

入・反射波共存場における方向スペクトルの推定精度の評価法

横 木 裕 宗*

1. はじめに

最近では、海岸・海洋構造物の設計や港湾内の静穏度の予測等のための波浪変形計算を行う際の入射波浪として、多方向不規則波を用いることが一般的になってきた。方向スペクトルは多方向不規則波浪場を記述する有効な手段である。しかし一般に、限られた実測データから方向スペクトルを精度よく推定することは容易ではなく、特に構造物が存在する波浪場、つまり入射波と反射波が共存する場での方向スペクトルの推定は重要であるにもかかわらず、実用的な推定法はいまだ十分には確立されていないのが現状である。

著者ら（1994）は、円正規分布型の方向関数を用いて入・反射波共存場において方向スペクトルを数個のパラメータで表し、それらのパラメータを容易にしかも高精度で推定する方法を提案した。また、著者ら（1995）では、推定法を数値シミュレーションデータ、平面水槽による実験データ、現地観測データに適用し、その有効性を確認している。さらに、水面変動を観測する波高計アレイの形状および設置位置の違いにより、推定されるパラメータの精度が異なることも示したが、定性的な議論に止まっている。

そこで本研究では、著者ら（1994）で提案された方向スペクトルの推定法を用いてパラメータを推定した際の推定誤差と、水面変動の観測に用いた波高計アレイの設置位置・波高計間隔との関係を定量的に評価することを目的とした。あわせて、入射波の主波向、反射面での反射率などを精度よく推定するための波高計アレイの形状・設置位置を提案することを試みた。

2. 方向スペクトルの推定法

円正規分布関数を用いた、入・反射波共存場における方向スペクトルの推定法を以下に簡単に説明する。

図-1で示した観測地点 x_p, x_q で観測された水面変動のクロスパワースペクトル $\Phi_{pq}(f)$ は次式のように表される。

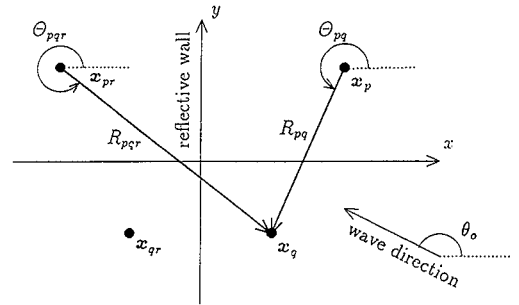


図-1 座標の定義

$$\begin{aligned} \Phi_{pq}(f) = & \int_0^{2\pi} \{ \exp[-ikR_{pq} \cos(\theta - \theta_{pq})] \\ & + r \exp[-ikR_{pqr} \cos(\theta - \pi + \theta_{pqr})] \\ & + r \exp[-ikR_{pqr} \cos(\theta - \theta_{pqr})] \\ & + r^2 \exp[-ikR_{pq} \cos(\theta - \pi + \theta_{pq})] \} \\ & \cdot S(f, \theta) d\theta \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

ここで、 k は周波数 f に対応する波数、 θ は波向、 r は反射面での反射率を表している。また、 $R_{pq}, R_{pqr}, \theta_{pq}, \theta_{pqr}$ などは観測地点間の距離や角度を表している（図-1）。

方向スペクトル $S(f, \theta)$ として円正規分布関数を用いたものを仮定すると、方向スペクトルは次式のように表される。

$$S(f, \theta) = P(f) \frac{1}{2\pi I_0(a)} \exp\{a \cos(\theta - \theta_0)\} \dots (2)$$

ここで、 $P(f)$ は入射波のパワースペクトル、 a は方向集中度を表すパラメータ（以下「方向集中度係数」と呼ぶ）、 θ_0 は主波向を表しており、 $I_0(a)$ は0次の変形された Bessel 関数を表している。

