

非線形分散波理論を用いた数値解析の高精度化の検討

立川 敬士*・後藤 智明**・服部昌太郎***

1. 序 論

波浪変形・津波などの数値計算をおこなう場合、大水深域を伝播する外洋津波が線形長波理論で近似できることは、これまでの数多くの研究によりすでに明らかである。しかし、津波の河川遡上などのように、水深が浅くなり、波長が短くなると、波の非線形性や分散性を考慮しなければならない。そのため、このような場合には、非線形性と分散性を同時に考慮できる非線形分散波理論などを用いることも多くなった。非線形分散波動理論としては、Boussinesq の式、K-dV の式、Mei-LeMéhauté の式、Peregrine の式などがあるが、非線形性の強い波が高周波数変動成分を含むことや、分散項が高次の微分を含むことから、線形長波理論の適用水域よりも計算格子間隔を小さくしなければならないという問題がある。しかし、現実問題として、計算機の能力の限界もあり、一次元伝播問題に対しての計算例がほとんどであり、2次元平面についての計算例は少ない。非線形分散波理論は現在使用頻度が高いにも関わらず、分散性の精度が悪いという問題もある。支配方程式の理論分散性についての研究は行われてはいるものの、数値分散性の精度をあげる研究例は、まだ少ない。ただし、近年灘岡(1995)が複数の方程式を、条件によって使い分ける方法で理論分散性の精度を向上させることに成功しているが、断面流速分布を初めから固定して計算をさせるため、潜堤背後の流速場のような乱れた分布を持つ領域への拡張が困難である。佐山ら(1987)は線形長波方程式に数値分散効果を取り入れた高精度計算法を提案しており、有効性を確かめている。しかし、物理的な分散効果の問題などもあり、未だ検討の必要性を残している。

本研究では、非線形分散波に含まれる波数分散項に計算手法の数値分散性の効果を加えることにより計算結果の数値分散性を小さく抑え、既存の支配方程式よりも精度が高く、適用範囲も広い、非線形分散波動理論式の高精度化について検討するとともに、Stokes の分散関係を

満たす数値計算モデルを開発することを目的とする。

2. 支配方程式の理論分散性

2.1 既存の方程式の理論分散性

現在広く使用されている非線形分散波動理論式として、K-dV、Boussinesq、Peregrine、Mei-LeMéhauté の式などがある。それぞれの方程式の理論分散性を再確認するため、それぞれの方程式の線形化された方程式の、見かけの分散関係について検討する。

1) 線形 K-dV 式

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{6} c_0 k^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 η : 水位、 h : 静水深、 c_0 : 線形長波の波速である。

式(1)に $\eta = \sin k(x - ct)$ を代入し、Taylor 展開すると式(2)が導かれる。

$$\left(\frac{c}{c_0}\right)^2 = \left[1 - \frac{1}{6}(kh)^2\right]^2 = 1 - \frac{1}{3}(kh)^2 + \frac{1}{36}(kh)^4 \quad \dots\dots\dots (2)$$

2) 線形 Boussinesq の式

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + gh \cdot \frac{k^2}{3} \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} \quad \dots\dots\dots (3)$$

1)と同様に式(3)を誘導すると、式(4)が導かれる。

$$\left(\frac{c}{c_0}\right)^2 = 1 - \frac{1}{3}(kh)^2 \quad \dots\dots\dots (4)$$

3) 線形 Peregrine の式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\eta) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

(5)に $\eta = \sin k(x - ct)$ 、 $u = u_0 \sin k(x - ct)$ を代入すると、(6)が導かれる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{c}{c_0}\right)^2 &= \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{3}(kh)^2\right]} \\ &= 1 - \frac{1}{3}(kh)^2 + \frac{1}{9}(kh)^4 - \frac{1}{27}(kh)^6 + \dots\dots\dots \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (6)$$

* 正会員 工修 (株)日本工営

** 正会員 工博 東海大学教授 工学部土木工学科

*** 正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科

4) 線形 Mei-LeMehaute の式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \\ \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{h^2}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

3) と同様に (7) を誘導すると (8) が導かれる.

$$\begin{aligned} \left(\frac{c}{c_0} \right)^2 &= \frac{1 + \frac{1}{6}(kh)^2}{1 + \frac{1}{2}(kh)^2} \\ &= 1 - \frac{1}{3}(kh)^2 + \frac{1}{6}(kh)^4 - \frac{1}{12}(kh)^6 + \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

これらの式の分散性を定量的に評価するために Stokes の分散関係式

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \dots\dots\dots (9)$$

と比較した結果を図-1 に示す.

