

非線形波動伝播シミュレーションにおける開境界処理の一方法

清川 哲志*・灘岡 和夫**・Serdar Beji***

1. はじめに

近年、各分野で非線形波動の数値シミュレーションが行われているが、その際に生じる実用上の大きな問題の一つが開境界処理である。規則波に対してはそれほど問題がないが、不規則波を対象とする場合、不規則性を考慮して統計的に意味のある結果を得るためには相当長時間の計算を行う必要があり、その場合、通常用いられる放射条件では、タイムステップ数の増加に伴う誤差の蓄積により、計算結果が大きく歪んでくるとい問題がある。大山・灘岡 (1990) はスポンジ境界により、実用的範囲で十分吸収できるとしているが、スポンジ境界を汎用差分コードに組み込むのは煩雑であるし、大規模対象に対する計算時間の著しい増大も大きな問題である。また、スポンジ層でエネルギーが吸収されるため、計算時間が長くなると一種の回折効果で内部の波動場が影響を受けるとい問題点もある。本論文では、これらいずれとも異なる発想に基づく開境界処理法を提案する。開境界とは本来何も境界がない所に解析の都合上設けられるもので、波は実際には自由に伝播しているのに、従来の開境界処理はそこで無理やり減衰させたり、予め与えた波速で強制的に解析領域の外に出したりしており、自然ではない。すなわち、壁などと異なり、開境界は実際には物理的境界ではないにもかかわらず、従来の開境界処理ではそこに物理的境界を適用していたと言える。では、開境界に課せられる条件は？と原点に戻って考えてみると、そこでは内部点と全く同様に基礎方程式系のみを満足していれば必要十分である。波にとって開境界の存在などももちろん認識しえない訳であるから、開境界で課せられる条件は基礎方程式系と等価でなければならない。そうでないと、波は異物の存在を感知し、物理的な反射、あるいは過剰な漏れ(透過)、その他の好ましくない反応を示すことになる。この考えに沿って従来の解析を見直して見ると、上で述べた基本原則を満たしていることがわかる。すなわち、開境界で用いられる放射条件 $\partial u / \partial t$

$\pm c \partial u / \partial x = 0$ (u : 物理量, c : 波速) を考えて見ると、これは波動方程式 $\partial^2 u / \partial t^2 - c^2 \partial^2 u / \partial x^2$ と等価であることが簡単に示される。非定常緩勾配方程式を初めとする連立型の基礎方程式系も流量 (または平均流速) 成分を消去するといずれも波動方程式 (波速の表現はそれぞれ異なるが) となるので、それらの基礎方程式系に開境界で上記の放射条件を課すことは、結局その点で基礎方程式と等価な条件を与えていることになる。以上の議論から、非線形波動方程式にも開境界ではそれと等価な条件を与えればよいはずという結論に到達する。

本論文では、Boussinesq 方程式を具体例として取り上げ、最も単純な場合、すなわち基礎方程式自身を開境界条件とし、一部に Boussinesq 方程式と同クラスの非線形性を有する KdV 方程式を組み込んだ開境界処理法を示す。そして、それを用いて実際に数値計算を行い、提案した開境界処理法の考え方の有効性を示す。

2. 従来の開境界処理法と問題点

従来、開境界処理法として最も広く用いられているのは、開境界において次に示すような放射条件を与え、これを数値解析の中に組み込むものである。

$$f_t + c \cdot f_x = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 f は平均流速、水面変動量等の物理量、 t は時間、 x は空間変数で、 t 、 x 等の添え字はそれぞれの変数による微分を表わす。また、 c は波の位相速度を表わす。

f を差分法によって離散化し、空間方向に $i=1 \sim N$ の格子点、そして時間ステップを k で表わすことにし、格子点 i 、時間ステップ k おける f を f_i^k のように表わすことにする。この時、式 (1) を端点 (=開境界) $i=N$ で離散表示すると次式となる。

$$\frac{f_N^{k+1} - f_N^k}{\Delta t} + c \frac{f_N^k - f_{N-1}^k}{\Delta x} \quad \dots\dots\dots (2)$$

あるいは、Beji & Battjes (1994) のように、空間微分を $i=N$ と $i=N-1$ 、時間微分を $k+1$ と k との平均をとって表わせば、

* 正会員 工博 清水建設(株)和泉研究所 主任研究員
 ** 正会員 工博 東京工業大学大学院情報理工学研究所 教授
 *** Ph.D. イスタンブール工科大学工学部 準教授

