

グリーンの公式を用いた静穏度解析における 種々の境界条件について

浜 中 建 一 郎*

1. はじめに

水深が一定で、任意形状をした港湾内の静穏度解析について考える。今、自由水面の境界条件を線形化し得ると仮定すると、鉛直方向に波動関数を仮定することにより問題は平面 2 次元のヘルムホルツ方程式を解くことに帰着する。この方程式を解くには種々の方法が考えられるが、グリーンの公式を用いた境界要素法が簡便である。この方法では、適当な特異関数（主要解又はグリーン関数）を用いて積分方程式を導き、境界を微小要素で離散化し、最終的には微小要素上の未知数に対する連立線形方程式を解くことに問題を帰着させる。その時、境界上のポテンシャルとその法線微分との関係を知る必要がある。例えば完全反射境界では法線微分が零である（これにより境界上の未知数がポテンシャルだけとなる）。しかしながら、実際の港ではこのほかに開境界（開放境界）、入射境界、部分反射境界等も考える必要がある。

これまで開境界を含めた部分反射条件としては、Isaacson (1990) や、Chou (1993) 等の研究に見られるように、境界に対する直角入射の条件式が準用されてきた。しかしながらこの条件式では反射率が入射角に依存し、たとえ、ある入射角に対し最適な係数を与えたとしても、異なった方向から複数の波が入射する場合には使えない。例えば、直角入射で無反射条件を与えた境界に波が平行に進行した場合反射率は 1 になる。

このことから本研究では、始めに波の向きや個数、平面波か円筒波かによらない開境界条件式を提案し、次に、入射境界、部分反射境界に対する境界条件を提案する。又、いくつかの計算例によりその妥当性を示す。

2. 基礎方程式とグリーンの公式

2.1 基礎方程式

非圧縮、非粘性、非回転を仮定する。今、波動場が時間的に周期的であるとする、その速度ポテンシャルは、

$$\phi = \text{Re}\{\hat{\phi}e^{-i\omega t}\}; \omega \text{ は角周波数} \dots\dots\dots (1)$$

全ての変数を ω と重力加速度 g とで無次元化する。

$$(x, y, z) = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})\omega^2/g, t = \omega\hat{t}, \bar{\phi} = \hat{\phi}\omega^3/g^2 \text{ etc.} \dots\dots\dots (2)$$

ここで記号 $\hat{}$ は有次元量を表す。

速度ポテンシャルは 3 次元ラプラス方程式で支配され、底面 $z = -h$ と自由水面 $z = 0$ での境界条件と共に、

$$\left. \begin{aligned} \partial^2 \bar{\phi} / \partial x^2 + \partial^2 \bar{\phi} / \partial y^2 + \partial^2 \bar{\phi} / \partial z^2 &= 0 \\ \partial \bar{\phi} / \partial z &= 0 \quad \text{on } z = -h \\ \partial \bar{\phi} / \partial z &= \bar{\phi} \quad \text{on } z = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

のようになる。さらに、

$$\bar{\phi} = \phi(x, y)Z(z), Z(z) = \cosh k(z+h) \dots\dots\dots (4)$$

を用いると、変数分離によりヘルムホルツ方程式を得る。

$$\Delta \phi + k^2 \phi = 0 \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 $\Delta \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$, $k \tanh kh = 1$

2.2 グリーンの公式と積分方程式

速度ポテンシャルと適当な関数 G に 2 階微分可能性を仮定すると、ヘルムホルツ作用素に対して以下のグリーンの公式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_V \{ \phi(\Delta G + k^2 G) - G(\Delta \phi + k^2 \phi) \} dv \\ = \int_S \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

ここで V は考えている領域で、 ν は境界 S 上の法線ベクトルを表す。(6) 式から積分方程式を導くには関数 G に (x_0, y_0) を特異点とする以下の特異性を仮定する。

$$\Delta G + k^2 G = \alpha \delta(x - x_0, y - y_0) \dots\dots\dots (7)$$

ここで α は定数で δ はデルタ関数である。

(5) 式と (7) 式を用い (6) 式は以下のように表される。

$$\alpha \phi(x_0, y_0) = \int_S \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds \dots\dots\dots (8)$$

