

Boussinesq 方程式による浮体の非線形動揺解析法

喜 岡 渉*・平 岡 慎 司**・山 根 聡***

1. はじめに

非線形流体力による浮体の応答を精度良く予測しておくことは係留浮体、特に緩係留方式の係留ラインの設計上重要であることから、その応答計算法として強非線形ポテンシャルモデルに基づく時間領域での解法がいくつか提案されている(例えば中村・田中, 1993)。しかし強非線形モデルの場合、不規則波動場での入射条件の与え方や開境界の処理方法に問題が残されており、計算効率の点からも非線形不規則波に対して確立された動揺計算法とはなっていない。最近、Ng・Isaacson (1993) は Stokes 型の摂動展開に基づく時間領域での解法を開発し、規則波に対して具体的に浮体の動揺量を求めて解析法の有用性を示している。弱非線形ポテンシャルモデルに基づく彼らの計算法では、入射波の成分波間の非線形干渉を考慮した入射波条件を比較的容易に与えてやることができ、また計算アルゴリズムも強非線形のものとは比べて簡略化できるので、不規則波動場の応答計算に十分適用できるものと考えられるが、Stokes 型の近似解であるために浅海域での応答計算には基本的に適用することができない。

本研究は、Boussinesq 方程式に基づき浅海における浮体の非線形動揺の効率的な計算法を開発しようとするものである。具体的には、まず固定浮体による波変形の解析に用いた Boussinesq 方程式(喜岡・平岡, 1994)に対し、2次元浮体の動揺計算に必要な3つの運動モード、すなわち Sway, Heave および Roll 運動を基礎式に組み込むことで方程式をさらに拡張し、Radiation 問題の解析法を示した。次いで、係留浮体の振動方程式と組み合わせ浮体の動揺量を具体的に求めて、浮体の動揺解析に対する Boussinesq 方程式の有用性を示した。

2. 基礎方程式

図1に示すように、空間固定の座標系 Oxz のほかに浮体重心 G を原点とし浮体に固定された座標系 $G\bar{x}\bar{z}$ を

とる。浮体運動が平衡状態にあるとき、この2つの座標系は平行である。いま浮体の2次元運動を考えると、浮体の動揺は点 G の $\bar{x}$ 軸方向の並進運動 Sway X_1 と $\bar{z}$ 軸方向の並進運動 Heave X_2 、および $\bar{y}$ 軸まわりの回転運動 Roll X_3 によって記述される。

水深を h で一定とし、渦なし流れを仮定すると、浮体下の領域における基礎方程式と境界条件は速度ポテンシャル $\phi(x, z, t)$ を用いて次の各式で与えられる。すなわち、 ϕ は流体場全体においてラプラス方程式

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

を満足し、浮体の動揺により変化する没水表面 S_w 上における運動学的境界条件

$$\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = V_n \quad (\text{on } S_w) \quad \dots\dots\dots (2)$$

と水底における不透過の境界条件

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (z = -h) \quad \dots\dots\dots (3)$$

を満足する関数として定義される。ここで $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial z)$, $\mathbf{n}$ は没水表面 S_w 上に立てた流体場から外向の単位法線ベクトル、 V_n は S_w の法線方向速度を表す。

式(2)の法線方向速度 V_n は浮体運動のベクトル $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ と $\mathbf{n}$ により座標系 $G\bar{x}\bar{z}$ を用いて次式のように表される。

$$V_n = \dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{n} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ただし、上付き・は時間微分を示し、 $\mathbf{X}$, $\mathbf{n}$ はそれぞれ次の各式で表される。

$$\mathbf{X} = [X_1 + \bar{x}(\cos X_3 - 1) + \bar{z} \sin X_3, X_2 - \bar{x} \sin X_3 + \bar{z}(\cos X_3 - 1)] \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\mathbf{n} = (\bar{n}_x \cos X_3 + \bar{n}_z \sin X_3, -\bar{n}_x \sin X_3 + \bar{n}_z \cos X_3) \quad \dots\dots\dots (6)$$