図-1 より, 他の方程式よりも使用頻度が高いにも関わらず, 線形 Peregrine の式の理論分散性が他の方程式の理論分散性に比べて大きいことが確認できる. しかも実際に数値計算をおこなうと, 数値計算結果にはさらに, 計算手法の数値分散性も含まれるため, 誤差としてはさらに大きいものとなる. したがって, この程度の誤差であっても無視することはできず, 検討を必要とする. そこで本研究では, Peregrine の式を基礎方程式とし, 以下のように検討をおこなう.

2.2 方程式の理論分散性

ADI 法の数値分散性は, クーラン数に依存することは著者の一人の研究 (1986) によりすでに確認されている. したがって, クーラン数の影響を含む数値分散項の効果を支配方程式の波数分散項に取り入れることによって, 計算手法に含まれる誤差を小さく抑えることができ, その結果として, 計算結果の誤差は小さくなることが推測できる.

佐山ら (1987) は, Leap-Frog 差分式の第一微分方程

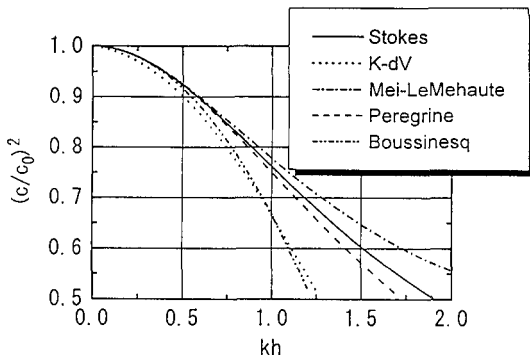


図-1 線形分散波の理論分散性

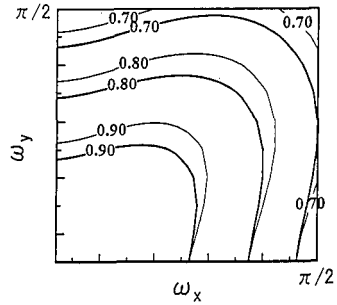


図-2 ADI 法 (太字) と Leap-Frog 法 (細字) の数値分散性の比較

式近似が, Leap-Frog 法を用いた線形長波方程式の数値計算の打ち切り誤差の第 1 次近似を表すことを用いて, 高精度計算法を提案している. 本研究の対象手法は ADI 法であるが, ADI 法と Leap-Frog 法とは同様の数値分散傾向を示すことはすでに確認できている (図-2). 図-2 は伝播方向における数値分散性を示したもので, 軸は $\omega_x = k_x \Delta x / 2$, $\omega_y = k_y \Delta y / 2$ であり, k_x , k_y は x , y 方向の波数, Δx , Δy は x , y 方向の空間格子点間隔である. また, 図中の数字が小さいほど数値分散性が小さいことを示している.

したがって, 佐山らと同様に, ADI 差分式の第一微分方程式近似の項を方程式に取り入れる方法について検討する. さらにその式に含まれる係数を変化させることによって, 計算手法の数値分散性を最も小さく抑え, 数値計算結果の精度向上のための最適値を決定する.

その高精度計算を定式化したものが, 式 (10)~(12) である.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M^2}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{MN}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left[h^2 \left\{ a + b \cdot \frac{\Delta x^2}{h^2} (1 - K_x^2) \right\} \frac{\partial^2 M}{\partial t \partial x} \right. \\ \left. + h^2 \left\{ c + d \cdot \frac{\Delta x^2}{h^2} K_x^2 \right\} \frac{\partial^2 N}{\partial t \partial y} \right] \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{MN}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{N^2}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ = \frac{\partial}{\partial y} \left[h^2 \left\{ e + f \cdot \frac{\Delta y^2}{h^2} (1 - K_y^2) \right\} \frac{\partial^2 N}{\partial t \partial y} \right. \\ \left. + h^2 \left\{ i + j \cdot \frac{\Delta y^2}{h^2} K_y^2 \right\} \frac{\partial^2 M}{\partial t \partial x} \right] \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

連続式: (10), x 方向の運動方程式: (11), y 方向の運動方程式: (12)

