

KP 方程式を用いたマッハ反射の数値解析

藤井信太郎*・京 藤 敏 達**・西 村 仁 嗣***

1. はじめに

津波等の長波が海岸線と小さな角度をなして入射するとき、海岸線に対して垂直な波峰を持った波（マッハシステム）が形成される場合がある。いわゆるマッハ反射といわれる現象である。Miles (1977) によって行われた理論的研究により、マッハシステムの波高は最大で入射波の4倍にまで達することが示され、その工学的な重要性から実験的研究 (Melville, 1980) や強非線形方程式による数値解析 (Tanaka, 1993) が引き続き行われている。マッハ反射は、非線形方程式モデルで再現される現象であることから、波の非線形性がその発達の大きな要因であることがわかる。近年に至っては、孤立波および周期波のマッハ反射について、ブシネスク方程式モデルに基づく数値解析が森屋ら (1995) により行われている。しかし、入射角によるマッハシステムの波高の相違など、特性値の変化に及ぼす入射波の非線形性や3次元性等の効果は、未だ十分に解明されていない。

本研究では、この問題に関して新たな知見を得るため、KP 方程式モデルに基づいてマッハ反射の数値解析を行った。計算法には津波計算に広く用いられている ADI 法よりもさらに収束効率の良い GEI 法に注目し、その改良を試みた。解析結果は、まずマッハ反射に関して提示された Miles の理論および Melville の実験と比較をし、マッハ反射の表現における KP 方程式モデルの妥当性を検証した。次に、様々な入射波に対する KP 方程式各項の order estimation を行い、マッハ反射の生起条件を調べた。

2. KP 方程式と計算条件

モデルとして用いた KP 方程式 (1) は、一様水深で自由表面を持つ流体の非回転運動を想定し、重力波の基礎方程式系 (連続式、運動学的・力学的表面条件、底面条件) を波高・水深比 $\epsilon (=a_i/h)$ について1次、水深・代表波長比 $\mu (=h/l)$ について2次まで正しく表現するも

のである。

$$\eta_{xx} + \frac{3}{4}\epsilon(\eta^2)_{xx} + \frac{1}{6}\mu^2\eta_{xxxx} + \frac{1}{2}\eta_{zz} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、波は x 軸の正方向に準一方向的に進行し、波峰線はその横断方向 z とはわずかに傾いているとする。 η は、静水面から測った波面位を表す。また、この方程式では、以下のような無次元化がなされている。

$$l = lx^*, y = hy^*, z = lz^*, t = (l/\sqrt{gh})t^*, \eta = a_i\eta^* \quad \dots\dots\dots (2)$$

ただし、*は次元量を表す。KP 方程式の分散関係式は、入射波 $\eta = \exp[i(kx - mz - \omega t)]$ に対して、線形近似で、

$$\omega = -k \left\{ \frac{\mu^2}{6}k^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{m}{k} \right)^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

となる。ただし、波向きの傾きについては $(m/k)^2 = O(\mu^2) = O(\epsilon)$ とした。

計算では差分式を単純化するため $T = \mu^2 t$, $Z = \mu z$, $N = (\epsilon/\mu^2)\eta$ というスケールリングを行い、 x 方向に1階積分した微積分方程式を用いる。Lax-Wendroff 型の差分化を行い、時間的には前方差分、空間的には中央差分をとることとする。積分項は台形公式を用いて計算する。この方法は Katsis ら (1987) の方法にならったものであるが、時間 T の2階微分項は微積分方程式を代入することにより1階微分に置き換えた。結果として計算は陰解法となる。

格子点間隔は、本来計算の安定性から定めなければならないが、ここでは Katsis らが用いた間隔を参考とし、 Z 方向には、波の変化をより正確にとらえるため、さらに間隔を小さくした。すなわち、type 1 ($\Delta x = 0.05$, $\Delta Z =$

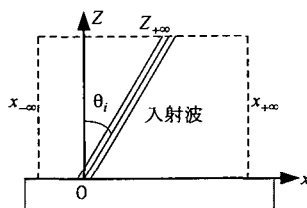


図-1 計算領域

* 学生会員 工修 筑波大学大学院 工学研究科

** 正 会 員 工博 アジア工科大学院助教授

*** 正 会 員 工博 筑波大学教授 構造工学系

0.035, $\Delta T=0.00012$) および type 2 ($\Delta x=0.125$, $\Delta Z=0.05$, $\Delta T=0.001$) の2種類を試用した。