式（2）を式（1）に代入すると、入・反射波共存場でのクロスパワースペクトル $\Phi_{pq}(f)$ は次式のように、4個のパラメータ（ $a, \theta_0, r, P(f)$ ）の関数として表現される。

$$\begin{aligned} \Phi_{pq}(f) = & \left\{ \begin{aligned} & \varphi(a, \theta_0, R_{pq}, \theta_{pq}|f) \\ & + r^2 \varphi(a, \theta_0, R_{pq}, \pi - \theta_{pq}|f) \\ & + r \varphi(a, \theta_0, R_{pqr}, \theta_{pqr}|f) \\ & + r \varphi(a, \theta_0, R_{pqr}, \pi - \theta_{pqr}|f) \end{aligned} \right\} \\ & \times (1 + \delta_{pq \in p}) P(f) \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

* 正会員 工博 茨城大学講師 工学部都市システム工学科

表-1 波浪場条件の一覧

主波向 ($^{\circ}$) θ_0	方向集中度 s	反射率 r
180	10	0.1
135	25	0.5
95	75	0.9

(水深 $h=1.0$ m)

ここで、 ε_p は地点 x_p におけるパワースペクトルに含まれるノイズの割合を表しており、関数 φ は

$$\varphi(a, \theta_0, R, \Theta|f) = \frac{1}{2\pi I_0(a)} \int_0^{2\pi} \exp\{-ikR \cos(\theta - \Theta)\} \cdot \exp\{a \cos(\theta - \theta_0)\} d\theta \dots\dots\dots (4)$$

である。

式 (3) で表されたクロスパワースペクトルの組み合わせ $\Phi_{pq}(f)$ が、観測で得られたクロスパワースペクトルの組み合わせ $\hat{\Phi}_{pq}(f)$ を最も近似するようなパラメータを求めることが、本研究において方向スペクトルを推定することである。

そこで、 $\Phi_{pq}(f)$ と $\hat{\Phi}_{pq}(f)$ の“等しさ”を表すものとして、磯部 (1989) に基づいて次式で表される尤度 L を導入する。

$$L = \frac{1}{(2\pi\Delta f)^M |\Phi|} \exp\left(-\sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M \Phi_{pq}^{-1} \hat{\Phi}_{pq}\right) \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 Δf は $\Phi_{pq}(f)$ が代表する周波数範囲、 M は観測地点の総数、 $|\Phi|$ は行列 $\Phi_{pq}(f)$ の行列式を表している。

式 (5) の L は、 $\Phi_{pq}(f) = \hat{\Phi}_{pq}(f)$ のときに最大となる性質を持っている。 L を最大化するために、 $\partial L / \partial \lambda_i = 0$ を満足するパラメータ λ_i を求めればよいことになる。 $\partial L / \partial \lambda_i = 0$ を式変形すると、式 (6) が得られる (著者ら, 1994)。

$$\sum_{j=1}^M \sum_{l=1}^M \left\{ -\Phi_{ij}^{-1} + \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M \Phi_{iq}^{-1} \hat{\Phi}_{qp} \Phi_{pj}^{-1} \right\} \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial \lambda_i} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

この方程式は非線形の連立方程式であり、修正 Marquardt 法などの繰り返し法を用いることにより解くことができる (例えば、中川・小柳, 1982)。

3. パラメータの推定精度の評価法

上述の推定法を水面変動の数値シミュレーションデータに適用した。入射波の方向スペクトルを、Bretschneider-光易型の周波数スペクトル (有義波高 $H_{1/3}=0.1$ m, 有義波周期 $T_{1/3}=1.0$ s) と光易型方向関数を組み合わせたものと仮定し、表-1 に示した波浪場条件を用いて水面変動をシミュレートした。この水面変動をスペクトル解析して得られるクロスパワースペクトルに対して推定法を適用することにより、パラメータの推定値が、周波数成分毎に求められる。