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{f_N^{k+1} - f_N^k}{\Delta t} + \frac{f_{N-1}^{k+1} - f_{N-1}^k}{\Delta t} \right\} + \frac{c}{2} \left\{ \frac{f_N^{k+1} - f_{N-1}^{k+1}}{\Delta x} + \frac{f_N^k - f_{N-1}^k}{\Delta x} \right\} = 0 \quad \dots\dots (3)$$

となる。ただし、 Δt は時間刻み、 Δx は格子幅である。

いずれにしても、式 (2) あるいは式 (3) のような端点における離散表現を支配方程式の差分式と組み合わせることによって開境界処理を行っていた。

この処理法と Boussinesq 方程式との組み合わせを例にとってこの処理法の問題点を見ることにする。ここでは、基礎方程式は次の 1 次元の Boussinesq 方程式とする。

$$\begin{cases} u_t + uu_x + g\eta_x = (1/3)h^2 u_{xx} + hh_x u_x \\ \eta_t + [(h+\eta)u]_x = 0 \end{cases} \quad \dots\dots (4)$$

ここに、 u : 水深平均流速、 g : 重力加速度、 η : 平均水面からの水位変動量、 h : 水深である。

これを時間、空間共に中央差分により離散化すると、次のようになる。

$$\begin{cases} \frac{u_i^{k+1} - u_i^{k-1}}{2\Delta t} + u_i^k \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2\Delta x} + g \frac{\eta_{i+1}^k - \eta_{i-1}^k}{2\Delta x} \\ = \frac{1}{3} h_i^2 \frac{(u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}) - (u_{i+1}^{k-1} - 2u_i^{k-1} + u_{i-1}^{k-1})}{2\Delta t (\Delta x)^2} \\ + h_i \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{2\Delta x} \cdot \frac{(u_{i+1}^{k+1} - u_{i-1}^{k+1}) - (u_{i+1}^{k-1} - u_{i-1}^{k-1})}{2\Delta x \cdot 2\Delta t} \\ \frac{\eta_i^{k+1} - \eta_i^{k-1}}{2\Delta t} + \frac{(h_{i+1} + \eta_{i+1}^k)u_{i+1}^k - (h_{i-1} + \eta_{i-1}^k)u_{i-1}^k}{2\Delta x} = 0 \end{cases} \quad \dots\dots (5)$$

式 (5) の第一式で、未知数は u_{i+1}^{k+1} 、 u_i^{k+1} 、 u_{i-1}^{k+1} であり、この係数行列は三重対角行列となるため、既存のアルゴリズムを用いて効率良く計算を行うことができる。また、第二式の未知数は η_i^{k+1} のみであり、陽形式となっているため簡単に求めることができる。以下の計算では、これを初期条件 $t=0$ で $u=\eta=0$ の下に解いている。また、計算格子は一定間隔の単純格子で、各格子点上に上記の未知数を配して計算を行っている。また、収束計算は一切行わず、式 (5) と開境界条件を単純に解いている。

次に、これと式 (3) の開境界条件を用いて図-1 に示すような斜面上を伝播する波のシミュレーションを行ってみる。この問題を取り上げたのには、特別な意味があるわけではないが、波が線形から非線形へと移行するた