図-1に示すように、孤立波が x 軸に沿う鉛直壁で反射する状況について計算を行う。計算領域の流れ方向境界 ($x=x_{\pm\infty}$) および沖側境界 ($Z=Z_{+\infty}$) の外側には障害物のない半無限領域を考え、沖側境界の外には無限に長い入射波峰が続いているものとした。

境界条件として、流れ方向境界では静水状態 $\eta_{xx}=\eta_x=0$ を与える。このため計算時間内に波が境界に達することのないよう、流れ方向の計算領域を十分に広くとる。壁面では完全反射の条件 $\eta_z=0$ を与える。沖側境界では、入射波の進行に伴い計算領域内に進入する無限に長い波峰の一部が直線に保たれるように、境界上の波の位置を外挿により求め、そこでは初期波形と同じ波形を与える。反射波が沖側境界に達すると外挿が困難になるので、 Z 方向の計算領域も、十分に広くとる必要がある。

波は図-1のように時間 $T=0$ で壁面上の $x=0$ の位置に入射角 θ_i をなして入射すると考える。入射波の初期波形としては、KP方程式の Z 方向の変化を無視したKdV方程式の解 $\eta=a_i \operatorname{sech}^2(\sqrt{3}a_i/2)x$ を用いる。計算に用いるパラメータ μ の要素である代表波長 l としては、初期波形の静水面上の全断面積を最大波高 a_i で割った値を用いる。

3. 改良 GEI 法

長波の数値計算に際してはADI法が広く用いられているが、本研究ではより収束効率の高いGEI (Group-Explicit-Iterative)法に注目し、その改良を試みた。GEI法は、まず計算領域の縦横の格子点数を意図的に奇数にとり、全格子点を方形の4点毎のグループに分割して、グループ内の4点の物理量のみを未知量とする連立方程式を順次解いていく。この時、必然的に領域端では2点、最後の隅角部では1点のみのグループができる。次のステップの計算ではこうした変則グループを反対側の端部に設定すると、収束計算の各ステップごとにグループの構成が変化し、かき混ぜ効果が生じて、収束効率が向上する。

改良GEI法では、各グループの計算を入射波の前方から後方に向かって行い、SOR法のように前のグループについて得られた最新の数値を次のグループの演算に用いる。この方法による収束効率の向上を確認するため、両計算法の最初の時間ステップにおける収束計算の各ステップごとの残差の減少状況を比較した。ここでは総残差として、各点の残差の絶対値の総和を用いる。格子点間隔としては、粗いtype 2を用いた。図-2は総残差の減少状況をプロットしたものである。両計算法とも最終的な残差は同程度であるが、改良GEI法では残差の減少

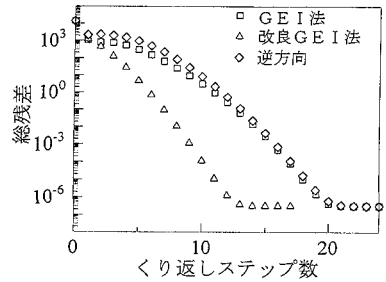


図-2 総残差の比較 ($\epsilon=0.1$, $\theta_i=20^\circ$)

が速く、収束に必要な計算の回数が少ない。同様の条件で波高の発達が一定となる $T=1078 \times \Delta T$ までの計算を行った場合、計算の終了までに必要とした収束計算の総回数は、GEI法で56266回、改良GEI法で23288回であった。収束計算1回当たりに必要な演算量はほぼ等しく、これより改良GEI法による収束の効率化は約60%と評価される。

収束計算に伴う残差分布の変化について比較を行う。図-3は初期波形の残差分布を示している。残差は入射波の存在する領域に集中していることがわかる。収束計算を2~3回行った時点では、入射波領域の残差は大きく減少するが、総残差量の減少はわずかである。図-4, 5に示すように、初期段階で入射波後方に残差が現われ、この後もあまり減少せずに残る。これが計算回数を多く必要とする原因となっている。両計算法を比較すると、改良GEI法ではこの領域の残差の減少が速く、良好な収束効率を得ることがわかる。

KP方程式の数値計算では、適切な初期条件を与えることの難しさが、Akyias (1994)により指摘されている。一般には、KP方程式の仮定 $(m/k)^2 = O(\epsilon)$ を満たさない波の要素が入射波に含まれ得ることになる。ここでKP方程式の分散関係式(3)より群速度ベクトルを求め $k \rightarrow 0$, $m \neq 0$ とすると、次のようになる。

$$\overline{C}_{g1} \Big|_{\substack{k \rightarrow 0 \\ m \neq 0}} = \left(-\frac{\mu^2}{2} k^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{m}{k} \right)^2, \frac{m}{k} \right) \Big|_{\substack{k \rightarrow 0 \\ m \neq 0}} = (-\infty, \infty) \quad \dots\dots\dots (4)$$