この周波数成分毎に得られたパラメータの推定精度を

定量的に評価するために、式 (7) で表されるような、様々な波浪場条件に対して推定されたパラメータの真値との誤差の rms 値をパラメータの推定精度を示す指標を用いた。

$$\text{Err}(\lambda_i) = \frac{1}{\bar{\lambda}_i} \sqrt{\frac{1}{N_{\text{total}}} \sum (\lambda_i - \bar{\lambda}_i)^2} \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 $\bar{\lambda}_i$ はパラメータ λ_i の真値を示しており、 $\bar{\lambda}_i$ は推定誤差を正規化するために用いた量で、本研究では、 $\bar{\theta}=180^{\circ}$, $\bar{a}=100$, $\bar{r}=1.0$ とした。式 (7) は、対象としている周波数帯において、パラメータの推定値の真値に対する標準偏差を正規化したものであり、パラメータの推定精度を定量的に評価できる指標であると考えられる。また、形状・設置位置の異なる波高計アレイの間でこの指標の値を比較することにより、パラメータを精度よく推定する波高計アレイを見い出すことができる。

4. パラメータの推定精度の評価結果

4.1 波高計アレイの形状と波浪場の条件

本研究では、3 台の波高計からなる波高計アレイの内、反射面に関して垂直に配置された波高計アレイ、平行に配置された波高計アレイ、三角形に配置された波高計アレイについて、パラメータの推定精度を評価した。

図-2 に、反射面に垂直に配置された波高計アレイと、平行に配置された波高計アレイの模式図を示す。また、図-3 に、三角形に配置された波高計アレイの模式図を示す。図-3 に示すとおり三角形アレイとして、反射面に垂直な方向と平行な方向の波高計間隔が等しいもの (三角形アレイ (1))、垂直な方向の間隔が広がっているもの (三角形アレイ (2))、平行な方向が広がっているもの (三角形アレイ (3)) の 3 種類を考えた。

図-2、図-3 の中の D_p , D はそれぞれ反射面から波高計アレイまでの距離、波高計間隔を表しており、これらの値をいろいろ変えてパラメータの推定精度を求め、 D_p , D とパラメータの推定精度との関係を調べた。

以下本研究では、1 つの波高計アレイについて、表-1 に示した合計 27 通りの波浪場条件において水面変動をシミュレートし、さらにクロスパワースペクトルを計算し、これに対して推定法を適用してパラメータを推定した。そしてこれら 27 通りの波浪場における全ての推定結果の周波数範囲 0.8 Hz~1.2 Hz で求めた式 (7) の値を示した。

4.2 主波向の推定精度

図-4、図-5 に入射波の主波向 θ_0 の推定精度の評価結果を示す。図-4 は、波高計間隔 D と推定精度との関係を、図-5 は反射面から波高計アレイまでの距離 D_p と推定精度との関係を表している。図中、 D , D_p は入射波のピーク周波数成分波の波長 ($L_p=1.72$ m) で無次元化さ

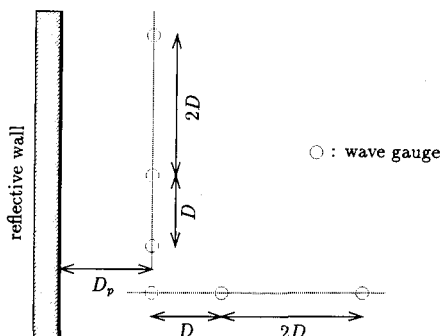


図-2 波高計アレイの形状 (1)

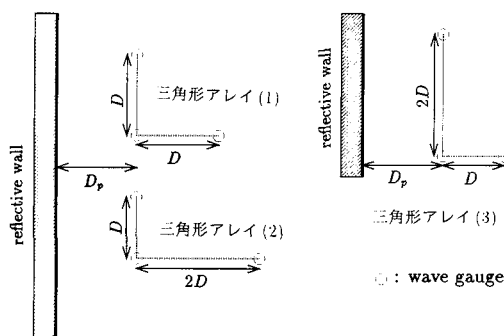


図-3 波高計アレイの形状 (2)

