のストークス波である。また初期遷移波はCASE Dのみ3波で他はすべて1波である。ここで、 H_0 、 L_0 はそれぞれ沖波波長、波高、 H は入射波高、 T は周期、 h_{off} は沖側境界水深である。

(2) 計算ステップ

本研究では、砕波限界点付近における波の諸量の比較を目的としているため、水平方向計算ステップ Δx は、合田 (1973) の砕波指標と微小振幅波理論から求めた予想砕波限界波長の1/40で固定した。タイムステップ Δt については、Courant 安定条件式(6)から求める。ただし C_{max} は計算領域内の最大波速である。

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{C_{max}} \quad (6)$$

ここで C_{max} について、単一進行波では本来ならば入射波波速を用いるべきであるが、波速の算出において、1タイムステップで波峰の座標が Δx 以上移動しないと波速の値に誤差が生じやすくなる。そこで $C_{max}=C_b$ として波浪場の計算をしたところ、浅水変形による波高変化の

誤差が小さいことが確かめられた。以上から本研究では $C_{max}=C_b$ として計算を行うことにした。完全重複波では砕波限界波長の予測が困難であること、波速をパラメタとして用いないことを理由に入射波波長および入射波波速を基準とし、同様の方法により計算ステップを決定した。

3. 砕波指標パラメタ

既往の研究を参照して砕波現象に関わりの深いパラメタとして、単一進行波については波峰における流速・波速比、波形勾配、波峰角を、完全重複波については波形勾配、波峰角、鉛直方向水粒子加速度・重力加速度比を計算データより取り出した。それぞれの波の諸量の算出方法を以下に示す。

(1) 波速

任意の時刻 t_i における空間波形から波峰の座標を読み取り、1タイムステップ前の時刻 t_{i-1} におけるそれとの変化高 δx から、波速 C_i^x を求めた。すなわち、

$$C_i^x = \frac{\delta x}{\Delta t} \quad (7)$$

ここで、波峰の座標の決定については波峰近傍の3点の座標 (x_{i-1}, η_{i-1}^f) 、 (x_i, η_i^f) 、 (x_{i+1}, η_{i+1}^f) から放物線近似し、その頂点の座標を波峰の座標として定めた。ただし η_i^f は水平方向座標 x_i 、時刻 t_i における水位である。

(2) 流速

まず t_i 、 x_i における速度ポテンシャル ϕ_i^x を用いて、水面上の水平方向流速 u_i^x を以下のように求める。

$$u_i^x = \frac{\partial \phi_i^x}{\partial x} = \frac{\partial \left(f_{i,i}^x + f_{i,i}^x \left(1 + \frac{\eta_i^f}{h_i} \right)^2 \right)}{\partial x} \quad (8)$$

より、微分形式に中央差分を用いて

$$u_i^x = \frac{f_{i,i+1}^x - f_{i,i-1}^x + f_{i,i+1}^x \left(1 + \frac{\eta_{i+1}^f}{h_{i+1}} \right)^2 - f_{i,i-1}^x \left(1 + \frac{\eta_{i-1}^f}{h_{i-1}} \right)^2}{2\Delta x} \quad (9)$$

とする。ここで空間波形の波峰近傍の3点の水平座標上の流速分布から、流速波形を放物線近似し、空間波形の波峰における流速を求めた。

(3) 波長

進行波における波長の算出については、前述により求められた波速 C_i^x を用いて

$$L_i^x = C_i^x T \quad (10)$$

とした。完全重複波の波長の算出については、波峰における波速が得られないため、その両側の谷～谷間の距離を波長とした。

(4) 波高

水平座標上の全ての点 x_i において水位 η_i^f の時系列

表-1 単一進行波の入射波データ

case	$H_0(\text{m})$	$L_0(\text{m})$	H_0/L_0	$H(\text{m})$	$T(\text{s})$	$h_{off}(\text{m})$
A	1.13	351.0	3.22×10^{-3}	1.28	15.0	10.0
B	4.00	351.0	1.14×10^{-2}	3.80	15.0	30.0
C	6.50	156.0	4.17×10^{-2}	5.96	10.0	30.0
D	9.00	99.84	9.01×10^{-2}	8.26	8.0	20.0

