

急斜面上での波動場とラディエーション・ストレスの評価

谷本 勝利*・中村 茂**・趙

群**・中村 廣昭***

1. はじめに

海浜流やサーフビートなどの波平均現象において重要な役割を演じるラディエーション・ストレスは、水底勾配が緩やかに変化するとした緩勾配近似の扱いによって評価されるのが普通である。しかし、珊瑚礁や人工リーフなどにおいては、斜面が急であり、Karunarathna・Tanimoto (1996) は海底勾配によるラディエーション・ストレスの低下を考慮する必要があることを指摘した。しかしながら、これは実験によってラディエーション・ストレスを算出して指摘したものであり、理論的解析は行われていない。

そのため、筆者ら (中村ら, 1996) は Nadaoka・Hino (1984) が示した等角写像法による理論を用いて、水底の運動学的境界条件を満足する斜面上の波の流速成分を計算し、ラディエーション・ストレスの評価を試みた。本論文は、それに加えて、波動理論として、Biesel (1952) の摂動法による理論を用いて、急斜面上での波動場とラディエーション・ストレスを検討するものである。ただし、扱いは断面 2 次元であり、微小振幅波を仮定している。

2. 一様斜面上での微小振幅波理論

(1) 基礎式

図-1 に示しているように、一定勾配の斜面と静水面の交点を原点とし、静水面に x 軸、鉛直上向きに y 軸をとる。斜面の傾斜角を β_0 と表記すると、勾配 δ 、水深 $h(x)$ は次のように表される。

$$\delta = \tan \beta_0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$h(x) = \delta x \quad \dots\dots\dots (2)$$

速度ポテンシャル ϕ と線形化した境界条件は次のとおりである。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0; x > 0, -h(x) \leq y \leq 0 \quad \dots\dots (3)$$

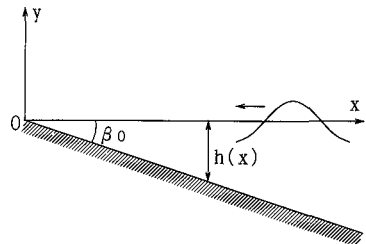


図-1 座標系

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} + \delta \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0; y = -h(x) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0; y = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0; y = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 η : 水位、 g : 重力の加速度。

(2) Biesel の摂動法による理論

x の負の方向に進行する波を考える。Biesel による δ の 1 次の項までとった解は次のとおりである。

$$\phi = \phi_0 + \delta \phi_1 \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに、

$$\phi_0 = -\frac{a\omega \cosh k(y+h)}{k \sinh kh} \sin\left(\int k dx + \omega t\right) \quad \dots (8)$$

$$\phi_1 = -\frac{a\omega}{k \sinh kh} (f_1 + f_2) \cos\left(\int k dx + \omega t\right) \quad \dots (9)$$

$$f_1 = \left\{ \frac{k^2(y+h)^2}{D \sinh 2kh} - k(y+h) \right\} \cosh k(y+h) \quad (10)$$

$$f_2 = \frac{k(y+h)}{D^2 \tanh kh} \sinh k(y+h) \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$D = 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\omega^2 = gk \tanh kh \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$a = \frac{a_\infty}{(D \tanh kh)^{1/2}} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ω : 波の角周波数、 a_∞ : $x = \infty$ での振幅。

式 (13) は分散関係式であり、1 次オーダーまでの関係式では、水平床の場合と同じである。式 (14) は浅水変形

* 正 会 員 工博 埼玉大学教授 工学部建設工学科

** 学生会員 埼玉大学大学院 理工学研究科

*** 正 会 員 埼玉大学助手 工学部建設工学科

による振幅の変化を表しており、これも緩勾配近似の微小振幅波理論によるものと同じである。

水平速度成分 u 、鉛直速度成分 v は δ^2 のオーダーの項を無視して次のようになる。

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\bar{u} \cos \left(\int kx + \omega t + \varepsilon_u \right) \quad (15)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \bar{v} \cos \left(\int kx + \omega t + \varepsilon_v \right) \quad (16)$$