これは入射波後方に波長の長い水位変動が現れることを示している。これが後方領域に現れる残差分布の原因と考えられる。改良GEI法では、格子点グループの計算において入射波領域の計算を先行させるが、比較のために入射波後方から前方に向かって計算を行うと、総残差の減少傾向は通常のGEI法とほぼ同じになる(図-2)。

格子点間隔が小さいtype 1の場合、改良GEI法による収束計算回数の減少はほとんど見られなくなる。これは、GEI法自体の残差の減少が速く、改良による収束の効率化が顕著でないためと考えられる。

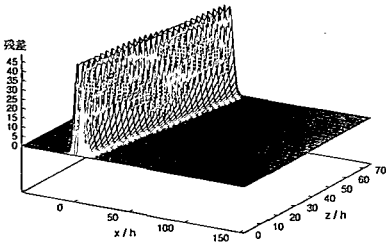


図-3 初期残差分布

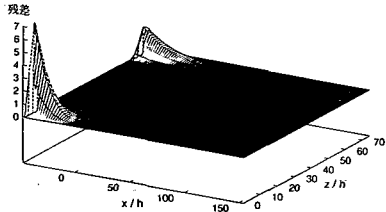


図-4 残差分布 (GEI 法, 収束計算 5 回)

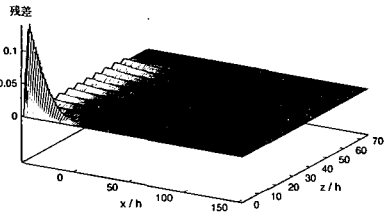


図-5 残差分布 (改良 GEI 法, 収束計算 5 回)

4. KP 方程式モデルの妥当性の検証

マッハ反射について過去に行われた理論的, 実験的研究と KP 方程式モデルに基づく数値解析の結果との比較を行う。図-6 はマッハシステムの波高の初期発達について, Melville (1980) の実験と本モデルの計算を比較したものである。実験値と計算値の間には概略の一致が見られ, 本モデルがマッハ反射における波の初期発達を良く表現していることがわかる。

次に波が十分発達した段階で, 得られた最大波高を図-7 に示す。図中の実線は Miles (1977) の理論による壁面波高・初期波高比

$$\frac{a_w}{a_i} = (1 + \theta_i / \sqrt{3} a_i)^2 \quad (\theta_i^2 < 3 a_i) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{a_w}{a_i} = \frac{4}{1 + \sqrt{1 - (3 a_i / \theta_i^2)}} \quad (\theta_i^2 > 3 a_i) \quad \dots\dots\dots (6)$$

を示している。この理論によれば入射角が

$$\theta_i = \sqrt{3 a_i} \quad \dots\dots\dots (7)$$

となるとき, マッハシステムの発達 は最大となり, この角度より入射角が大きい場合, 反射形態はマッハ反射から通常モードの反射へ遷移する。この理論は波高・水深比 ϵ と 2 つの波の交叉角が小さいと仮定して導かれ, 壁面の存在を考慮していない。一方, 入射角の微小性を仮定しない Tanaka (1993) の理論では,

$$\frac{a_w}{a_i} = 2 + \left\{ \frac{3}{2 \sin^2 \theta_i} - 3 + 2 \sin^2 \theta_i \right\} a_i \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる。この図には, ブシネスク方程式モデルに基づく森屋ら (1995) の数値解析結果も同時に示されている。ここで () は, 波高がまだ発達段階にあることを示している。

KP 方程式は, ブシネスク方程式とは異なり準一方向波を仮定しているため, 入射角 θ_i が小さいという制約を受ける。しかし両モデルによる計算結果の比較から, 本モデルはマッハシステムの進行方向を x 軸にとった場合,

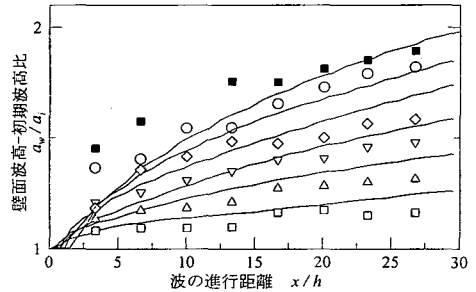


図-6 マッハシステムの波高の初期発達
($\epsilon=0.1$, —: KP 方程式モデルの計算結果, □: 入射角 $\theta_i=10^\circ$ の Melville の実験値, △: 15° , ▽: 20° , ◇: 25° , ○: 30° , ■: 35°)