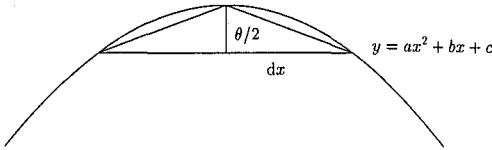


図-3 波峰角の定義

データを取り、周期毎にその最大、最小となる点について同様にその両側の点の計3点 (t_{i-1}, η_i^{t-1}) , (t_i, η_i^t) , (t_{i+1}, η_i^{t+1}) から放物線近似してそれぞれ最大、最小水位 $\eta_{\max,i}^t$, $\eta_{\min,i}^t$ を求め、波高を導いた。

(5) 波 峰 角

波峰の放物線近似で求めた放物線 $y = ax^2 + bx + c$ における a の値を波峰角に換算する。

図-3のように、波峰近似放物線において dx を決定する。

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{adx} \quad \text{より}$$
$$\theta = 2 \tan^{-1} \left(\frac{1}{adx} \right) \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 dx の決め方であるが、同一計算条件上において Δx は固定されているために浅水変形による波長の変化に対して、相対的な不均一が生じる。これを dx で補正するために以下のように dx を定義した。

$$dx = \frac{L_i^j}{v} \dots\dots\dots (12)$$

今回の計算においては定数 v の値を100として計算させた。同一計算上においては、ここで得られた波峰角で、相対的な波峰角変化の評価が可能であることが確かめられた。

(6) 鉛直方向水粒子加速度

完全重複波において波峰における水粒子の運動に着目する。水粒子の鉛直下方向の加速度は波峰が最高水位となるときの最大となるが、このときその加速度が重力加速度に対して過大になると、物理的には水粒子が波峰の変位に追いつけず、波の上に飛び出して(取り残されて)しまい、水面における力学的境界条件を満たさなくなる。すなわち、

$$\frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right) = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right)_b \dots\dots\dots (13)$$

が完全重複波の極限条件式として考えられる。ここで波峰における水粒子の鉛直方向の加速度に着目し、鉛直方向流速加速度 β_i^j を以下の様に求める。鉛直方向流速 w_i^j は、

$$w_i^j = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{2f_z^j}{h_i} \left(1 + \frac{\eta_i^j}{h_i} \right) \dots\dots\dots (14)$$

これより、水粒子の鉛直方向下向きの加速度 β_i^j は、

$$\beta_i^j = \frac{w_i^j - w_i^{j-1}}{\Delta t} \dots\dots\dots (15)$$

で表される。

4. 数値計算結果および考察

(1) 単一進行波

進行波の数値実験において、代表的な結果の得られた $\tan \beta = 1/20$, case A, D, $\tan \beta = 1/50$, case Aの3ケースについて、最終的に数値的不安定を生じた波峰に着目し、時間経過とともにその波峰位置での各パラメタの値をプロットしたのが図-4, 5, 6である。

図-4, 5, 6より、波形勾配は値の変化率が小さく、碎波限界を定めるパラメタとしては誤差が生じやすくなるため適さないと考えられる。波峰角は勾配 $\tan \beta = 1/20$ では碎波点付近において値が大きく変化しているが、勾配 $\tan \beta = 1/50$ に見られるように、緩い勾配では大きな変化が見られる以前に合田の碎波限界点に達してしまう。そこで数値的不安定発生点手前の予測碎波点付近において最もパラメタの変化率が大きく、値の安定している流速・波速比を碎波限界指標として用いることとした。ここで仮に流速・波速比を $u_b/C_b = 0.8$ として、合田(1970)の指標と比較した。(図-7, 8)

図-7, 8から流速波速比が碎波指標パラメタとして碎波点を精度良く与え、非線形理論を取り入れたことにより、同時に碎波波高についても精度良い予測が可能になったことがわかる。