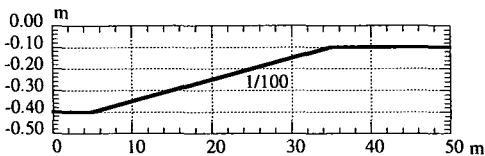


図-1 波の伝播計算のための地形

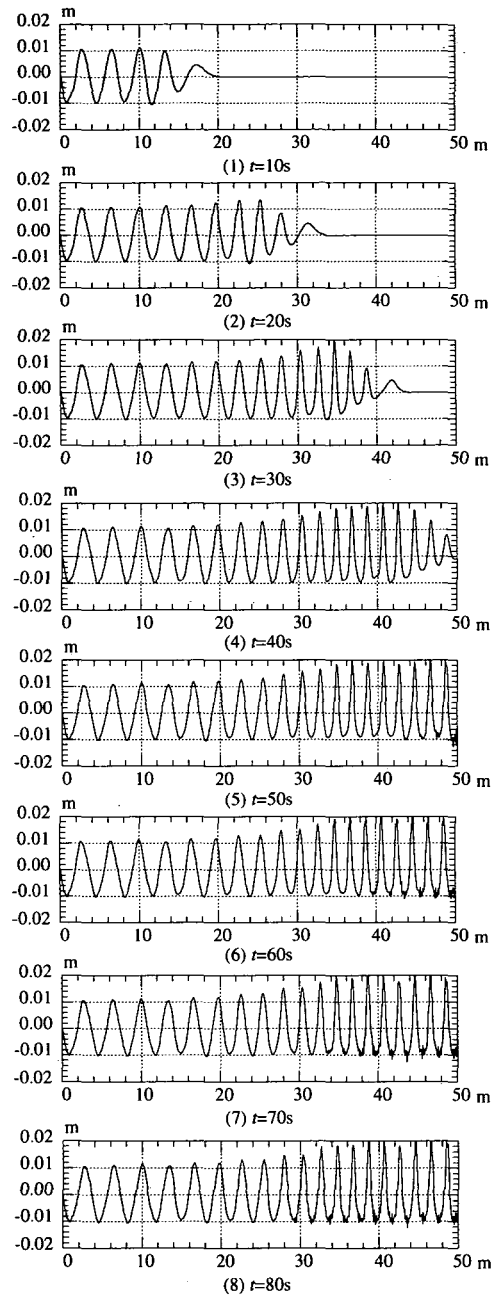


図-2 斜面上を伝播する波の空間波形

め、比較的一般性があると思われるためである。図-2 に波が伝播していく様子を 10 秒ごとに示す。左端が造波境界で、ここで振幅 1 cm、周期 2 秒の規則波を発生させている。右端は開境界で、ここで式 (3) を適用している。なお、この計算では格子間隔を 10 cm とし、時間刻みを 0.05 秒としている。

波は伝播に伴い斜面上で上下非対称な非線形波となっ

ており、それが右端の開境界に達した後もそのまま開境界から抜けているが、時間の経過に伴って右端から発生した乱れが左端へ向かって伝播していくことがわかる。

図-3は60秒の時の右端付近の波形を拡大して示したものであるが、開境界で発生した乱れが既に左方向に伝播しているのがわかる。そして、この乱れは時間の経過に伴って図-2に示したように計算領域全体に広がってゆく。規則波を対象とした計算であれば、この計算の場合、50秒でほぼ定常に達しており、これを最終結果として採用すれば問題がないが、不規則波を対象とする長時間のシミュレーションは不可能であることがわかる。実際に、この後計算を続行すると図-4に示したように大きく波形が乱れ、この後すぐに発散した。

3. 新しい開境界処理法

(1) 基本的な考え方

提案する開境界処理法の基本的な考え方は、まえがきでも述べたとおり、開境界で特別な物理的境界条件を強制するのではなく、基礎方程式自身、あるいはそれと同等な方程式系を適用しようとするものである。最も単純には、基礎方程式そのものを端部でも適用することが考えられる。このためには基礎方程式中の空間的な微係数を端部で正確に評価する必要がある。端部における微係数を評価する差分式としては後退差分があり、次のように表わされる。

$$f_x = \frac{f_N - f_{N-1}}{\Delta x}, \quad f_{xx} = \frac{f_N - 2f_{N-1} + f_{N-2}}{(\Delta x)^2} \quad \dots\dots (6)$$

実際、式(2)あるいは式(3)で用いられているの

もこの後退差分である。しかし、この後退差分による評価は、内部点に対する中央差分による評価と一致しない。このため基礎方程式中の微係数を単純に後退差分に置き換えただけでは計算はうまくいかない。端部における微係数の高精度な評価、すなわち、内部点における中央差分と同程度の精度で行える差分式が必要である。次に端部における微係数の高精度差分式について述べる。

(2) 端部における微係数の評価

本研究で用いた端部における微係数の評価法は、テイラー展開による外挿を用いたものである。例えば、1階微分値を求めるためには次の関係を用いる。

$$f_x(a + \Delta x) = f_x(a) + f_{xx}(a)\Delta x \quad \dots\dots\dots (7)$$

したがって、端部 $i=N$ では、

$$f_x(N) = f_x(N-1) + f_{xx}(N-1)\Delta x \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 $f_x(N)$ 等は格子点 $i=N$ における関数値を表わす。

式(8)における $f_x(N-1)$, $f_{xx}(N-1)$ 等を中央差分で評価すれば、

$$\begin{aligned} f_x(N) &= \frac{f(N) - f(N-2)}{2\Delta x} \\ &\quad + \frac{f(N) - 2f(N-1) + f(N-2)}{(\Delta x)^2} \Delta x \\ &= \frac{3f(N) - 4f(N-1) + f(N-2)}{2\Delta x} \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