ここに、

$$\bar{u} = a\omega(\bar{u}_c^2 + \bar{u}_s^2)^{1/2} \quad (17)$$

$$\bar{v} = a\omega(\bar{v}_s^2 + \bar{v}_c^2)^{1/2} \quad (18)$$

$$\varepsilon_u = \tan^{-1} \frac{\bar{u}_s}{\bar{u}_c} \quad (19)$$

$$\varepsilon_v = \tan^{-1} \frac{-\bar{v}_s}{\bar{v}_c} \quad (20)$$

$$\bar{u}_c = \frac{\cosh k(y+h)}{\sinh kh} \quad (21)$$

$$\bar{u}_s = \frac{\delta}{\sinh kh} (f_1 + f_2 + f_3) \quad (22)$$

$$f_3 = \frac{\cosh k(y+h)}{D^2 \tanh kh} + \frac{2k(y+h) \sinh k(y+h)}{D \sinh 2kh} - \sinh k(y+h) \quad (23)$$

$$\bar{v}_s = \frac{\sinh k(y+h)}{\sinh kh} \quad (24)$$

$$\bar{v}_c = \frac{\delta}{\sinh kh} (f_4 + f_5) \quad (25)$$

$$f_4 = \left\{ \frac{2k(y+h)}{D \sinh 2kh} + \frac{k(y+h)}{D^2 \tanh kh} - 1 \right\} \cdot \cosh k(y+h) \quad (26)$$

$$f_5 = \left\{ \frac{k^2(y+h)^2}{D \sinh 2kh} + \frac{1}{D^2 \tanh kh} - k(y+h) \right\} \cdot \sinh k(y+h) \quad (27)$$

波形 η は次のように表される。

$$\eta = A \cos \left[\int k dx + \omega t + \varepsilon_\eta \right] \quad (28)$$

ここに、

$$A = (\bar{\eta}_c^2 + \bar{\eta}_s^2)^{1/2} \quad (29)$$

$$\bar{\eta}_c = \frac{a\omega^2 \cosh k(y+h)}{gk \sinh kh} = a \quad (30)$$

$$\bar{\eta}_s = \delta \frac{a\omega^2}{gk \sinh kh} (f_1 + f_2); y=0 \quad (31)$$

$$\varepsilon_\eta = \tan^{-1} \frac{\bar{\eta}_s}{\bar{\eta}_c} \quad (32)$$

(3) 等角写像法による理論

物理面 z 、写像面 ζ を式 (33)、(34) のように表し、写像関数を式 (35) のようにとる。

$$z = x + iy \quad (33)$$

$$\zeta = \alpha + i\beta \quad (34)$$

$$\zeta = \ln z \quad (35)$$

このとき、 (x, y) と (α, β) との関係は次のようになる。

$$\alpha = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), \quad \beta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (36)$$

$$x = e^\alpha \cos \beta, \quad y = e^\alpha \sin \beta \quad (37)$$

すなわち、図-1 の物理面は α, β を水平 (静水面) および鉛直座標とし、次式で表される一定水深 β_0 の領域に写像される。

$$\beta_0 = \tan^{-1} \delta \quad (38)$$

この場合、スケールファクター s は次のように α のみの関数となる。

$$s = \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{e^\alpha} = s(\alpha) \quad (39)$$

写像面において振幅 $\bar{A}(\alpha)$ 、波数 $\bar{k}_0(\alpha)$ で α の負の方向に進行する波を考えたときの δ の 0 次のオーダーの速度ポテンシャル ϕ_0 は次のように求められる (Nadaoka and Hino, 1984)。

$$\phi_0 = -\frac{\bar{A}\omega}{\bar{k}_0 s_0^2(\alpha)} \frac{\cosh \bar{k}_0(\beta + \beta_0)}{\sinh \bar{k}_0 \beta_0} \sin \left(\int \bar{k}_0 d\alpha + \omega t \right) \quad (40)$$

ここに、

$$s_0(\alpha) g \bar{k}_0 \tanh \bar{k}_0 \beta_0 = \omega^2 \quad (41)$$

$\bar{A}$ は写像面における振幅である。また、 s_0 は $\beta=0$ での s の値であるが、式 (39) からわかるようにこの場合 $s=s_0$ である。