(8) 式が積分方程式である。関数 G はヘルムホルツ方程式の主要解と呼ばれ第 1 種のハンケル関数が良く用いられる。その場合、定数 α は以下の値をとる。

$$\alpha = 4i: \text{領域内}, \alpha = 2i: \text{境界上}$$

他方、ある特定の問題において放射条件を満たす遠方境界がある場合にはそこでの境界条件を満たすと言う意味で第 1 種のハンケル関数はグリーン関数とも言える。

3. 境界条件

3.1 完全反射境界

波がその境界で完全反射する場合は良く知られているように法線微分は零で以下となる。

$$\partial\phi/\partial\nu=0\cdots\cdots\cdots(9)$$

3.2 開 境 界

波が領域内から外に境界を自由に通過し再び戻ってこない場合、その境界を開境界と呼ぶ。

開境界に対する境界条件を与えるために、図-1の
ように開境界 BC の外側に半無限領域を考え、外領域
(outer region) と呼ぶ。それに対し問題としている領域
を内領域 (inner region) と呼ぶ。

外領域に対し開境界から充分遠方に半円状に境界をとり、外領域は S_0 と S_1 で、内領域は S_0 と S で囲まれているとする。

今、(8)式をこの外領域に適用する。特異関数としては(10)式の第1種ハンケル関数を用いる。

$$G=H_0^{(1)}(kr), \quad r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \dots\dots (10)$$

特異点 P を開境界上の (x_0, y_0) に位置させると, (8) 式は以下になる。

$$2i\phi(P) = \int_{S_0 + S_1} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu'} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu'} \right) ds \quad \dots\dots\dots (11)$$

ただし、 ν は外領域から内領域への法線ベクトルである。
特異点 P は直線 AD 上にあるから、

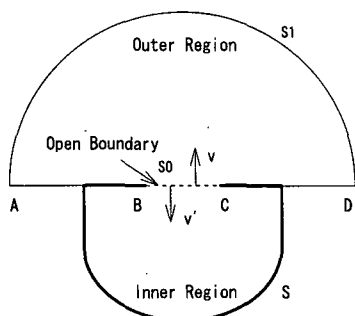
$$\partial G/\partial \nu' = 0 \quad \text{on } AD$$

$$\partial\phi/\partial\nu'=0 \quad \text{on } AB \text{ and } CD$$

さらに関数 G とポテンシャル ϕ は遠方境界 AED で放射条件を満たすとする、(11)式の積分領域は開境界上だけとなり、

$$2i\phi(P) = \int_{s_0} -G \frac{\partial \phi}{\partial \psi'} ds = \int_{s_0} G \frac{\partial \phi}{\partial \psi} ds \quad \dots\dots\dots (12)$$

となる。この (12) 式が内領域の開境界に対する境界条件となる。この境界条件は開境界を通過する波の波長や



圖一-1 開境界概念圖

波向き、及び通過する波の数に依存しないばかりでなく平面波でも円筒波でも成立する。

3.3 入射境界

領域内に入射する波の条件を与える境界を入射境界と呼ぶ。一般に入射した波は領域内の他の境界や構造物で反射しその一部は再びこの入射境界に戻ってき、自由に外に通過しなければならない。その意味で、この波に対し開境界条件(12)式が適用される。

3.4 部分反射境界

消波岸壁等の消波構造物では波のエネルギー散逸させるがその一部は反射させる。そのような境界を部分反射境界と呼ぶ。

部分反射境界に対する境界条件を導くために図—1と同様、境界の外側に外領域を考える。領域内からこの境界に近づく波のポテンシャルを ϕ_r 、そこから部分反射するそれを ϕ_R とする。境界上のポテンシャル ϕ はその二つで表される

$$\phi = \phi_T + \phi_R, \quad \partial\phi/\partial\nu = \partial\phi_T/\partial\nu + \partial\phi_R/\partial\nu \quad \dots\dots (13)$$

部分反射の条件に対する基本的考えは、この ϕ_T に対し開境界条件 (12) 式を適用すると同時に、反射率により ϕ_T に関係づけられた ϕ_R を与えることである。