ここで, M , N : x , y 方向の線流量, $D (= h + \eta)$: 全水深, Δx , Δy : x , y 方向の空間格子点間隔, $K_x (= c_0 \Delta t / \Delta x)$,

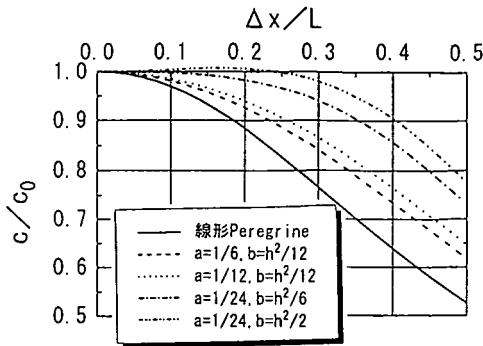


図-3 係数変化による理論分散性の違い

$K_x (=c_0 \Delta t / \Delta y)$: x, y 方向のクーラン数, a, b, c, d, e, f, i, j は係数である。

式 (10)～(12) の理論分散性を検討するため, 線形化し, 一次元伝播問題について, 第 1 節と同様に Taylor 展開により誘導し, 波速について整理すると, 式 (13) のような関係式が導かれる。

$$\left(\frac{c}{c_0}\right)^2 = \frac{1}{1 + \left\{a + b \cdot \frac{\Delta x^2}{h^2}\right\} (kh)^2} \quad \dots\dots\dots (13)$$

式 (13) で, $b=0$ とすると, 計算手法の数値分散性の影響は考慮されなくなり, 波数分散項の影響のみとなる。ここで $a=1/3$ とすると, 線形 Peregrine の方程式の理論分散性に帰着する。

Peregrine の式の理論分散性は波数分散項によるものであり, 分散性の大きさはその係数によるものであるから, ここで再度 Peregrine の式の波数分散項の係数 (1/3) の正当性について検討する必要がある。

この式 (13) の係数 a, b を変化させたことによる理論分散性の違いを図-3 に示す。

図-3 より, 理論分散性は数値分散項の係数よりも波数分散項の係数 a に強く依存し, Peregrine の式の波数分散項の係数を小さくすると, 理論分散性は小さくなることが分かる。

3. 数値解析の数値分散性

数値計算手法の数値分散性はフーリエ級数を利用した厳密解を用いる方法と, 差分方程式を Taylor 級数展開することにより得られる疑似差分方程式から求められる近似解を用いる方法で評価できる。厳密解を用いる方法は, 非線形問題への拡張は困難であるが, 解析解を導く過程で近似を一切使用しないため, 数学的には厳密な議論が可能となる。一方, 近似解を用いる方法は物理的なイメージを持ちやすく非線形問題への応用が容易であるが, あくまでも近似的なものとなる。

本研究では, 式 (10)～(12) の数値分散性を厳密に評価するために, 線形化してフーリエ級数解を求める。

水位 η , 線流量 M, N の差分解は格子点上だけで定義されている有限かつ離散的なものである。したがってそのフーリエ級数展開としては, 式 (14) を考えればよい。

$$\begin{bmatrix} M_{j,l}^n \\ N_{j,l}^n \\ \eta_{j,l}^n \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{l=0}^{L-1} \begin{bmatrix} \tilde{M}_{a,\beta}^n \\ \tilde{N}_{a,\beta}^n \\ \tilde{\eta}_{a,\beta}^n \end{bmatrix} e^{ik_x j \Delta x} e^{ik_y l \Delta y} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここで, $j=0, 1, 2, \dots, J/2, l=0, 1, 2, \dots, L/2$ である。

右辺の M, N, η は有限フーリエ係数であり, 時間のみの関数である。また, J, L は x, y 方向の格子点総数を意味する。

式 (14) を差分式に代入して整理すると,

$$\tilde{\eta}^{n+3/2} + (-2 + 4R_x + 4R_y) \tilde{\eta}^{n+1/2} + \tilde{\eta}^{n-1/2} = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

なる時間の常差分方程式が得られる。

ここで

$$R_x = K_x^2 \cdot \sin^2 \omega_x, \quad R_y = K_y^2 \cdot \sin^2 \omega_y$$

$$K_x = c_0 \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad K_y = c_0 \cdot \frac{\Delta t}{\Delta y}, \quad \omega_x = \frac{k_x \cdot \Delta x}{2}, \quad \omega_y = \frac{k_y \cdot \Delta y}{2}$$