物理面における速度成分は式 (40) の速度ポテンシャルを次のように微分して与えられる。

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} \quad (42)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial y} \quad (43)$$

後述するように、Biesel の第一次近似解においては、 a や k の微分項を無視 ($f_3=0$ とおくことに相当) しても全体的な結果はほとんど変わらず、無視したほうが水底の運動学的境界条件を満足するという利点がある。等角写像法においてもそうであり、 $\bar{A}$ 、 $\bar{k}_0$ 、 s_0 は明らかに α の関数であるけれども、ここではこれらの微分項は無視して扱う。

写像面における波の振幅 $\bar{A}$ は物理面における振幅 A と次の関係にある。

$$\bar{A} = s_0 A \quad (44)$$

これを用いて流速成分は次のように表される。

$$u = -\bar{u} \cos \left(\int \bar{k}_0 d\alpha + \omega t + \varepsilon_u \right) \quad (45)$$

$$v = \bar{v} \cos \left(\int \tilde{k}_0 d\alpha + \omega t + \varepsilon_v \right) \quad (46)$$

ここに,

$$\bar{u} = A\omega(B_{uc}^2 + B_{vs}^2)^{1/2} \quad (47)$$

$$\bar{v} = A\omega(B_{us}^2 + B_{vc}^2)^{1/2} \quad (48)$$

$$\varepsilon_u = \tan^{-1} \frac{B_{vs}}{B_{uc}} \quad (49)$$

$$\varepsilon_v = \tan^{-1} \frac{-B_{us}}{B_{vc}} \quad (50)$$

$$B_{uc} = \frac{\cosh \tilde{k}_0(\beta + \beta_0)}{\sinh \tilde{k}_0\beta_0} \cos \beta \quad (51)$$

$$B_{us} = \frac{\cosh \tilde{k}_0(\beta + \beta_0)}{\sinh \tilde{k}_0\beta_0} \sin \beta \quad (52)$$

$$B_{vc} = \frac{\sinh \tilde{k}_0(\beta + \beta_0)}{\sinh \tilde{k}_0\beta_0} \cos \beta \quad (53)$$

$$B_{vs} = \frac{\sinh \tilde{k}_0(\beta + \beta_0)}{\sinh \tilde{k}_0\beta_0} \sin \beta \quad (54)$$

3. ラディエーション・ストレス

波動場の諸元がわかれば, x 軸に直角な面に x 軸方向に働くラディエーション・ストレス S_{xx} は微小振幅近似で次式によって計算できる (Mei, 1989).

$$S_{xx} = \rho \left\{ \frac{g\eta^2}{2} + \int_{-h}^0 (\bar{u}^2 - \bar{v}^2) + \int_{-h}^0 dy \frac{\partial}{\partial x} \int_y^0 uv dy \right\} \quad (55)$$

ここに, オーバーバーは波周期平均を表す.

式 (28) の水位, 式 (17), (18) の流速成分を用いて, 式 (55) は次のように書き換えられる.

$$S_{xx} = \rho \left\{ \frac{gA^2}{4} + \frac{1}{2} \int_{-h}^0 (\bar{u}^2 - \bar{v}^2) dy + S_{uv} \right\} \quad (56)$$

ここに,

$$S_{uv} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_d}{\partial x} - \delta S_s \right) \quad (57)$$

$$S_d = \int_{-h}^0 dy \int_y^0 \bar{u} \bar{v} \cos(\varepsilon_u - \varepsilon_v) dy \quad (58)$$

$$S_s = \int_{-h}^0 \bar{u} \bar{v} \cos(\varepsilon_u - \varepsilon_v) dy \quad (59)$$

4. 実験結果との比較

(1) 実験の方法

実験は, 一様勾配の斜面ではなく, 1:2 の斜面を有したリーフ型の模型を用いて行った (中村ら, 1995). これは今回の理論が進行波のみを対象としたものであり, 反射波を含まないことによる. つまり, 波は斜面上端付近で碎波し, 浅い水平の棚の上を伝播する. そして, 水路端の消波装置からの反射波が戻る前に測定を終了することによって, できるだけ進行波の場を確保しようとした

ものである. ただし, 実際には, 斜面による反射が若干あるため完全な進行波のみの場とはいえない. 波の入射側の深いほうの水深 h_1 は 45.0 cm, 浅いほうの水平棚上での水深 h_2 は 12.5 cm である.