今、仮に完全反射するとすると、

$$\phi_R = \phi_T, \quad \partial\phi_R/\partial\nu = -\partial\phi_T/\partial\nu$$

であるから、反射率 R の場合は

$$\phi_R = R\phi_T, \quad \partial\phi_R/\sigma\nu = -R\partial\phi_T/\partial\nu \dots\dots\dots (14)$$

である。従って、

$$\phi_T = \phi / (1 + R) \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\partial\phi_T/\partial\nu=(\partial\phi/\partial\nu)/(1-R) \dots\dots\dots (16)$$

が成立する。(15) 式と (16) 式を (12) 式に適用すると、境界上のポテンシャルに対し

$$\frac{2i}{1+R}\phi(P)=\int_{s_0}\frac{G}{1-R}\frac{\partial\phi}{\partial\nu}ds \quad \dots\dots\dots(17)$$

が得られる。これが部分反射境界条件である。ここで S_0 は部分反射境界を表す。

4. 開口部上のポテンシャル

この節では開口部上のポテンシャルとその法線微分に開境界条件を適用することにより簡単な表現が得られることを示す。

始めに図-1の様に一つの開口部を持った領域を考える。特異点を開口部に位置させ、(8)式を適用させると、

$$2i\phi(P) = \int_{s_0} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds + \int_s \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds \dots\dots\dots (18)$$

右辺第2項を、 $I_s(p)$ で表し

$$I_s(P) = \int_s \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds \dots\dots\dots (19)$$

とし、 S_0 上で $\partial G/\partial \nu=0$ であることを考慮すると、

$$2i\phi(P) = -\int_{S_0} G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} ds + I_S(P) \quad \dots\dots\dots (20)$$

となる。今開口部に開境界条件(12)式を適用し(20)式に加えると、以下の簡単な表現が得られる。

$$4i\phi(P) = I_S(P) \quad \dots\dots\dots (21)$$

(21)式は開口部のポテンシャルは境界 S 上の積分だけで表されることを意味する。

次に簡単な場合を例にとり $I_S(P)$ を具体的に考える。図-1の内領域を外領域と同様半無限領域とする。すなわち無限領域が、直線上にある開口部とふたつの直線壁によりふたつに仕切られている。今内領域にも開口部から充分遠方に半円状の境界を考えると、(19)式の積分境界 S は直線壁と遠方境界となる。直線壁上では

$$\partial \phi / \partial \nu = \partial G / \partial \nu = 0$$

であるから、(19)式は遠方境界上の積分だけで決まる。

一方内領域で境界に近づく波は直線壁で完全反射するがその一部は開口部を通して外領域で回折波をつくる。この開口部で反射しないことは内領域の入射波波動場に影響を与えるが、その影響は回折波と同様の性質を持つことが期待されることからここでは負の回折波と呼ぶ。この負の回折波は通常的回折波と同様、遠方境界で放射条件を満たすと考えられるから(19)式の積分には寄与しない。従ってこの場合、 $I_S(P)$ は遠方境界上での入射波と完全反射波だけで決定される。すなわち、 $I_S(P)$ は開口部がない場合と同じ値をとることとなり(18)式あるいは(20)式で右辺第1項を無視した時と同じである。この時、(18)式、又は(20)の左辺の $\phi(P)$ は完全反射波動場の壁面上のポテンシャルとなりそれによって $I_S(P)$ は決まる。今、入射波 ϕ_I と反射波を ϕ_R を

$$\phi_I = e^{i(lx+mv)}, \quad \phi_R = e^{i(lx-mv)}; \quad k=(l, m) \quad \dots\dots\dots (22)$$

とすると、反射壁上 $P(x_0, 0)$ でポテンシャルは

$$\phi(P) = \phi_I(P) + \phi_R(P) = 2e^{ilx_0} \quad \dots\dots\dots (23)$$

となり、(18)式、又は(20)式から

$$I_S(P) = 4ie^{ilx_0} \quad \dots\dots\dots (24)$$

となる。従って開口部がある場合の開口部のポテンシャルは(21)式から

$$\phi(P) = e^{ilx_0} \quad \dots\dots\dots (25)$$

となり、開口部のポテンシャルは入射波のそれと一致する。一方、開口部のポテンシャルの法線微分は入射波のそれと一致する保証はないから開境界条件(12)式により決定されなければならない。

