

Bayesian 統計理論による防波堤ケーソンの 摩擦係数の推定

中 村 孝 明*・水 谷 守**

1. はじめに

近年確率・統計理論に基づく信頼性評価手法の研究が進み、構造物の安定性の検討や諸部材の設計等に導入されつつある。信頼性理論では、構造物が壊れる（損傷）可能性を積極的に考え、損傷による損失を期待損失（Risk）として定量化する。Risk は定義された損傷の発生確率と損傷に伴う損失の積として評価され、設計検討や補修計画の客観的且つ一元的な情報として利用される。損失は施設の直接復旧費、2 次的な波及被害、或いは復旧までの機能低下による損失等から構成され、損傷の定義に基づき設定される。一方損傷確率については、被災事例の統計的評価や実験、解析に基づく検討が行われている。しかし、サンプル数やモデルの妥当性等の問題が内在している。

防波堤ケーソンの損傷形態としては滑動、転倒、基礎地盤の破壊等が考えられ、損傷確率は波浪や波圧の確率特性や材料、施工、摩擦係数等のばらつきを勘案したモデルを用いて推定される。滑動に関わる大きな要因とされる摩擦係数は、これまで実験に基づきその特性値が示されているが、特定な実験を反映した結果であることを認識する必要がある。さらに、実験と実物との幾何学的相違、経年締め固め効果による摩擦係数の増加、マウンドとのバネ効果等の問題が指摘されていることも留意する必要がある。一方において、防波堤の被災事例は多く、被災時の波浪や損傷状況のデータが蓄積されているが、損傷確率や摩擦係数の特性値推定に際し、これら情報が有効に利用されていないのが現状である。

本研究では、ケーソンの滑動損傷を対象にベイズ統計理論を使い、被災事例を効果的に活用した摩擦係数の推定手法について提案する。また、実際の被災例による摩擦係数の推定を試み、手法の適用性について示す。

2. 防波堤ケーソンの滑動確率

防波堤の信頼性評価手法に関するこれまでの研究は、外山（1985）、山本ら（1989）による安全性指標や破壊確

率の感度解析、消波ブロックの被災補修問題を扱った鹿島ら（1988）、氏家ら（1991）の研究がある。高山ら（1994）の研究では、波力、摩擦係数、ケーソン重量等を正規確率変数として捉え、その平均値および標準偏差を実験や現地観測のデータから取りまとめている。そして、滑動限界摩擦係数 M_a を提示し、摩擦係数 M がこれを越える確率を滑動確率と定義している。

$$P(M < M_a) = P(X < 0) \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $X = M - M_a$ である。滑動限界摩擦係数 M_a は次の様に与えられている。

$$M_a = \frac{P_H}{W_B - P_U} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 P_H 、 W_B 、 P_U は水平波力、ケーソンの水中重量、揚圧力で、それぞれ確率変数である。

本論では、被災事例を適用することから被災時の波浪、潮位等は既知として与える。また、ケーソン重量のばらつきは他と比べ小さく、また揚圧力と水平波力は強く相関しており、ばらつきは水平波力で代表させる。これによりケーソン重量および揚圧力については確定値（ $W_B \equiv w_B$ 、 $P_U \equiv p_U$ ）として与える。一方、水平波力については波圧算定式の誤差を考慮し、摩擦係数と共に正規確率変数として与える。

上記の考えに基づけば、滑動限界摩擦係数 M_a の確率密度関数は以下の正規分布で表現される。

$$f_{M_a}(\mu_a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_a} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_a - \bar{M}_a}{\sigma_a}\right)^2\right\} \dots\dots\dots (3)$$

平均値 $\bar{M}_a$ および標準偏差 σ_a は次のように与えられる。

$$\bar{M}_a = \frac{\bar{P}_H}{w_B - p_U}, \quad \sigma_a = \frac{\sigma_P}{w_B - p_U} \dots\dots\dots (4)$$