また、浮体の没水表面 S_w に働く圧力 p は次式により与

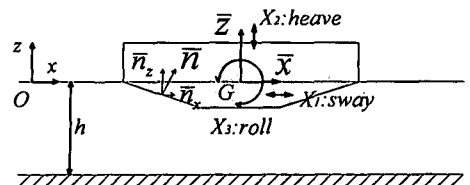


図1 座標系と記号の定義

* 正 会 員 Ph.D. 名古屋工業大学教授 工学部社会開発工学科
 ** 正 会 員 工 修 (株)大成建設
 *** 学生会員 名古屋工業大学大学院工学研究科

えられる。

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho |\nabla \Phi|^2 - \rho g z \quad (\text{on } S_w) \cdots (7)$$

浮体の没水表面 S_w で定義される境界条件式 (2) および圧力式 (7) は, S_w が浮体の運動とともに変動するので, このままの形では数値解析の際にも取り扱い難い。そこで, Ng・Isaacson (1993) にならって平衡状態にある固定浮体の没水表面 S_0 まわりについてテイラー展開を行い, 浮体に固定された座標系 $G\bar{x}\bar{z}$ および S_0 上で次式のように与えることとする。

$$[\nabla \Phi + X \cdot \nabla (\nabla \Phi) + \cdots] \cdot \mathbf{n} = V_n \quad (\text{on } S_0) \cdots (8)$$

$$(p)_{S_w} = (p + X \cdot \nabla p + \cdots)_{S_0} \cdots (9)$$

3. 浮体下の Boussinesq 方程式

基礎式に対する Boussinesq 方程式を導くために, 入射波と発散波の代表振幅を A , 入射波の代表角周波数を ω , 代表水深を h として, 次の 2 つの無次元パラメータを導入する。

$$\varepsilon = \frac{A}{h}, \quad \mu^2 = \frac{\omega^2 h}{g} \cdots (10)$$

変数については次式のように無次元量を定義する。

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{\omega}{\sqrt{gh}} x, \quad \bar{x}' = \frac{\omega}{\sqrt{gh}} \bar{x}, \quad z' = \frac{z}{h}, \quad \bar{z}' = \frac{\bar{z}}{h} \\ t' &= \omega t, \quad \Phi' = \frac{\omega}{Ag} \Phi, \quad p' = \frac{p}{\rho gh}, \quad X_1' = \frac{\omega}{\sqrt{gh}} X_1, \\ X_2' &= \frac{X_2}{h}, \quad X_3' = \frac{X_3}{\mu} \end{aligned} \right\} \cdots (11)$$

ここに, ダッシュ付き変数が無次元量である。

式 (5) および (6) 中の $\sin X_3$, $\cos X_3$ を $O(X_3^3)$ より高次を無視してそれぞれ $\sin X_3 = X_3 + X_3^3/6$, $\cos X_3 = 1 - X_3^2/2$ と表した上で, 式 (2) および (7) をそれぞれ式 (8), (9) のように展開して表すと次の無次元方程式を得る。なお, 以下では表示を簡潔にするためにダッシュは省略する。

$$\begin{aligned} \nabla \Phi \cdot \bar{\mathbf{n}} &= \frac{\bar{n}_x}{\varepsilon} \left[\dot{X}_1 + \mu^2 \bar{z} \dot{X}_3 - \mu^2 X_2 X_3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \mu^2 \dot{X}_1 X_3^2 + \frac{1}{6} \mu^4 \dot{X}_2 X_3^3 \right] \\ &\quad + \frac{\bar{n}_z}{\varepsilon} \left[\mu^2 \dot{X}_2 - \mu^2 \bar{x} \dot{X}_3 + \mu^2 \dot{X}_1 X_3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \mu^4 \dot{X}_2 X_3^2 - \frac{1}{6} \mu^4 \dot{X}_1 X_3^3 \right] \\ &\quad - (\bar{n}_x + \mu^2 X_3 \bar{n}_z) \left[(X_1 + \mu^2 X_3 \bar{z}) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{x}^2} \right. \\ &\quad \left. + (X_2 - X_3 \bar{x}) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{x} \partial \bar{z}} \right] - (\bar{n}_z - X_3 \bar{n}_x) \\ &\quad \cdot \left[(X_1 + \mu^2 X_3 \bar{z}) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{x} \partial \bar{z}} + (X_2 - X_3 \bar{x}) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{z}^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{2} \mu^2 X_3^2 \bar{n}_z \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}} + (\bar{x} + X_1) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{x}^2} \right] \\ &(\text{on } S_0) \cdots (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{p}{\varepsilon} &= \frac{\bar{p}}{\varepsilon} - \left(X_1 + \mu^2 \bar{z} X_3 - \frac{1}{2} \mu^2 X_3^2 \bar{x} - \frac{1}{6} \mu^4 X_3^3 \bar{z} \right) \\ &\cdot \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{x} \partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\varepsilon \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \frac{\varepsilon}{\mu^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right) \right] \\ &- \left(X_2 - \bar{x} X_3 + \frac{1}{6} \mu^2 X_3^3 \bar{x} - \frac{1}{2} \mu^2 X_3^2 \bar{z} \right) \\ &\cdot \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{z} \partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\varepsilon \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \frac{\varepsilon}{\mu^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right) + \frac{1}{\varepsilon} \right] \\ &(\text{on } S_0) \cdots (13) \end{aligned}$$