同様に、端部における2階微分値は、

$$f_{xx}(N) = f_{xx}(N-1) + f_{xxx}(N-1)\Delta x \quad \dots\dots\dots (10)$$

より、次式によって求められる。

$$\begin{aligned} f_{xx}(N) &= \frac{2f(N) - 5f(N-1) + 4f(N-2) - f(N-3)}{(\Delta x)^2} \\ &\quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

式(9)および式(11)による微係数の値を後退差分(6)と比較したのが図-5および図-6である。これらは先に示した数値計算で、格子点 $i=200$ 、したがって左端より20mの位置で、それぞれの評価式で得られた結果をプロットしたものである。周期的に変化するので安定している1周期分の時間変化を示した。図中点線は式(9)および式(11)、破線は式(6)、実線は式(5)の中で用いられている中央差分による計算値である。 u_x および u_{xx} のいずれも提案式による方が中央差分による値に近いことがわかる。特に u_{xx} の場合、後退差分(6)では位相がちょうど1メッシュ分ずれるので誤差の蓄積が大きくなると考えられる(式からわかるように、後退差分式(6)による $i=N$ における u_{xx} の値は、中央差分による $i=N-1$ における値と同じになる)。ここでは、一例

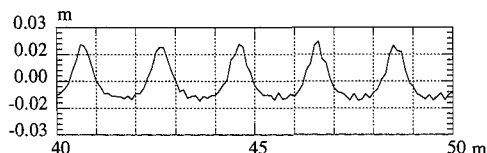
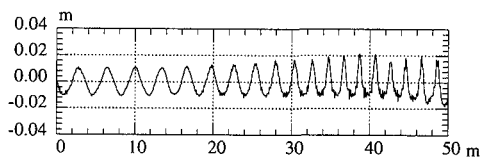
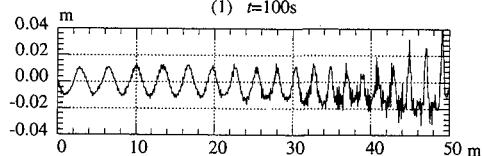


図-3 右端開境界付近での波形 ($t=60$ s)

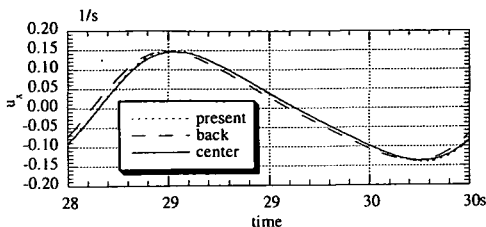
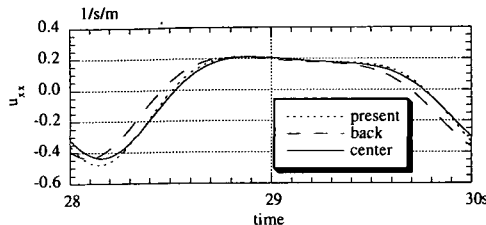


(1) $t=100$ s



(2) $t=120$ s

図-4 発散に至る強い乱れ(数値誤差)の発生

図-5 各差分評価式による u_x の比較図-6 各差分評価式による u_{xx} の比較

を示したのみであるが、格子間隔、波の条件を変えた他の計算例でも同様の結果が得られた。これより、端部における微係数の評価には、式(9)および式(11)等を用いることにより内部点の評価式とほぼ同程度の精度が得られることがわかった。

(3) 開境界における評価式と試験計算

端部における微係数の評価式として式(9)および式(11)等を用いることによって開境界における基礎方程式の差分式が得られる。Boussinesq 方程式、KdV 方程式、Beji・Nadaoka 方程式(1995)等いずれも同様に差分化することができ(さらに高階な微係数も同じ考え方で求められる)、開境界ではこれらを適当に組み合わせること波を透過させることができる。