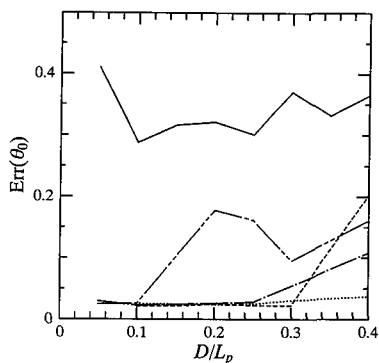
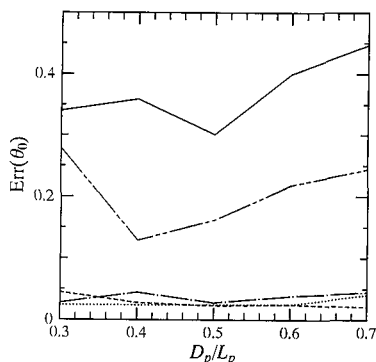
れている。図-4、図-5ともに図中の実線は反射面に垂直な波高計アレイ、破線は平行なアレイ、点線は三角形アレイ(1)、一点鎖線は三角形アレイ(2)、二点鎖線は三角形アレイ(3)による推定精度をそれぞれ表している。

図-4および図-5から、主波向は反射面に平行なアレイ(破線)、および三角形アレイ(1)(点線)を用いると精度よく推定されることがわかる。反射面に垂直なアレイによる推定誤差(実線)はその他のアレイによるものより10倍程度大きいことから、このアレイでは主波向を精度よく推定することはできないことがわかる。

図-4より、波高計間隔が $D/L_p=0.1\sim0.3$ 付近で平行アレイの推定誤差が最小となっており、また図-5より、反射面からの距離が $D_p/L_p=0.4\sim0.6$ 付近で推定誤差が最小となっていることがわかる。また、波高計間隔 D/L_p が大きくなるにつれてどのアレイによる推定誤差も増加しているが、反射面からの距離 D_p/L_p が変化してもそれほど変化しないことから、主波向の推定精度は、反射面からの距離よりも波高計間隔に強く依存していることがわかる。

4.3 方向集中度係数の推定精度

図-6と図-7に、方向集中度係数の推定精度を示す。

図-4 θ_0 の推定精度と波高計間隔との関係 ($D_p/L_p=0.5$)図-5 θ_0 の推定精度と反射面からの距離との関係 ($D/L_p=0.25$)

これらの図中に使用されている記号、折れ線の意味は図-4、図-5と同様である。

これらの図より、方向集中度係数は反射面に平行な波高計アレイ(破線)を用いると、他の波高計アレイを用いるよりやや精度のよい推定値が、波高計間隔 D/L_p や反射面からの距離 D_p/L_p に影響されないで安定的に得られることがわかる。

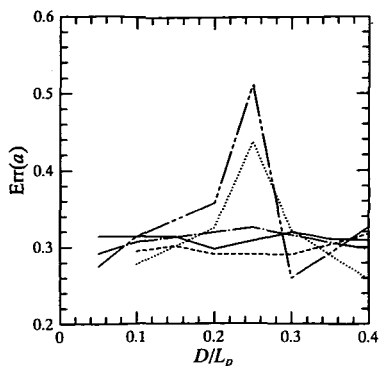
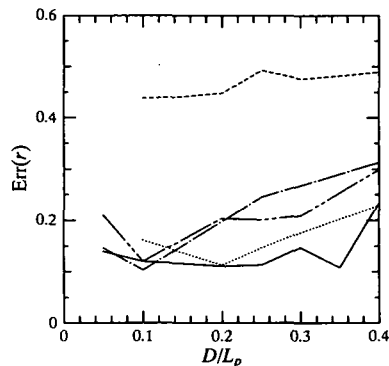
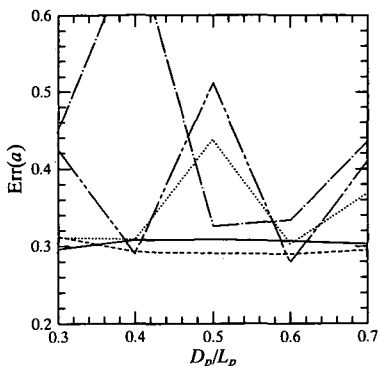
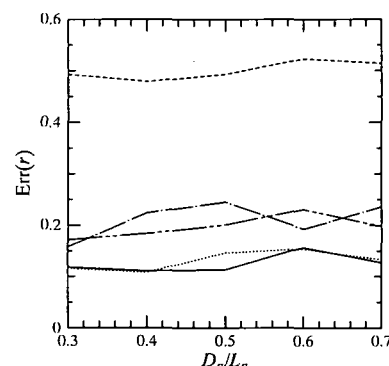
また、図の D/L_p 、 D_p/L_p の範囲では、どの波高計アレイによる推定誤差も、 D/L_p や D_p/L_p の増加に伴って推定誤差が増加するという傾向はみられず、ある D/L_p 、 D_p/L_p の値に対して誤差が大きくなることがみられた。