ただし, $\bar{p}$ は固定浮体の没水表面上での圧力を示し, 次式により与えられる。

$$\frac{\bar{p}}{\varepsilon} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \frac{1}{\mu^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right] - \frac{\bar{z}}{\varepsilon} \quad (\text{on } S_0) \cdots (14)$$

式 (12) の右辺第 3 項以降および式 (13) の右辺第 2 項以降は浮体の運動にともない発生する項, すなわち式 (8) および (9) のテイラー展開の高次項を示す。

ここで, Φ を次式のように摂動展開して表す。

$$\Phi = \Phi_0 - \frac{\mu^2}{2} (z+1)^2 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} + \frac{\mu^4}{24} (z+1)^4 \frac{\partial^4 \Phi_0}{\partial x^4} + \cdots \cdots (15)$$

上式はラプラス方程式 (1) と水底条件 (3) をすでに満足している。また, 式 (12) により μ については $O(\mu^4)$ まで考慮すれば十分であることがわかる。式 (15) を式 (12) および (13) に代入して, 底面流速 $u_0 = \partial \Phi_0 / \partial \bar{x}$ と水深平均流速 u の関係式

$$u_0 = u + \frac{\mu^2}{6} (1 + \bar{z})^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2} + O(\mu^4) \cdots (16)$$

を用いてに u に関する式に書き換えた後, $O(\varepsilon)$ および $O(\mu^2)$ までの項を残すと結局, 次式を得る。

$$\begin{aligned} &\left[u - \frac{\mu^2 (1 + \bar{z})^2}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2} \right] \bar{n}_z - \left[\mu^2 (1 + \bar{z}) \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} \right] \bar{n}_z \\ &= -\frac{\bar{n}_x}{\varepsilon} \left[\dot{X}_1 + \mu^2 \bar{z} \dot{X}_3 - \mu^2 \dot{X}_2 X_3 - \frac{1}{2} \mu^2 \dot{X}_1 X_3^2 + \frac{1}{6} \mu^4 \dot{X}_2 X_3^3 \right] \\ &\quad + \frac{\bar{n}_z}{\varepsilon} \left[\mu^2 \dot{X}_2 - \mu^2 \bar{x} \dot{X}_3 + \mu^2 \dot{X}_1 X_3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \mu^4 \dot{X}_2 X_3^2 - \frac{1}{6} \mu^4 \dot{X}_1 X_3^3 \right] \\ &\quad + \bar{n}_x \left[\frac{\mu^2}{2} X_3^2 u - \left(X_1 + \mu^2 (X_3 \bar{z} + X_3 X_2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{3}{2} X_3^2 \bar{x} - \frac{1}{2} X_3^2 X_1 + \mu^2 (1 + \bar{z}) X_3 \right) \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} \right. \\ &\quad \left. + \mu^2 (1 + \bar{z}) (X_2 - X_3 \bar{x} - X_1 X_3) \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu^2 (1 + \bar{z})^2}{3} X_1 \frac{\partial^3 u}{\partial \bar{x}^3} \right] \end{aligned}$$