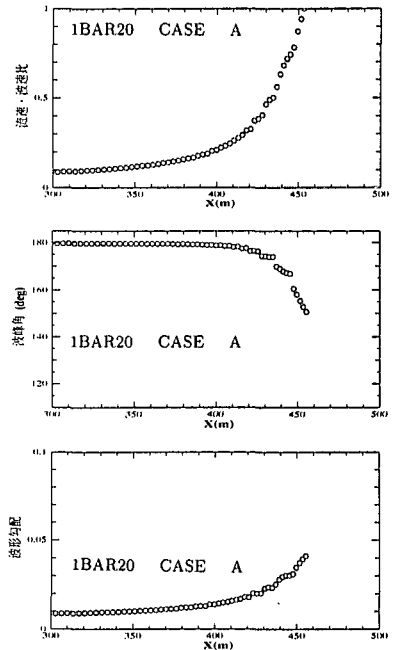


図-4 $\tan \beta = 1/20$, case A における計算結果

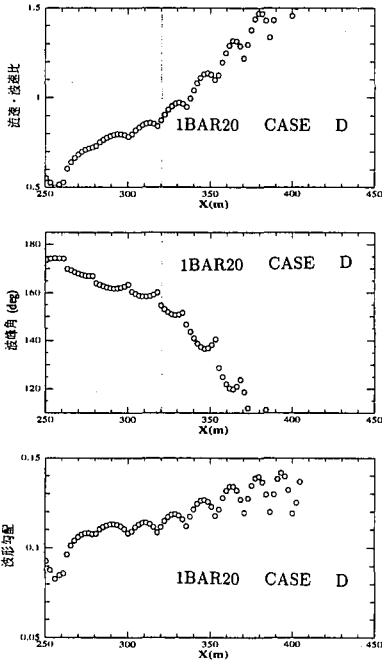


図-5 $\tan \beta = 1/20$, case D における計算結果

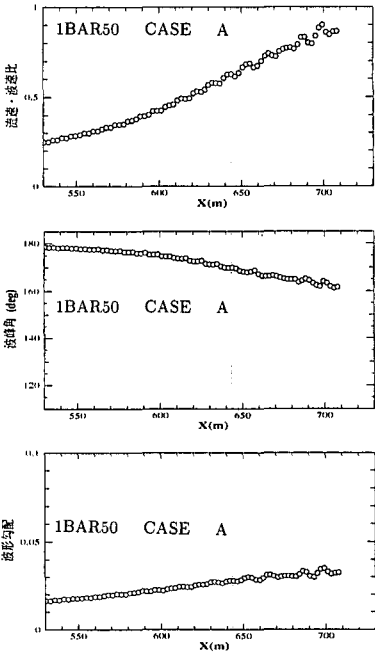


図-6 $\tan \beta = 1/50$, case A における計算結果

(2) 完全重複波

完全重複波の計算では、進行波と比較して砕波限界を越えても計算が発散しにくいことがわかった。そこで、限界波形勾配に達している波峰を見つけ、その波峰における鉛直方向波峰加速度・重力加速度比、および波形勾配の時間変化の様子を図-9に示す。単一進行波と同様

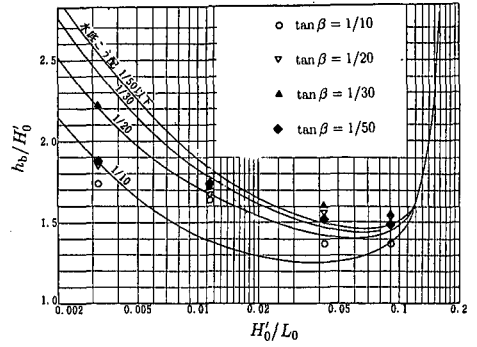


図-7 合田 (1970) の指標との比較 ($H_0/L_0 - h_b/H_0$)

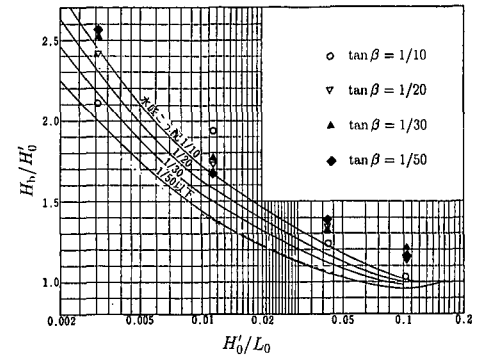


図-8 合田 (1970) の指標との比較 ($H_0/L_0 - H_b/H_0$)