5. 離散化と計算結果

この節では、いくつかの計算結果により3節で述べた各種境界条件の妥当性を示す。特異関数としては第1種ハンケル関数、必要に応じ対称ハンケル関数を用いる。境界を微小要素で離散化し、(8)式を以下のように近似する。

$$2i\phi_i = \sum_j \left(\phi_j \bar{E}_{i,j} - E_{i,j} \frac{\partial}{\partial \nu} \phi_j \right) \quad \dots\dots\dots (26)$$

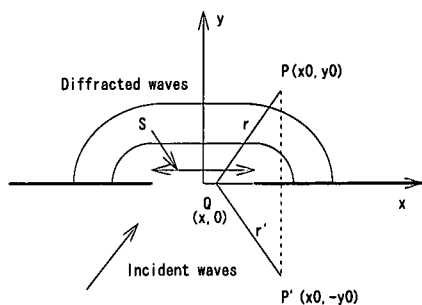


図-2 座標系

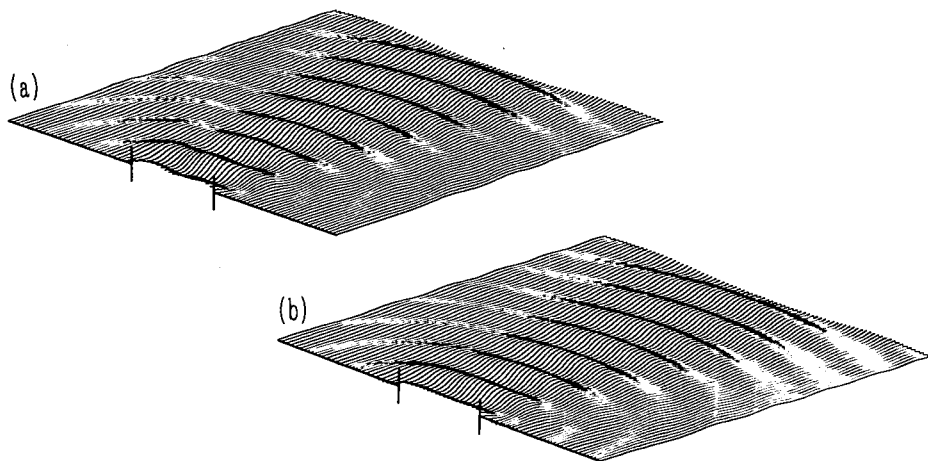


図-3 回折波 (a) 入射波の法線微分を使用 (b) 開境界条件による法線微分を使用

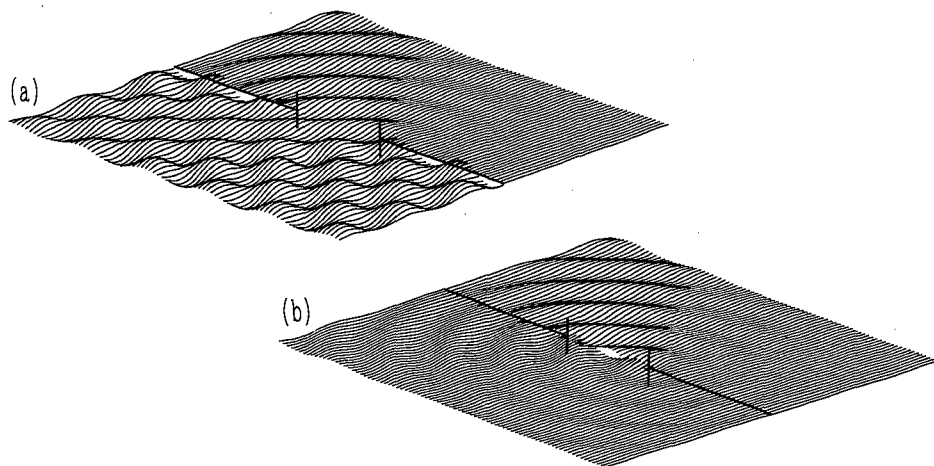


図-4 回折と反射

ここで $i \neq j$ で

$$E_{i,j} = \int_{\Delta S_j} G ds = G(x_j, y_j; x_i, y_i) \Delta S_j$$

$$\bar{E}_{i,j} = \int_{\Delta S_j} \frac{\partial G}{\partial \nu} ds = \frac{\partial}{\partial \nu} G(x_j, y_j; x_i, y_i) \Delta S_j$$