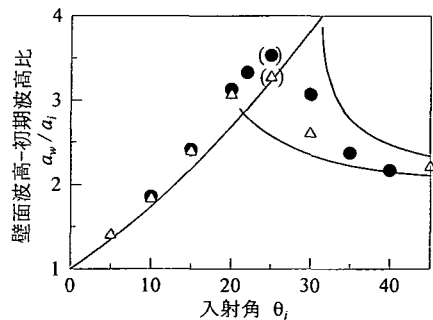


図-7 入射角に対するマッハシステムの最大波高
($\epsilon=0.1$, —: Miles の理論, ●: KP 方程式モデルによる計算結果, △: ブシネスク方程式モデルによる計算結果)

その発達を十分に表現することがわかった。また Miles の理論との定性的な一致からも、マッハ反射の表現における KP 方程式の妥当性が伺われる。

5. マッハ反射の生起条件

マッハ反射に見られる特徴的な現象、たとえば入射角によるマッハシステムの波高といった特性値の変化に及ぼす入射波の非線形性、3次元性等の効果を調べるため、マッハ反射あるいは通常モードの反射を生じる場合の KP 方程式各項の寄与を比較する。

図-8 にその結果を示す。これらの図は、それぞれ時間

微分項の最大値が1となるようにスケーリングされている。同図 (a)~(c) を見ると、入射角が小さいほど非線形項が卓越し、これがマッハ反射に結びつくものと推定される。逆に入射角が大きいほど3次元項が卓越する。この時マッハシステムが短くなって、入射波と同程度の波高を持つ通常モードの反射波が現れる。

マッハシステムの波高が最大となった図-8 (b) では、非線形項と3次元項の大きさは同程度となっている。入射角が更に大きくなると3次元項が卓越する。このとき Miles の理論と、本モデルの計算結果から、通常モードの反射が生じることが明らかであり、マッハ反射は非線形

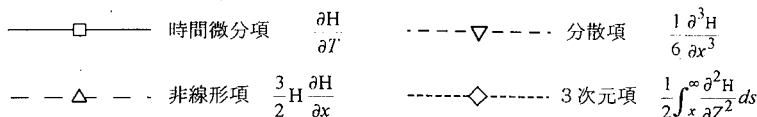
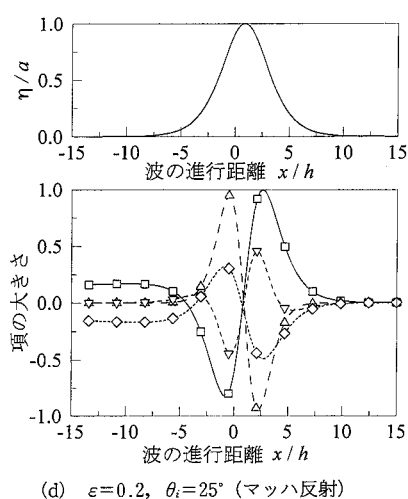
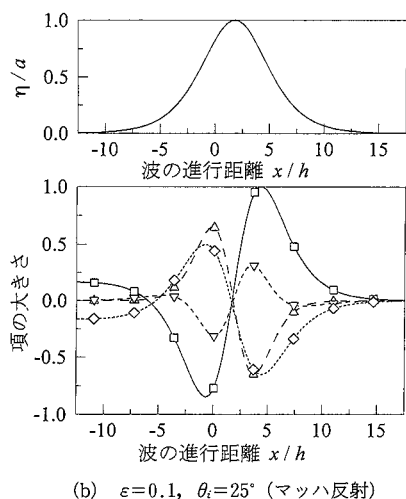
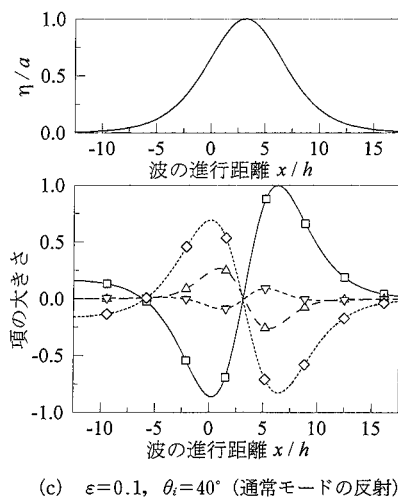
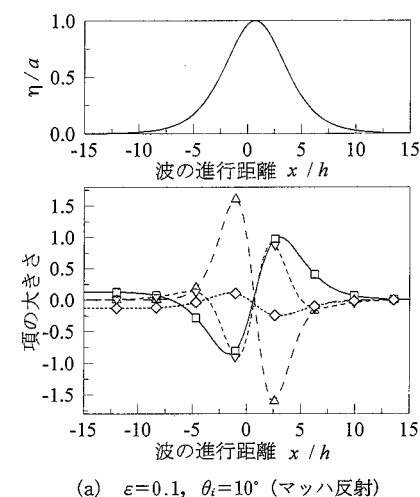