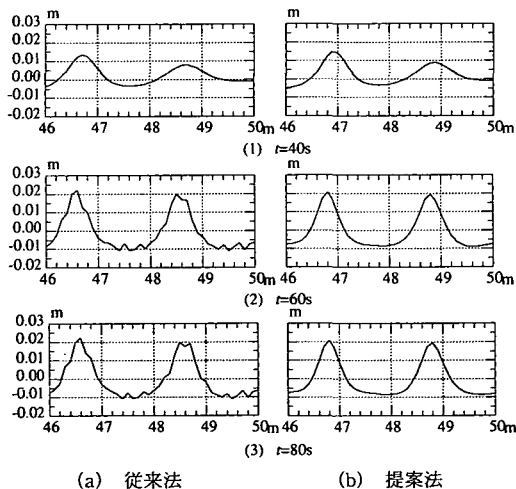
ここでは、式(4)で示される Boussinesq 方程式を例にとって端部での離散化式を示す。まず最も単純には、式(4)における空間微分を式(9)および式(11)を使って評価するだけでよい。ただし、右辺の u_{xt} の時間微分を中央差分をとって $k+1$ ステップと $k-1$ ステップの差から求めると、式(11)からわかるように $k+1$ ステップにおける未知数が、 u_N^{k+1} , $u_N^{k+1/2}$, $u_N^{k+1/2}$, $u_N^{k+1/2}$ の4個となり、三重対角行列としてのメリットがなくなってしまうため、 k ステップと $k-1$ ステップの差を用いて評価する。この方法による計算結果は、従来の方法よりはよいものの、タイムステップが増え、やはり誤差が蓄積し、不規則波計算には耐えられなかった(6千ステップで全体的に水位が低下)。そこで端部では、式(4)の第2式に代えて Boussinesq 方程式の1方向バージョンである KdV 方程式を変形したものを用いるとよい結果が得られた。結果を示すと以下のようである。

$$\begin{cases} \frac{u_N^{k+1} - u_N^{k-1}}{2\Delta t} + u_N^k u_x^k(N) + g\eta_x^k(N) \\ = \frac{1}{3} h_N^2 \frac{u_{xxx}^k(N) - u_{xxx}^{k-1}(N)}{\Delta t} \\ \frac{\eta_N^{k+1} - \eta_N^{k-1}}{2\Delta t} + C_0 \eta_x(N) + \frac{3C_0}{2h} \eta_N^k \eta_x^k(N) \\ + \frac{C_0 h_N^2}{6g} \cdot \frac{(u_x^{k+1}(N) - 2u_x^k(N) + u_x^{k-1}(N))}{(\Delta t)^2} = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 C_0 は長波の波速 ($=\sqrt{gh}$)、 $u_x^k(N)$, $\eta_x^k(N)$, $u_{xxx}^k(N)$ 等は式の煩雑さを避けるための表現で、式(9)あるいは式(11)で f を u , η 等とし、対応する時間ステップの値を代入して得られる。また、開境界では海底勾配が0と仮定している ($h_x=0$)。

式(12)からわかるように、端部では直接この式によって境界値が与えられる。次にこれを用いた試験計算結果について述べる。計算対象としたのは、やはり図-1に示した斜面上を伝播する波で、計算条件等は前の例と同じである。図-7に Beji & Battjes (1994) による式(3)を用いた計算結果と、式(12)を用いた計算結果の比較を示す。まだ波が開境界 ($x=50$ m) に達していない40秒までは両者にそれほど顕著な違いは見られなかったが、図からわかるように、波が開境界に到達し、そこから抜けるようになると従来法による計算結果は、誤差により波形がかなり乱れていることがわかる。これに対し、式(12)を用いた計算結果は比較的整ったクノイド波となっており、提案法の有効性が確かめられたと言えよう。

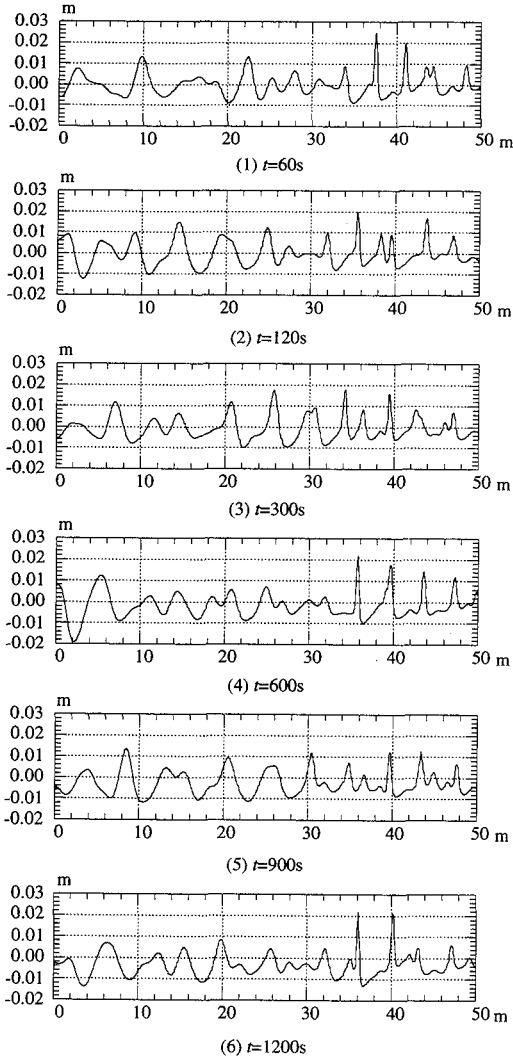
図-8は有義波周期 $T_{1/3}=3$ s、有義波高 $H_{1/3}=2$ cm のブレードシュナイダー・光型型スペクトルを有する不規則波を図-1の地形に入力した場合の計算結果を図中に示した各時刻ごとに示したものである。この計算例の場合、格子間隔 $\Delta x=5$ cm、時間刻み $\Delta t=0.01$ s としてい