実験では, 容量式波高計により水位, レーザードップラー流速計により流速の水平成分と鉛直成分, 水路側面に取り付けた波圧計で圧力を測定した. 流速と圧力の測点は斜面前半分の中央 (測線 A), 斜面中央 (測線 B), 斜面後半分の中央 (測線 C) の 3 鉛直線上で, 繰り返し実験を行うことにより, 鉛直分布が出せるように設定した. 波はすべて規則波で, 周期 T を 1.2, 1.6, 2.0 s の 3 種に変化させ, 斜面への入射波高 H_I は 4~14 cm の範囲で 6 種類に変化させた.

(2) 流速振幅および位相差の鉛直分布

水平床理論と斜面勾配を考慮した理論との大きな違いは, 既に多くの研究者 (たとえば, 中村ら, 1995) によって指摘されているように, 水平と鉛直の速度成分の間の位相差の鉛直方向における変化と水底付近の鉛直速度成分の大きさである.

図 2~4 は, 測線 B での周期 $T=1.6$ s の条件に対する水平流速振幅, 鉛直流速振幅, 水平流速と鉛直流速の位相差の実験値と計算値による鉛直分布を例示したものである. ここに, 実験値は波の進行方向の値を正, その逆方向を負にプロットしてある. また, L_0 は深水波の波長である. 波高は実測値を用いており, その 1/2 を計算における振幅 A として与えている.

計算値は Biesel の理論によるもの (実線), Biesel の理論において式 (23) で与えられる f_3 を無視したもの (破線), 等角写像法によるもの (一点鎖線), 比較のため $\delta=0$ の水平床理論によるもの (点線) の 4 種を示してある. ただし, 鉛直流速成分は f_3 とは無関係であるので, 計算値は 3 種である.

Biesel の理論における f_3 は波数 k , 水深 h , 振幅 A の微分項に相当しているが, 水平流速や鉛直流速の振幅にはほとんど影響しないことが確認できる. これに対し, 位相差においては, 特に水底付近で顕著な違いを示しており, f_3 を考慮すると水平流速と鉛直流速との間に位相差が生じている. ここに, 流速成分には座標系の取り方による正負の関係で π だけ位相差があるが, $\varepsilon_v - \varepsilon_u$ はそれを基準としたものであり, ここでは $\varepsilon_v - \varepsilon_u = 0$ を同位相とみなす.

つまり, Biesel の第一次近似解では, 高次の解を省略しているため, 水底の運動学的境界条件を厳密には満たしていない. 一方, $f_3=0$ とおいた関係は水底において同位相でしかも鉛直流速と水平流速の振幅の比は $\delta=1/2$ に等しく, 水底での運動学的境界条件を完全に満たす結果となる. 近似解としては, 水平流速を評価するのに波

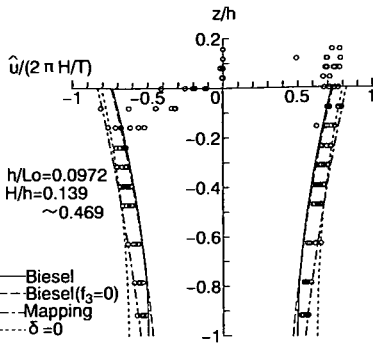


図-2 水平流速成分の最大値と最小値

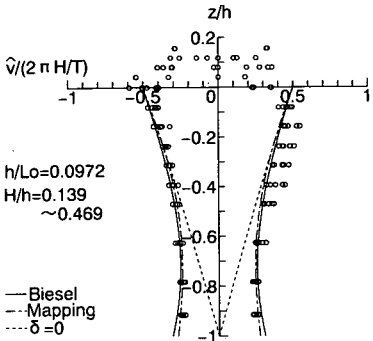
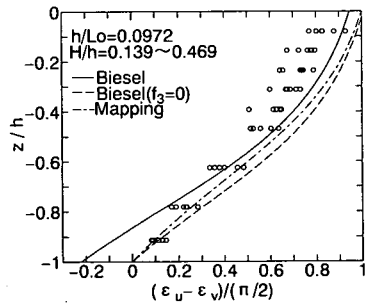