図-8 波形と KP 方程式各項の大きさの比較

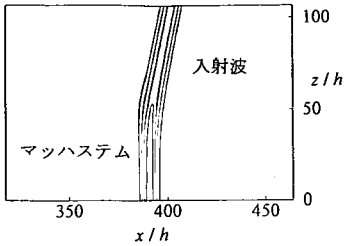


図-9 KP 方程式モデルによる計算結果

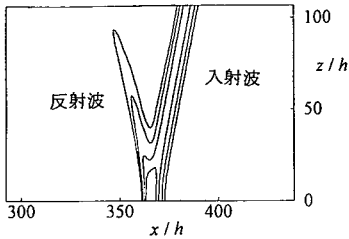


図-10 非線形項、分散項なしの計算結果

項が3次元項よりも大きくなるときに生じると考えられる。波高・水深比 $\varepsilon=0.2$ 、入射角 $\theta_i=25^\circ$ の場合 (図-8 (d)) と $\varepsilon=0.1$ 、 $\theta_i=25^\circ$ の場合 (図-8 (b)) を比較すると、前者では波高が大きいため、3次元項に比べて非線形項がかなり大きくなっている。これより ε の増大に伴い、マッハ反射から通常モードの反射へ遷移する入射角は大きくなることが分かる。これは Miles の理論の示すところと一致している。

マッハ反射に及ぼす波の非線形性の効果を確認するため、 $\varepsilon=0.1$ 、 $\theta_i=10^\circ$ の条件で計算を行った。図-9 は、KP 方程式モデルから得られた波高のコンター図を示している。一方、非線形項および分散項を除去した方程式の数値解は図-10 のようになる。マッハシステムが生じ、反射波の波高が小さくなるというマッハ反射の特徴は、やはり前者において顕著に現れている。

6. 結 論

KP 方程式モデルの数値解析結果と、過去の理論的、実験的研究成果を比較すると、良好な定性的、定量的一致が見られ、本モデルがマッハ反射を十分に表現し得ることがわかった。計算に用いた改良 GEI 法は、入射波の存在する領域の格子点グループから計算を行い、得られた数値を引き続く入射波後方の水位変動計算に用いることで、後方領域の残差の減少を促進するもので、これにより収束の効率化が図られる。

さまざまな入射波を用いて KP 方程式の各項の大きさを比較した結果、非線形項と3次元項の大きさが同程度の場合に、マッハシステムの波高が最大となることがわかった。この角度より入射角が大きくなると3次元項が卓越し、通常モードの反射が生じる。マッハ反射は非線形項が3次元項より大きくなるような条件の下で生じる。

分散関係式 (3) からわかるように、3次元項は境界法線方向 (z 方向) の波速の波数依存性を表している。この分散性が、壁面における波の発達を沖側へと伝える効果がある。マッハ反射においては、この項の寄与が小さくなり、沖側への広がり相対的に弱まる。

参 考 文 献

- 森屋陽一・菊池正行・松立博樹・水口優 (1995): 浅海領域における周期波のマッハ反射について, 海岸工学論文集, 第42巻, pp. 6-10.
- Akylas, T. R. (1994): Three-dimensional long water-wave phenomena, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 26, pp. 191-210.
- Katsis, C. and T. R. Akylas (1987): On the excitation of long non-linear water waves by a moving pressure distribution. Part. 2. Three-dimensional effects, *J. Fluid Mech.*, Vol. 177, pp. 49-65.
- Melville, W. K. (1980): On the mach reflection of solitary wave, *J. Fluid Mech.*, Vol. 98, part. 2, pp. 285-297.
- Miles, J. W. (1977): Obliquely interacting solitary waves, *J. Fluid Mech.*, Vol. 79, part. 1, pp. 171-179.
- Tanaka, M. (1993): Mach reflection of a large-amplitude solitary wave, *J. Fluid Mech.*, Vol. 248, pp. 637-661.