$$+n_z\left[-\mu^2 X_3 \bar{u} + \mu^2 (X_2 - X_3 \bar{x} - X_1 X_3) \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} + \mu^2 (1 + \bar{z}) X_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2}\right] \quad (\text{on } S_0) \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{p}{\varepsilon} = & \frac{\bar{p}}{\varepsilon} - X_1 \left[\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{3} \mu^2 (1 + \bar{z})^2 \frac{\partial^3 u}{\partial \bar{x}^2 \partial t} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} \right] \\ & - \left(\mu^2 \bar{z} X_3 - \frac{1}{2} \mu^2 X_3^2 \bar{x} \right) \frac{\partial u}{\partial t} \\ & + (X_2 - \bar{x} X_3) \left[\mu^2 (1 + \bar{z}) \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x} \partial t} - \frac{1}{\varepsilon} \right] \\ & - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{6} \mu^2 X_3^2 \bar{x} - \frac{1}{2} \mu^2 X_3^2 \bar{z} \right) \quad (\text{on } S_0) \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

上式 (18) 中の $\bar{p}$ は式 (14) より次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} - \frac{\mu^2}{3} (1 + \bar{z})^2 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial \bar{x}^2 \partial t} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{x}} \\ + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (\text{on } S_0) \quad \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

以上の式 (17)～(19) が浮体下における Boussinesq 方程式である。この方程式系は波動場における Boussinesq 方程式と同様に、流速 u の定義や時間微分による空間微分の置き換えにより種々の形のもの書き換えることができる。特に、水深平均流速 u に代わって、関係式

$$u_a = u_0 - \frac{\mu^2}{2} (1 + \bar{z}_a)^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \bar{x}^2} + O(\mu^4) \quad \dots\dots\dots (20)$$

を用いて任意水深 $\bar{z}_a$ における流速 u_a で定義し直した式は分散特性を改善し短周期波に対する適用性を向上させると考えられるが (Nwogu, 1993), 得られる方程式系では式 (17) がより煩雑になり計算アルゴリズムも複雑になるのでここでは平均流速 u による方程式系を用いることとした。

式 (18)～(20) は次元量を用いて表すとそれぞれ次の各式のようになる。

$$\begin{aligned} & \left[u - \frac{(h + \bar{z})^2}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2} \right] \bar{n}_x - \left[(h + \bar{z}) \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} \right] \bar{n}_z \\ & = \bar{n}_x \left[\dot{X}_1 + \bar{z} \dot{X}_3 - \dot{X}_2 X_3 - \frac{1}{2} \dot{X}_1 X_3^2 + \frac{1}{6} \dot{X}_2 X_3^3 \right] \\ & + \bar{n}_z \left[\dot{X}_2 - \bar{x} \dot{X}_3 + \dot{X}_1 X_3 - \frac{1}{2} \dot{X}_2 X_3^2 - \frac{1}{6} \dot{X}_1 X_3^3 \right] \\ & + \bar{n}_z \left[\frac{1}{2} X_3^2 u - \left(X_1 + X_3 \bar{z} + X_3 X_2 - \frac{3}{2} X_3^2 \bar{x} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} X_3^2 X_1 + (h + \bar{z}) X_3 \right) \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} \right. \\ & \left. + (h + \bar{z}) (X_2 - X_3 \bar{x} - X_1 X_3) \right. \\ & \left. \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2} + \frac{(h + \bar{z})^2}{3} X_1 \frac{\partial^3 u}{\partial \bar{x}^3} \right] \\ & + \bar{n}_z \left[-X_3 u + (X_2 - X_3 \bar{x} - X_1 X_3) \right. \\ & \left. \cdot \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} + (h + \bar{z}) X_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2} \right] \quad (\text{on } S_0) \quad \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} = & \frac{\bar{p}}{\rho} - X_1 \left[\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{3} (h + \bar{z})^2 \frac{\partial^3 u}{\partial \bar{x}^2 \partial t} + u \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} \right] \\ & - \left(\bar{z} X_3 - \frac{1}{2} X_3^2 \bar{x} \right) \frac{\partial u}{\partial t} \\ & + (X_2 - \bar{x} X_3) \left[(h + \bar{z}) \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x} \partial t} \right] \\ & - g \left(X_2 - \bar{x} X_3 + \frac{1}{6} X_3^2 \bar{x} - \frac{1}{2} X_3^2 \bar{z} \right) \quad (\text{on } S_0) \\ & \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} - \frac{(h + \bar{z})^2}{3} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial \bar{x}^2 \partial t} \right) + g \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = 0 \\ (\text{on } S_0) \quad \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