4.4 反射率の推定精度

図-8と図-9に、反射面における反射率の推定精度を示す。これらの図中に使用されている記号、折れ線の意味は図-4、図-5と同様である。

これらの図から、反射率は反射面に垂直な波高計アレイ(実線)や三角形アレイ(1)(点線)を用いると精度良く推定されることが、反射面に平行な波高計アレイを用いると推定精度が低くなることがわかる。

また図-8より、波高計間隔が $D/L_p=0.1\sim0.2$ 付近で

図-6 α の推定精度と波高計間隔との関係 ($D_p/L_p=0.5$)図-8 r の推定精度と波高計間隔との関係 ($D_p/L_p=0.25$)図-7 α の推定精度と反射面からの距離との関係 ($D/L_p=0.25$)図-9 r の推定精度と反射面からの距離との関係 ($D/L_p=0.25$)

推定誤差が最小となっており、 D/L_p が増加するにつれて推定誤差が増加するのに対して、図-9より、反射面から波高計アレイまでの距離 D_p/L_p が増加しても推定誤差はあまり変化していない。このことから、反射率の推定精度は反射面からの距離よりも波高計間隔に強く影響されることがわかる。

5. パラメーターの推定精度に関する考察

パラメーターの推定精度の評価結果より、反射面に垂直な波高計アレイは反射率を精度良く推定し、反射面に平行な波高計アレイは、主波向、方向集中度係数を精度良く推定していることがわかる。

これは以下の理由によるものと考えられる。本研究で用いた推定法は、各波高計で観測された水面変動のクロスパワースペクトルの組み合わせと、式(3)で計算されるクロスパワースペクトルの組み合わせが等しくなるようなパラメーターを求めるものである。ここで、観測されたクロススペクトルは波高計で得られた時系列データの相互相関(コヒーレンス)と位相遅れ(フェイズ)の情報を持っており、結局パワースペクトル、コヒーレンス、フェイズから波浪場の方向スペクトルを推定していることになる。

パワースペクトルは水面変動の振幅を表すものである。反射面における反射率が0であるとする、波浪場において水面変動の振幅はどこでも一定となる。しかし、入射波と反射波が共存している波浪場では反射面の前面に部分重複波浪場が形成されるために、波高計の設置する位置によって水面変動の振幅が異なることになる。すなわち、パワースペクトルの場所による変動が、反射率を推定するための情報となる。

コヒーレンスは各波高計で得られた水面変動の周波数成分毎の線形性の程度を表すものである。簡単のために波浪場の方向集中度が非常に大きい場合として入射波を規則波と考え、波高計が重複波浪場の節に位置する場合を除いてコヒーレンスは1であるが、入射波の方向分散が大きくなると急激に減少する。このようにコヒーレンスは入射波の方向集中度と関係している。

フェイズは波高計間の水面変動の位相差を表している。簡単のために波浪場の方向集中度が非常に大きいとして考えると、分散関係より、ある周波数成分波について

フェイズは波高計間の水面変動の位相差を表している。簡単のために波浪場の方向集中度が非常に大きいとして考えると、分散関係より、ある周波数成分波について

て波長と波速が決定されるので、フェイズの情報から波向の情報得られることになる。しかし、いま2台の波高計を結ぶ直線に関して対称となる方向へ進行している波長の等しい2種類の波を考えると、この2種類の波のフェイズは等しくなってしまう、波高計を結ぶ直線に関してどちら側から来る波なのかを判別することはできない。