(a) 従来法

(b) 提案法

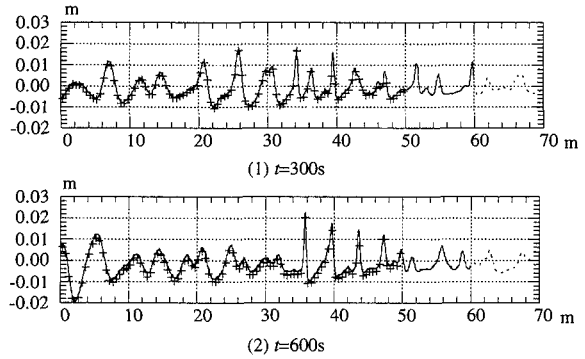
図-7 開境界処理法の違いによる波形の比較



図—8 不規則波に対する計算結果 ($T_{1/3}=3\text{ s}$, $H_{1/3}=2\text{ cm}$)

る。また、数値安定性を増すために、一定タイムステップ毎に計算結果に対して重み付き平均をとって平滑化している。この結果、この例の場合、タイムステップが12万ステップでもなお安定して計算された。波数にして約400波であり、この程度波が透過すれば実用上何の問題もないであろう。

図—9は開境界の位置を変えて上と同じ波を入射した場合の計算結果を比較したものである。実線および点線は $x=50\text{ m}$, 70 m , +印は 50 m に開境界を設けた場合の結果で、開境界の位置と無関係によく一致していることがわかる。これらの事実からわかるように、提案法では特別な物理的開境界条件を課することなく、波を透過させることができることが示された。この方法は、何ら特



図—9 開境界の位置を変えた場合の計算値の比較

別な処理(収束計算 etc.)を必要とせず、したがって計算時間の面でも、またプログラム作成の面でも有利である。なお、ここでは Boussinesq 方程式を例にとったが、ここで示した考え方は、他の方程式系にも共通して適用できることは明らかである。

4. 結 語

非線形波動シミュレーションのための簡便な開境界処理法の考え方を示し、簡単な数値計算によりその妥当性を示した。提案した考え方の基本は、開境界においても物理量は基礎方程式系のみによって支配されているということ、その差分式を内部点と同程度の精度で表わすということである。ただし、実際には端部開境界では外部からの情報を必要としないので、Boussinesq に対応して KdV ように、一方向へ伝播する波の方程式を用いる方がよい結果が得られる。なお、本論文では紙数の関係もあり、著者らの考え方の妥当性を簡単な例で確かめた結果のみを記載したが、実用的にはさまざまなバージョンが考えられる。例えば、平面2次元の Boussinesq に対しては KP 方程式、Beji・Nadaoka 方程式 (1995) に対しては、その一方向バージョン等の適用である。これについては、別の機会に述べる所存である。いずれにしても、非線形波動理論による不規則波のシミュレーションが大きく実用に近づいたと言えよう。

参 考 文 献

- 大山 巧・灘岡和夫 (1990): 数値波動水槽における開境界処理のための数値消波フィルターの開発, 海岸工学論文集, 第37巻, pp. 16-20.
- Beji, S. and J. A. Battjes (1994): Numerical simulation of nonlinear wave propagation over a bar, Coastal Engineering, Vol. 23, pp. 1-16.
- Beji, S. and K. Nadaoka (1995): Directional wave simulations by a time dependent nonlinear mild slope equation, Proc. of 2nd Int. Conf. on Mediterranean Coastal Env., MED-COAST 95, pp. 1929-1943.