である。

さらに波速について整理すると, 式 (16) を得る。

$$\frac{c}{c_0} = \frac{\cos^{-1} \left\{ \frac{2 - A - 2B}{2(1+B)} \right\}}{2[(\omega_x K_x)^2 + (\omega_y K_y)^2]^{1/2}} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで,

$$A = 4R_x \left[1 - h^2 \left\{ a - b \cdot \frac{\Delta x^2}{h^2} (1 - K_x^2) \right\} \frac{\sin^2 \omega_x}{\Delta x^2} - h^2 \left\{ i + j \cdot \frac{\Delta y^2}{h^2} \right\} \frac{\sin^2 \omega_y}{\Delta y^2} \right]$$

$$B = 4R_y \left[1 - h^2 \left\{ e - f \cdot \frac{\Delta y^2}{h^2} (1 - K_y^2) \right\} \frac{\sin^2 \omega_y}{\Delta y^2} - h^2 \left\{ c + d \cdot \frac{\Delta x^2}{h^2} \right\} \frac{\sin^2 \omega_x}{\Delta x^2} \right]$$

式 (16) において, $a=c=e=i=1/3, b=d=f=j=0$ とすると, 線形 Peregrine の方程式の数値計算結果そのものに帰着する。

ここで, 係数の値を変化させ, その影響について検討する。その結果の一例を図-4 に示す。図-4 の軸は図-2 と同じである。この図より, 係数を変化させることにより, 明らかに数値分散性が抑えられることが確認できる。また, 数値分散性は水深よりもクーラン数に強く依存している。これらの結果より, 分散項の係数を変化させることにより, 物理的な意味あいを失うことなく計算手法の数値分散性を打ち消すことが可能であることが確認で

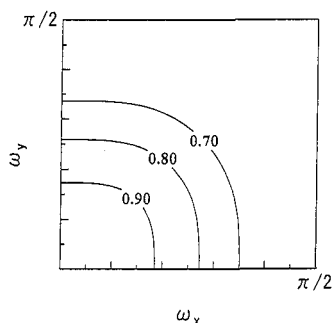
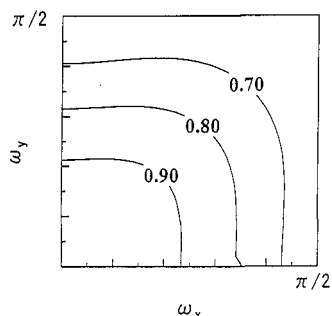
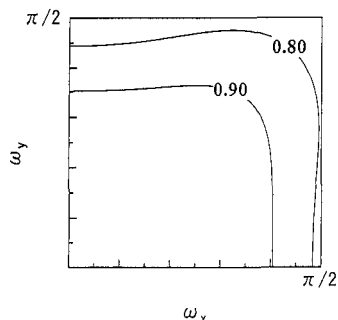
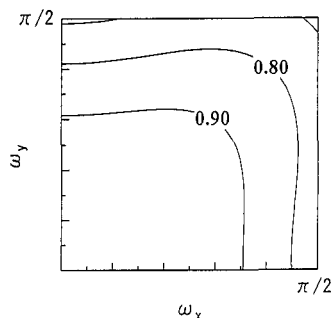
(a) $a=c=e=g=1/3, b=d=0, f=h=0$ (b) $a=c=e=g=1/6, b=d=1/12, f=h=1/12$ (c) $a=c=e=g=1/24, b=d=1/3, f=h=1/3$ (d) $a=c=e=g=1/24, b=d=1/6, f=h=1/6$

図-4 係数変化による数値分散性の違い

きる。

4. 既存の方程式との比較

第2章, 第3章の結果より, 理論分散性は水深に, 数値分散性はクーラン数に強く依存することが確認できる。計算結果には, 理論分散性, 数値分散性がともに含まれる。したがって, 計算結果をストークスの分散関係に近づけるためには両方の分散性の影響を考慮して係数を決定していく必要がある。

図-5は係数を変化させた結果のうち現段階で最適値と考えられる例 ($a=1/4$) (以後式Aとする) と, Peregrineの式の分散性の比較を, ストークス波の分散関係を基準として表したものである。