以上で述べた理由により、反射面前面の重複波浪場において、各波高計が節・腹など異なる場所に設置されている反射面に垂直な波高計アレイは、反射率を精度よく推定できると考えられる。また、反射面に平行な波高計アレイを用いることによって、反射面に向かって斜めに入射する波の主波向を正確に推定できると考えられる。またこれらのことは、推定精度の評価結果と一致するものである。

これまでの議論から、反射面に垂直な波高計間ベクトルのみ、または反射面に平行な波高計間ベクトルのみ持っている波高計アレイでは、反射率または主波向のどちらかしか精度よく推定できないことが明らかになった。そこで、1組の波高計アレイの中に、反射面に垂直な波高計間ベクトルと反射面に平行なものが存在する、三角形の波高計アレイを用いることを考える。

この波高計アレイによって観測されるクロスパワースペクトルには、上で述べた反射率を決定するための情報と主波向を決定する情報の両方が含まれているので、反射率も主波向、方向集中度係数も精度よく推定することが期待される。そして実際、三角形アレイを用いると、主波向、方向集中度係数、反射率ともに精度よく推定されることがわかった。

しかし、三角形アレイで推定した反射率の推定精度は、反射面に垂直な波高計アレイで推定した場合ほど高くなく、また、主波向の推定精度は、反射面に平行な波高計アレイで推定した場合ほど高くはなかった。このことは、直線状の波高計アレイでは、反射面に垂直または平行な波高計間ベクトルが3種類存在するのに対して、三角形アレイではそれぞれ1種類ずつしかないために、それらの波高計で得られたデータのクロスパワースペクトルの情報量が少なくなってしまうためと考えることができる。

6. 最適な波高計アレイの提案

パラメータの推定精度の評価結果および考察より、主

波向、反射率、方向集中度係数を精度良く推定するための最適な波高計アレイについて以下のことがいえる。

- ・主波向を精度良く推定するには、反射面に平行なアレイまたは三角形アレイ(1)を用いるのがよい。図-4,5より、 $D/L_p=0.1\sim0.3$ 、 $D_p/L_p=0.4\sim0.5$ の場合に最も精度の良い推定値が得られることがわかる。
- ・反射率を精度よく推定するには、反射面に垂直なアレイまたは三角形アレイ(1)を用いるのがよい。その推定精度は、図-8より、 $D/L_p=0.1\sim0.2$ の場合に最も高くなることがわかる。
- ・方向集中度係数については、反射面に平行な波高計アレイを用いることにより精度のよい推定値が得られる。しかし、本研究では方向集中度係数の推定精度と反射面からの距離や波高計間隔との明確な関係が見出せなかった。

7. おわりに

本研究では、円正規分布関数を用いた方向スペクトルの推定法を用いた際の、推定されるパラメータの推定精度の定量的な評価法を提案した。

その評価法を用いて、反射面に垂直な波高計アレイ、平行な波高計アレイ、三角形アレイを用いた場合のパラメータの推定精度を比較し、推定精度の特性を明らかにするとともに、それらのパラメータを精度よく推定するための波高計アレイを示した。

なお、本研究を遂行するにあたり、東京大学大学院工学系研究科社会基盤工学専攻 磯部雅彦教授、渡辺 晃教授に有益な助言を頂いたことをここに記し、感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 磯部雅彦 (1989): 標準化された方向スペクトルの推定法, 海岸工学論文集, 第36巻, pp. 158-162.
- 合田良実 (1990): [増補改訂] 港湾構造物の耐波設計, 鹿島出版会, 333 p.
- 中川 徹・小柳義夫 (1982): 最小二乗法による実験データ解析, 東京大学出版会, pp. 99-110.
- 横木裕宗・磯部雅彦・渡辺 晃 (1994): 円正規分布関数を用いた入・反射波共存場における方向スペクトルの推定法, 海岸工学論文集, 第41巻, pp. 41-45.
- 横木裕宗・磯部雅彦・渡辺 晃 (1995): 円正規分布関数を用いた入・反射波共存場における方向スペクトルの推定法の実験・現地観測データへの適用, 海岸工学論文集, 第42巻, pp. 206-210.