なお、方程式系 (21)～(23) に対応する波動場の Boussinesq 方程式には水位変動 η と平均流速 u についてのよく知られた次式を用いる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \eta)u] = 0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = 0 \quad \dots\dots\dots (25)$$

4. 浮体の運動方程式

浮体下の Boussinesq 方程式 (21) および (22) 中の浮体の動揺量 X_j ($j=1, 2, 3$) および動揺速度 $\dot{X}_j$ は、時間領域における次の浮体の運動方程式を解くことにより決定される。

$$M_{ij} \ddot{X}_j + K_{ij} X_j = F_i \quad (i=1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots (26)$$

ここに、 M_{ij} は慣性マトリックス、 K_{ij} は浮体の係留による復元力を表すバネ定数マトリックスであり、 F_i は i モード方向への流体力である。上式中の F_i は、波強制力と Radiation 力のほかに静水力学的な復元力も含む全流体力を表す。ただし、ここでは粘性による減衰力は無視している。

全流体力 F_i については、浮体の動揺により変動する没水表面 S_w 上で式 (18) の p を積分することにより得られるが、この場合も数値計算の際に取り扱いやすくするために積分範囲を固定浮体の没水表面 S_0 上に定義し直す必要がある。結果を次元量で表示すると、 x 方向に働く力 F_1 として次式を得る。なお、 z 方向に働く力 F_2 および G 点まわりのモーメント F_3 についてもそれぞれ同様な表示式を得るが、紙面の都合上ここでは省略する (Kioka・Hiraoka, 1995 参照)。

$$\begin{aligned} F_1 = & \int_{S_0} \bar{p} \bar{n}_x ds - \rho g \int_{w_0} \frac{1}{2} \left[\eta^2 + (X_2 - X_3 \bar{x})^2 \right. \\ & \left. - 2\eta (X_2 - X_3 \bar{x}) + 2(X_2 - X_3 \bar{x}) \right. \\ & \left. \cdot \left(\frac{X_3^2}{6} - \frac{X_3^2}{2} \bar{z} \right) - 2\eta \left(\frac{X_3^2}{6} \bar{x} - \frac{X_3^2}{2} \bar{z} \right) \right] \bar{n}_x dw \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \rho g \int_{w_0} \frac{1}{2} [(X_2 - X_3 \bar{x})^2 - 2\eta(X_2 - X_3 \bar{x})] \\
 & \cdot \frac{X_3^2}{2} \bar{n}_x dw - \rho g \int_{s_0} \bar{z} X_3 \bar{n}_z ds - \rho \int_{s_0} X_1 \frac{\partial u}{\partial t} \\
 & \cdot \left(\bar{n}_x + X_3 \bar{n}_z - \frac{X_3^2}{2} \bar{n}_x \right) ds \\
 & + \rho \int_{s_0} X_1 \frac{(h + \bar{z})^2}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial \bar{x}^2 \partial t} \bar{n}_x ds \\
 & - \rho \int_{s_0} X_1 u \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} \bar{n}_x ds \\
 & - \rho \int_{s_0} \left(\bar{z} X_3 - \frac{X_3^2}{2} \bar{x} \right) \frac{\partial u}{\partial t} \bar{n}_x ds \\
 & + \rho \int_{s_0} (h + \bar{z})(X_2 - \bar{x} X_3) \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x} \partial t} \bar{n}_x ds \\
 & - \rho g \int_{s_0} (X_2 - \bar{x} X_3) \left(\bar{n}_x + X_3 \bar{n}_z - \frac{X_3^2}{2} \bar{n}_x \right) ds \\
 & - \rho g \int_{s_0} \left(\frac{X_3^2}{6} \bar{x} - \frac{X_3^2}{2} \bar{z} \right) \bar{n}_x ds \\
 & \dots\dots\dots (27)
 \end{aligned}$$