図-3 鉛直流速成分の最大値と最小値

図-4 水平および鉛直流速成分の位相差
(横軸分子は \$\epsilon_v - \epsilon_u\$)

数等を局所的に \$x\$ に無関係として扱うこともあながち無謀なことではないといえる。以下、Biesel の理論は特に断りのない限り、 $f_3=0$ とした結果について言及する。

Biesel の理論と等角写像法による計算値の違いは、水平流速成分の振幅に対しては等角写像法が全体に大きく、鉛直流速成分の振幅に対しては Biesel の理論がやや大きいことである。位相差については、Biesel 理論 ($f_3=0$) がやや大きいという違いもある。ここでは全実験データを示していないけれども、実験値と比較すると、特に水平流速成分の振幅には、周期が短い場合には等角写像

法が実験値に近く、長くなるにつれて等角写像法がばらつきの大きいほうの限界、Biesel の理論が小さいほうの限界に近いという傾向が認められる (Zhao ら, 1996)。位相差については、特に水面近くになるにつれて、違いが大きい傾向にあるが、これは測定の難しさの影響にもよっている。

(3) ラディエーション・ストレス

図-5, 6 に Biesel の理論 ($f_3=0$) と等角写像法によるラディエーション・ストレスの計算結果の例を示している。斜面中央の位置 (測線 B, 水深 $h=28.75$ cm) で、周期 $T=1.6$ s に対するものであり、横軸に波高 H の 2 乗をとっている。図中には、ラディエーション・ストレスの式中の次に示す各項の大きさも示してある。

$$S_{xx1} = \frac{\rho g}{4} A^2, \quad S_{xx2} = \frac{\rho}{2} \int_{-h}^0 \bar{u}^2 dy$$

$$S_{xx3} = -\frac{\rho}{2} \int_{-h}^0 \bar{v}^2 dy, \quad S_{xx4} = \frac{\rho}{2} \frac{\partial S_d}{\partial x}$$

$$S_{xx5} = -\delta \frac{\rho}{2} S_s$$

S_{xx4} の計算法が問題であるが、ここでは微小距離 (0.1

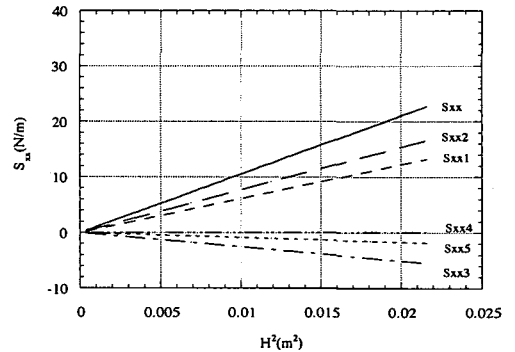


図-5 ラディエーション・ストレス各項の評価 (Biesel の理論)

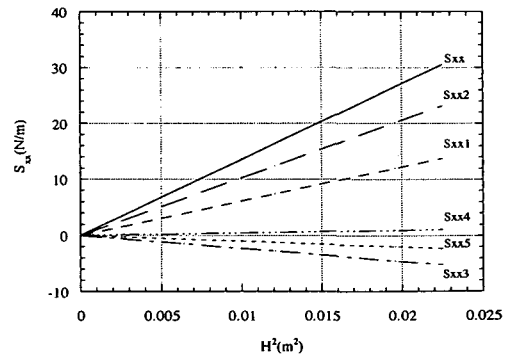


図-6 ラディエーション・ストレス各項の評価 (等角写像法)