式Aの方が, Peregrineの方程式よりも明らかに分散性が小さくなり, ストークス波の分散関係式に近づいていることが分かる。

図-6はPeregrineの式と, ケースAの式を用いた場合のADI差分の計算結果を比較したものである。この結果より明らかに, 式Aを用いた数値計算結果の方がPeregrineの式を用いた計算結果よりも理論値(ストークス波)に近い波形, 及び最大水位を示していることが確認できる。

式Aの計算結果は, 主峰背後に多少の分散波の存在が認められるが, 津波計算で最も必要とされている最大水位については, 理論値の96%程度も評価しており, 既存の非線形分散波のうち最も使用頻度が高いと考えられるPeregrineの式が, 最大波高の88%程度しか評価できていないことから, 十分有意義な結果を得ることができたといえる。

図-6はPeregrineの式と, ケースAの式を用いた場合のADI差分の計算結果を比較したものである。この結果より明らかに, 式Aを用いた数値計算結果の方がPeregrineの式を用いた計算結果よりも理論値(ストークス波)に近い波形, 及び最大水位を示していることが確認できる。

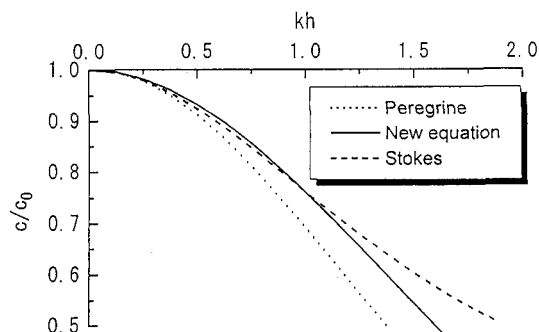


図-5 式AとPeregrineの式の分散性の比較

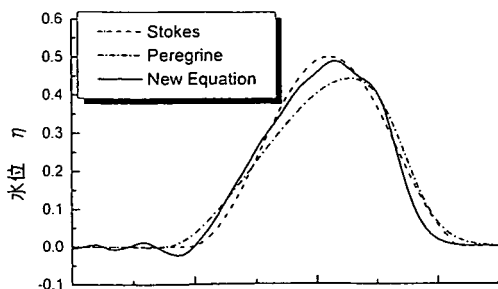


図-6 式 A と Peregrine の式の計算結果の比較

式 A の計算結果は、主峰背後に多少の分散波の存在が認められるが、津波計算で最も必要とされている最大水位については、理論値の 96% 程度も評価しており、既存の非線形分散波のうち最も使用頻度が高いと考えられる Peregrine の式が、最大波高の 88% 程度しか評価できていないことから、十分有意義な結果を得ることができたといえる。

5. 本研究で得られた主な結論

本研究で得られた主要な結果を以下に示す。

1. 支配方程式の理論分散性は水深に強く依存し、計算手法の数値分散性はクーラン数に強く依存する。
2. 既存の支配方程式の波数分散項に数値分散効果を考

慮することにより、物理的な意味あいを失うことなく、既存の支配方程式よりもストークスの分散関係式により近い計算結果を得ることができた。

謝辞：本研究でのデータ整理等において、当時東海大学工学部土木工学科の学生であった原、安田両君と、中央大学理工学部土木工学科の学生であった山田君の協力にここで謝意を表す。

参 考 文 献

- 今村文彦, 後藤智明 (1986): 差分法による津波数値計算の打ち切り誤差, 土木学会論文集, 第 375 号/II-6.
- 後藤智明 (1985): 非線形分散波の数値計算, 海岸工学講演会論文集.
- 佐山順二, 今村文彦, 後藤智明, 首藤伸夫 (1987): 外洋域における津波の高精度計算法に関する検討, 海岸工学講演会.
- 澁岡和夫 (1995): 最近の非線形分散波動理論の新展開, 水工学に関する夏期研修会講義集 B コース, B-3.
- Boussinesq, M. J. (1877): Essai Sur la theorie des eaux courantes, Hemo. Acad. Science, 2eme Ser, Tome 23, No. 1.
- Korteweg, D. j. and G. De Vries (1895): On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, Phil. Mag., Vol. 39.
- Mei, c. c. and B. LeMéhauté (1966): Note on a equations of long waves over an uneven bottom, J. Geophys. Res., Vol. 71.
- Peregrine, D. H. (1967): Long waves on a beach, J. F. M., Vol. 27, Part 4.