ここに、 W_0 は水線面で、2次元浮体の場合、静水面と浮体の境界点となる。上式(27)の右辺第2項、第3項および第4項は静水圧および積分範囲の変更にもなう補正項で、第5項以降の各項は浮体の運動によって生じる流体力、すなわち式(22)の右辺第2項以降の各項の寄与分を示す。

5. 数値計算法

浮体下で成り立つ Boussinesq 方程式系(21)～(23)は浮体の平衡位置で固定された座標系を用いて定義されているため、基本的には波動場の Boussinesq 方程式(24)および(25)に対してと同様な計算手法を適用することができる。ここでは、前報(喜岡・平岡, 1994)で固定浮体まわりの波変形の解析に用いた差分法と同様なアルゴリズムにより、各時間ステップにおける波動場の u と η および浮体まわりの u と p を求めた。波動場領域と浮体下領域の境界点における u と p は前報同様に予測・修正法を用いて決定した。なお、解析理論上、浮体の断面形状についての制約はないが、計算に差分法を用いているために、矩形断面のように波動場と浮体の境界点が多価関数となるような浮体形状に対しては本解析法を適用することができない。

得られた浮体まわりの u 、 η および p を数値積分して各時間ステップにおける流体力 F_i を求め、次いで運動方程式(26)を解いて各時間ステップごとの浮体の動揺量 X_j と動揺速度 $\dot{X}_j$ を求めた。流体力の積分には台形公式を、浮体の運動方程式の積分には4次のRunge-Kutta法を用いた。

浮体背後の透過側の開境界(静水中での浮体の Radiation 問題の解析にあたっては両端の開境界)にはスポン

ジ層を配置するとともに、その外側と入射境界では Sommerfeld 型の放射条件を課して透過波と浮体からの反射波については自由透過させた。

6. 計算結果とその考察

(1) Radiation 問題

浮体下の Boussinesq 方程式系(21)～(23)に基づく解析法の妥当性を検証するために、前報(1994)の固定浮体と同様な台形断面の模型浮体(側面勾配5:12、幅55 cm、最大喫水深8.0 cm)を水深 $h=20$ cmの静水中において各運動モードで強制振動させて発散波の解析を行った。浮体の重心は $z=-3.0$ cmである。動揺は周期 T の単振動とし、Sway, Heave 運動の振幅はそれぞれ1 cm、Roll 運動については浮体の両端の変位が1 cmとなるように回転角変位を与えた。

図-2に周期 $T=1.2$ s, 1.5 sおよび2.0 sの Heave を与えたときの発散波の空間波形を示す。図中央の浮体の領域では水位変動 η の代わりに圧力変動 $p/\rho g$ の値をプロットしてある。図の(b)に示した $T=1.5$ sのケースを除いて、発散波は両端の開境界に配置したスポンジ層によりほぼ完全に消波されている。包絡波形には非線形干渉による振幅変調が見られるものの、図中に示した

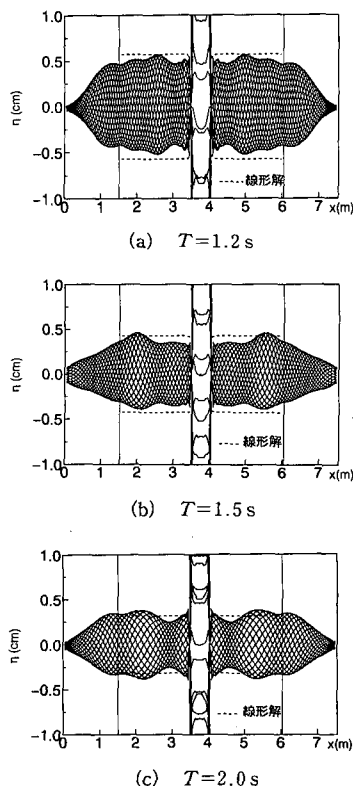
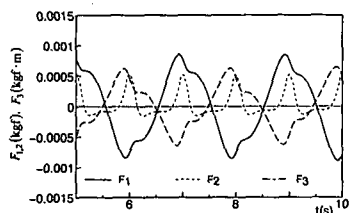
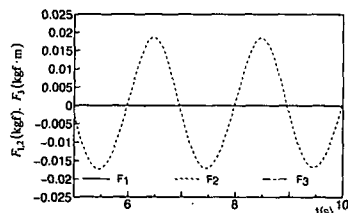