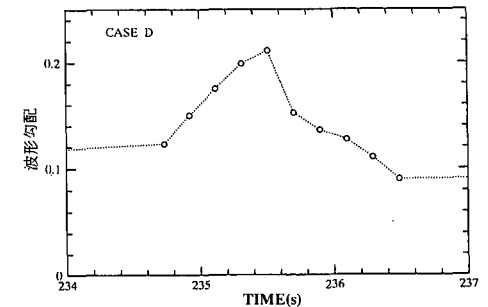
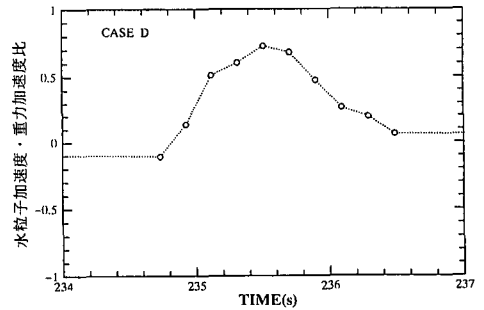
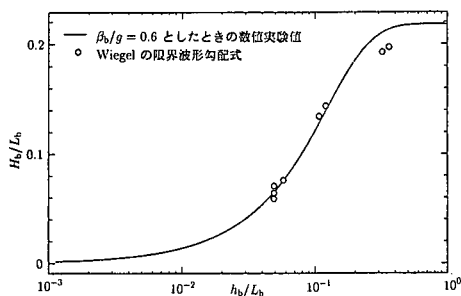
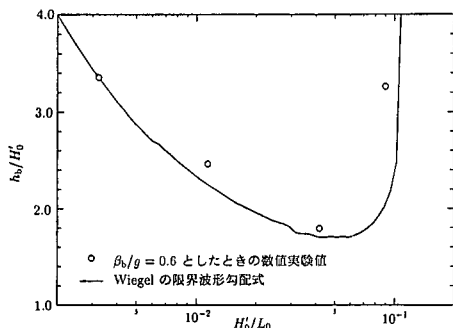


図-9 水粒子加速度・重力加速度比と波形勾配

図-10 Wiegel の限界波形勾配式との比較 ($h_b/L_b - H_b/L_b$)図-11 Wiegel の限界波形勾配式との比較 ($H'_0/L_0 - h_b/H'_0$)

に、結果から鉛直方向波峰加速度・重力加速度比を $\beta_b/g=0.6$ として固定したときの波形勾配を求め、Wiegel の限界波形勾配式と比較した結果を図-10 に示す。また鉛直方向波峰加速度・重力加速度比は他のパラメータと比較して、時間に対する変化率が大きいので、碎波限界点のある固定値で与えるには適しているといえる。

さらに、沖波のデータから碎波点位置の予想できる指標の確立が実用上重要であるため、Wiegel の限界波形勾配式を、合田 (1970) の指標に倣い、変数を沖波波形勾配 (H'_0/L_0)、および碎波水深・沖波波高比 (h_b/H'_0) に換算した。(図-11)

図-10, 11 より完全重複波では実験値との比較はできなかったものの、鉛直方向水粒子加速度・重力加速度比をパラメータとして用いることにより、理論値である限界波形勾配を精度良く予測することが可能であることがわかった。

5. 波速に関する考察

本研究では碎波限界点付近におけるパラメータの変動を

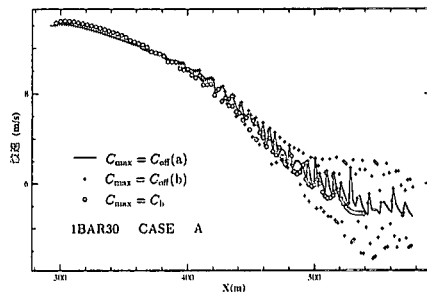


図-12 異なる計算方法による波速の比較

細かく追うことに主眼を置き、1タイムステップ毎に各パラメータを求めた。そのため、前述のような定義のもとで波速を算出したが、任意の進行波について、流速波速比をパラメータとして碎波限界を設定するためには、より一般的な波速の求め方が必要となる。そこで $C_{\max} = C_{\text{off}}$ としても波峰の座標が1ステップ以上移動するのに要した時間を用いて波速を求めた場合では、比較的小さな誤差で波速が評価できることがわかった(図-12)。ただし図-12で、 $C_{\max} = C_{\text{off}}$ における (a) はここで述べた算出方法で、(b) が1タイムステップ毎に波速を求めた場合の数値実験結果である。これにより、任意の進行波について流速波速比を指標として用いることが可能であると考えられる。

6. 結 言

以上の結果から、非線形緩勾配方程式を用いることにより、進行波では水平方向流速波速比、完全重複波では鉛直方向水粒子加速度・重力加速度比を指標パラメータとして碎波限界を精度良く求められることが分かった。進行波および重複波において本研究では異なる指標が導かれたため、部分重複波についてどのように両パラメータを指標として組み込んでいくかが、今後の課題として考えられる。

参 考 文 献

- 磯部雅彦 (1994a): 波浪変形解析のための波動方程式の比較研究, 土木学会論文集 No. 491/II-27, pp. 1-14.
- 磯部雅彦 (1994b): 非線形緩勾配波動方程式の提案, 海岸工学論文集, 第41巻, pp. 1-5.
- 合田良實 (1970): 碎波指標の整理について, 土木学会論文集報告集, 第180号, pp. 39-49.