$\bar{P}_H$ および σ_P は、水平波力の平均値、標準偏差をそれぞれ表し、高山ら（1994）により次の様に表現される。

$$\bar{P}_H = (1 + \alpha)p_{H_0}, \quad \sigma_P = \gamma p_{H_0} \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 p_{H_0} は合田式により計算された水平波力、 α はその偏り、 γ は変動係数である。それぞれ混成堤に対し $\alpha = -0.09$ 、 $\gamma = 0.17$ が推奨されている。（4）式に（5）式を適用すると、次の様になる。

$$\bar{M}_a = \frac{(1 + \alpha)p_{H_0}}{w_B - p_U}, \quad \sigma_a = \frac{\gamma \bar{M}_a}{1 + \alpha} \dots\dots\dots (6)$$

* 正会員 工博 篠塚研究所 主任研究員

** 工修 篠塚研究所 主席研究員

摩擦係数 M についても正規分布で与えられている。

$$f_M(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\mu} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu - \bar{M}}{\sigma_\mu}\right)^2\right\} \dots\dots\dots (7)$$

平均値および標準偏差は、高山ら (1994) により $\bar{M} = 0.636$, $\sigma_\mu = 0.096$ が推奨されている。ここで M , M_a 双方が独立であれば、それぞれの差も正規分布となり、(1) 式 X は次のように表現できる。

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x + \bar{M}_a - \bar{M}}{\sigma_z}\right)^2\right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 σ_z は次式で表される。

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_\mu^2} \dots\dots\dots (9)$$

さらに (8) 式の変数変換を行い $\bar{M}_a$ まで積分する。

$$F_Z(\bar{M}_a) = \int_{-\infty}^{\bar{M}_a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z - \bar{M}}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 $z = x + \bar{M}_a$ である。(10) 式は、被災時の波浪やケーソン重量等から求められる $\bar{M}_a$ が与えられた際、その防波堤ケーソンの滑動確率を与える。図-1 に M_a に対する滑動確率を計算し、結んだ曲線を太線で示す。これは様々な滑動限界摩擦係数に対応した条件付きの滑動確率である。この確率は被災例の数が多い場合、被災 (滑動) 状況を説明できるものでなければならない。しかし、確率モデルの不完全さ、パラメータの精度の問題、未知の不確定な要因の存在等により、異差が生じることが考えられる。本研究では、この異差を摩擦係数の確率母数の推定精度の問題に集約し、被災事例を取り入れ母数の改更を目指すものである。

ここに σ_P は p_{H_0} に依存するため、波力が大きくなるとばらつきは大きくなる。結果として (9) 式で示される標準偏差 σ_z は $\bar{M}_a$ の関数となり、滑動確率は単純な累積計算、或いは正規確率表を使うことはできない。図-1 の曲線の計算では、便宜上 $\sigma_z = 0.15$ に固定している。

3. ベイズ統計

ベイズ統計は、観測情報に基づく確率母数の推定手法の一つで、特に2つの特徴を挙げることができる。一つは、実験や観測の情報だけでなく工学的に判断し得る事前 (情報を得る前) の知識や情報を推定に組み入れることができる。もう一つは、仮定した分布の未知母数を確率変数として扱い、母数推定に伴う不確定性と基礎確率変数の本来のばらつきを形式上統合することができる。これら二つの特徴を使い、リレーパネルの損傷の不確定性問題を扱った山口 (1993) の研究、亀裂の伸展、補修問題を扱った Tang (1973)、Itagaki ら (1993)、Fujimoto・Mizutani (1993) の研究がある。それぞれベイズの方法を効果的に活用している。