$i = j$ (ハンケル関数に対し)

$$E_{i,i} = \Delta S_i + \frac{2i}{\pi} \Delta S_i \left(\log \frac{k \Delta S_i}{4} - 1 + \gamma \right)$$

$$\bar{E}_{i,i} = 0 \quad ; \gamma \text{ はオイラー定数}$$

対称ハンケル関数 (27) を用いる時はその対称部分を上式に加える。

完全反射境界を除き、他の境界上ではポテンシャルだけでなくその法線微分も未知数であるから、3節で述べた境界条件を離散化し (26) 式に連立させる。

最初に図-2 の様な回折波を考える。

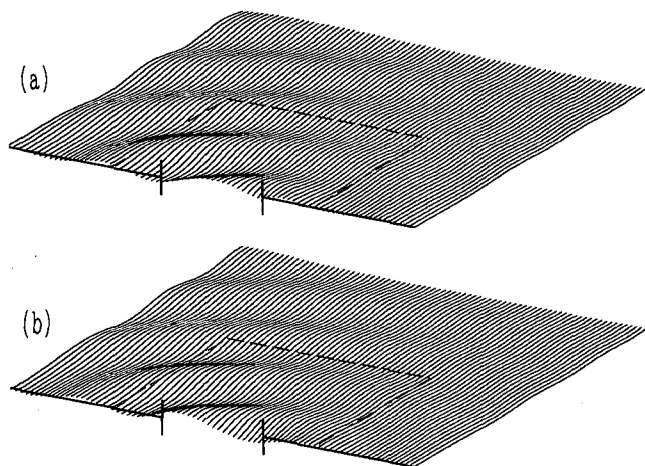


図-5 円筒波

今、特異関数として (27) 式の対称ハンケル関数を用いると (8) 式の積分は開口部だけとなる。

$$G = H_0^{(1)}(kr) + H_0^{(1)}(kr'); \quad r = \overline{PQ}, \quad r' = \overline{P'Q} \quad \dots (27)$$

図-3 は直角入射の回折波のポテンシャルの計算例で、(a) は開口部で入射波のポテンシャルとその法線微分を与えて求めたもので、(b) は開境界条件 (12) で求めた法線微分を用いている。波形 η はポテンシャルを用いて、