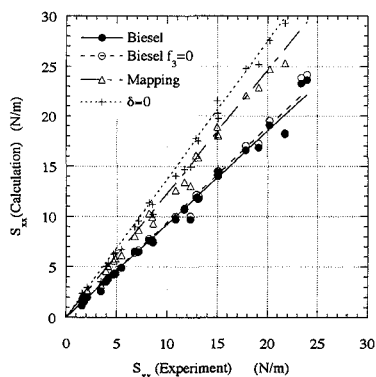


図-7 ラディエーション・ストレスの比較

cm)の間の変化量として数値的に評価した。各項の中で、 S_{xx2} が最も大きく、次いで S_{xx1} が大きい。 S_{xx3} と S_{xx5} は負であり、ラディエーション・ストレスを小さくする効果を持つ。 S_{xx4} の影響は最も小さい。

Bieselの理論と等角写像法を比較すると、ラディエーション・ストレスの値は等角写像法によるものが大きい。これは、主として S_{xx2} の違いによっており、水平流速成分の振幅が大きいためである。

図-7は横軸にラディエーション・ストレスの実験による算出値、縦軸に理論による計算値をとって、比較したものである。実験値は次式によって算出したものである (Karunarathna・Tanimoto, 1996)。

$$S_{xx} = \int_{-h}^{\eta_c} \overline{p_a} dy + \rho \int_{-h}^{\eta_c} \overline{u^2} + \frac{1}{2} \rho g (\overline{\eta^2} - \overline{\eta}^2) \quad \cdots (60)$$

ここに、 η_c は波峰の高さ、 p_a は波圧である。

計算値は水平床理論によるもの ($\delta=0$) も含めて4種の方法によっている。水平床理論によるものは次式のよに通常用いられている式に基づいている。

$$S_{xx} = \frac{\rho g}{8} \left(\frac{1}{2} + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) H^2; \delta=0 \quad \cdots (61)$$

水平床理論による値は既にKarunarathnaらが指摘しているように明らかに実験値より大きく、本実験ケースの場合平均的に1.37倍 (図中の点線) である。一方、Bieselの理論による計算値は $f_3=0$ とした場合平均的に

0.95倍 (図中の破線) で最も適合性がよい。 f_3 を考慮した場合はこれよりやや小さくなっている。等角写像法による計算値は水平床理論よりは小さいものの、この場合平均的に1.23倍 (図中の一点鎖線) と大きい。

4. む す び

以上、Bieselの摂動法による理論とNadaokaらの等角写像法による理論を用いて、急斜面上での微小振幅波の流速分布およびラディエーション・ストレスをそれぞれ実験結果と比較しながら検討した。急斜面上での流速の水平床の場合との大きな違いは水平および鉛直流速成分の位相差および水底付近の鉛直流速成分の大きさであり、非砕波領域においては、理論によってほぼ妥当な結果が得られることが確認できた。また、ラディエーション・ストレスは水平床理論による値の0.73倍程度と小さく、Bieselの理論による算定値が実験値に近いことが明らかとなった。今後、有限振幅性の影響や砕波後の波の場を含めた検討が必要である。なお、本研究の一部は財団法人鹿島学術振興財団研究助成金を得て実施されたものであり、ここに記して謝意を表する。

参 考 文 献

- 中村 茂・Karunarathna, H.・谷本勝利・中村廣昭 (1995): 急斜面上での波による流速場に関する研究, 土木学会第49回年譜概要集, 第2部 (B), pp. 778-779.
- 中村 茂・趙 群・谷本勝利・中村廣昭 (1996): 急斜面上での波による流速場とラディエーション・ストレス, 土木学会第50回年譜概要集 (印刷中)。
- Biesel, F. (1952): Study of wave propagation in water of gradually varying depth, Garvity Waves, pp. 243-253.
- Karunarathna, H. and K. Tanimoto (1996): Long-period water surface fluctuations on a horizontal coastal shelf with a steep seaward face, Coastal Engineering (in press).
- Mei, C. C. (1989): The applied dynamics of ocean surface waves, World Scientific, 740 p.
- Nadaoka K. and M. Hino (1984): Conformal mapping solution of a wave field on the arbitrarily shaped sea bottom, Proc. 19th Conf. Coastal Eng., ASCE, pp. 1192-1208.
- Zhao, Q., S. Nakamura and K. Tanimoto (1996): Distribution of particle velocities due to waves on very steep slope bottom, 10th Congress of APD-IAHR (accepted).