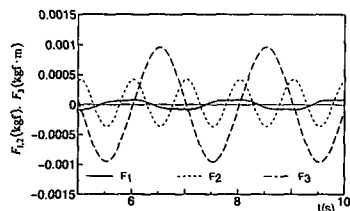
図-2 Heave による発散波



(a) Sway



(b) Heave



(c) Roll

図-3 各運動モードにより生じる流体力

2次元グリーン関数法による線形解と良く一致している。

周期 $T=2.0$ s で各運動モードを与えたときの Radiation 力の計算結果を図-3に示す。この流体力には浮体の有限振幅運動の効果や静水力学的な復元力が含まれているため、線形理論による Radiation 力とは一致しない。Sway および Roll 運動による z 方向の力 F_2 はこの場合 0 とはならず倍周波数の成分を持つ。

(2) 長周期動揺

Radiation 問題の解析に用いた模型浮体を係留し、2成分波を入射させて応答解析を行った。係留バネは Sway, Heave および Roll の各動揺モード方向にそれぞれ $K_{11}=0.11$ kgf/m (1.05 N/m), $K_{22}=0.38$ kgf/m, (3.72 N/m), $K_{33}=1.02$ kgf·m (10.0 N·m) で線形とした。2成分波の周期は $T_1=1.1$ s と $T_2=1.3$ s とし、振幅はともに等しく 1 cm とした。入射波としてはこの2成分波に、波動場の Boussinesq 方程式 (24), (25) から得られる2次の伝達関数を介して周波数差の長周期波

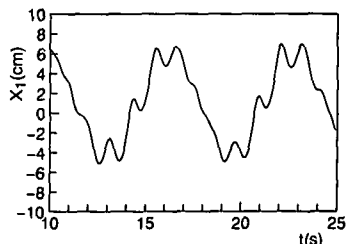


図-4 2成分波による Sway の長周期動揺

η_i を求めて合成したものを用いた。

図-4に Sway 動揺の時間変化を示す。2成分波の平均周期 $T=1.2$ s ではなく長周期波の周期 $T_L=6.5$ s に対応する長周期動揺が卓越している。この長周期動揺の振幅は、入射波周期 T_i の長周期波 η_i に対して2次元グリーン関数法を用いて計算した線形理論値 $X_1=6.10$ cm と比べるといくぶん小さくなっている。

7. おわりに

固定浮体の Diffraction 問題の解析に用いた Boussinesq 方程式をさらに拡張して Radiation 問題の新たな解析法を提案した。さらに、係留浮体の運動方程式を組み込むことにより浮体の長周期動揺を具体的に求めて、浮体の非線形応答解析に対する Boussinesq 方程式法の有用性を示した。用いる Boussinesq 方程式系は項数も多く、いくぶん煩雑であるが、浮体の運動方程式と組み合わせることで平均流速および浮体近傍の水位変動のみにより全流体力が決定されるので、時間領域の浮体の非線形動揺計算法としては効率的な解析法といえよう。

参考文献

- 喜岡 渉・平岡慎司 (1994): Boussinesq 方程式を用いた浮体まわりの波変形の解析, 海岸工学論文集, 第41巻, pp. 981-985.
- 中村孝明・田中良弘 (1993): 係留浮体における長周期動揺に関する一考察, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 886-890.
- Kioka, W. and S. Hiraoka (1995): Numerical modeling of wave interaction with two-dimensional floating bodies in shallow water, Proc. Int'l. Offshore and Polar Eng. Conf., Vol. 3, pp. 492-498.
- Ng, J. Y. T. and M. Isaacson (1993): Second-order wave interaction with two-dimensional floating bodies by a time-domain method, Appl. Ocean Res., Vol. 15, pp. 95-105.
- Nwogu, O. (1993): Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., Vol. 119, pp. 618-638.