$$\eta = -\partial \Phi / \partial t \quad \dots (28)$$

と表されるから、これらの図は水面波形と見ても良い。

(a) では開口部で波形が歪んでいるのに対し、(b) では

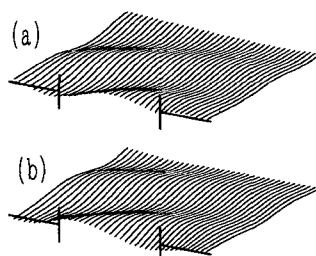


図-6 開境界

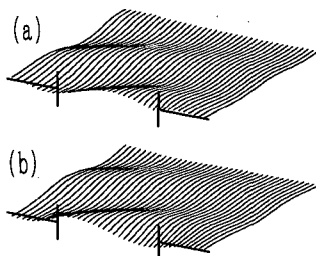


図-7 図-5 の一部

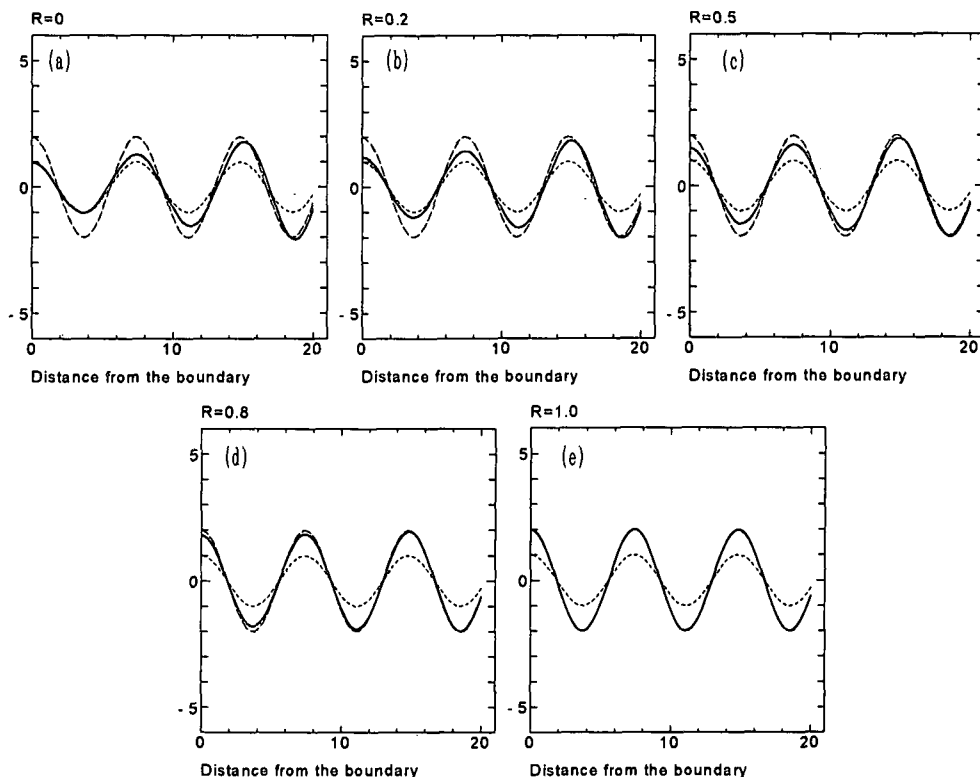


図-8 部分反射 (反射率 (a) 0.0 (b) 0.2 (c) 0.5 (d) 0.8 (e) 1.0)

実験で確かめられる様に平らとなっており、(12)式の妥当性が確かめられる。

図-4は回折と反射の計算例で開口部に対し右手45度から入射している。回折波領域と入反射領域とは別個に求めたが滑らかに接続している。(b)の下半分は入反射領域から完全反射した場合の入反射波を除いた負の回折波を示している。4節で述べたように通常の回折波と同様の波形を示している。図-5, 6, 7は開境界条件の妥当性をより具体的に示したものである。図-5は検証に用いた右手45度から入射した回折波で(a)は実部を(b)は虚部を示している。次に図中の破線で示した3つの境界を開境界として図-5と同じ入射波のもとで解いたのが図-6である。図-7は図-6と同じ領域を図-5から切り取った図で両図は良好な一致を示しており開境界条件の妥当性を示している。

図-8は図-4の開口部を部分反射境界としたとき、開口部中心を通る直線上の反射波領域でのポテンシャルで開口部からの距離を横軸にして示している。太線は部分反射波、点線は入射波、破線は完全反射波のポテンシャルをそれぞれ示している。(a)から(e)は部分反射率 R を0.0, 0.2, 0.5, 0.8, 1.0としたものである。開口部でのポテンシャルは $R=0.0$ の時入射波のそれと一致し、

反射率が増加するに従い増加し、 $R=1.0$ の時は完全反射波のそれと一致している。又、いずれの場合も開口部から離れるに従って部分反射波のポテンシャルは完全反射波のそれに近づいている。これは開口部の影響が開口部から離れるに従って小さくなることによる。以上の結果は部分反射波の物理的性質を良く表しており、3節で述べた部分反射境界条件の妥当性を示している。

6. 結 論

グリーンの公式を用いて、港の静穏度解析をする場合に必要となる種々の境界条件について述べた。特に開境界、入射境界、部分反射境界について境界条件式を新たに提案した。これらの内、開境界と部分反射境界についてはいくつかの計算例によりその妥当性を示した。

参 考 文 献

- Chou, C. R. and W. Y. Han (1993): Wave induced oscillations in harbours with dissipating quays, Coastal Eng. Japan, Vol. 36, No. 1, pp. 1-23.
- Isaacson, M. and S. Qu (1990): Wave in a harbour with partially reflecting boundaries, Coastal Eng., Vol. 14, pp. 193-214.