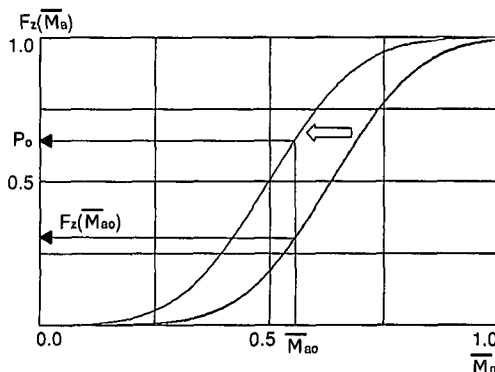


図-1 被災情報による滑動確率曲線の改更

(1) ベイズ的アプローチ

摩擦係数に関する既往の実験から、その平均値 $\bar{M}$ および標準偏差 σ_μ は与えられている。ここでは、この平均値を確率変数として捉え、新たに C と置く。そして被災情報に基づく母数の推定問題に帰着させる。一方、標準偏差については摩擦係数本来のばらつきと位置付け、詳細な実験やより多くのデータを組み入れてもばらつきは改善されないものとする。この考え方に基づくと、図-1 の現状での滑動確率の曲線 (太線) は、被災情報を組み入れることで、形状を変えることなく左右に移動することになる。ここで、被災事例から滑動限界摩擦係数の平均値 $\bar{M}_{ao}$ が与えられ、その時のケーソンの滑動確率が P_0 であったとする。この場合現状での曲線より、その滑動確率は $F_Z(\bar{M}_{ao})$ であることが期待されるが、実際には P_0 であり、この事例情報から平均値の改更と共に、曲線は図中細線のように移動する。

ベイズ統計は、事前の分布に観測による尤度を取り入れ、改更された事後の分布を求めるもので、次式で表現される。

$$f(C|E) = k \cdot f(C) \cdot L(E|C) \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 $L(E|C)$ は観測情報 E に基づく尤度、 $f(C)$ は事前分布、 $f(C|E)$ は事後分布、 k は正規化係数で、以下の様に表される。

$$k = \int_{-\infty}^{\infty} f(C) \cdot L(E|C) dc \dots\dots\dots (12)$$

(11) 式より、事後分布は尤度分布に事前分布を乗じ、正規化することで求められる。

(2) 尤 度

(11) 式の尤度は、 C が既知として与えられたとき、観測結果 E が得られる確からしさ、即ち条件付確率を意味している。ここで、被災状況から n 箇中 r 箇が滑動したという情報が得られた際、記述統計上その滑動確率は単純に r/n と計算される。しかし、 n 箇中 r 箇が滑動する確からしさはサンプル数 n により異なることに留意しなけ

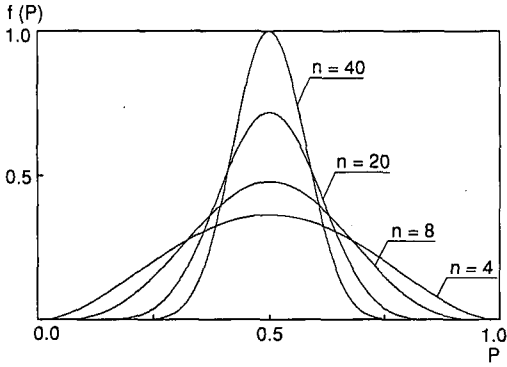


図-2 2項分布のサンプル数による尤度

ればならない。また、滑動現象は滑動した、しないの2つの状態であり、2項分布で表現できる。

$$f(P) = {}_nC_r \cdot P^r \cdot (1-P)^{n-r} \quad (13)$$

ここに、 ${}_nC_r$ は2項係数、 P は滑動確率を表す。(13)式はサンプル数 n による確からしさの違いも表現される。図-2に、サンプル数 n を変えた場合の確からしさの違いを例示する。 r/n は0.5に統一している。 n の増加により分布は0.5に集中し、確からしさが向上しているのが分かる。次に本問題への2項分布の適用を考える。重量 w_B のケーソン n 函に、水平波力 p_{H0} と揚圧力 p_U が作用し、 r 函が滑動したという結果を考える。この場合の尤度は2項分布を用い、次の様に表現できる。

$$\begin{aligned} L(w_B, p_{H0}, p_U | C) &= L(\bar{M}_a | C) \\ &= {}_nC_r \cdot F_z(\bar{M}_a)^r \cdot (1 - F_z(\bar{M}_a))^{n-r} \end{aligned} \quad (14)$$

$F_z(\bar{M}_a)$ は(10)式で求められるが、積分形であることに注意を要する。

(3) 事前分布

経験或いは工学的判断に基づく確率を先見確率と呼ぶ。ベイズ統計では、この先見確率が事前分布として有用される。摩擦係数は0.0から1.0の範囲に分布するため、先見確率として上下限が設定できるベータ分布を用いることとする。

$$f(C) = \frac{1}{\beta(q, s)} \cdot C^{q-1} \cdot (1-C)^{s-1} \quad (15)$$

ここに、 $\beta()$ はベータ関数、 q, s はパラメータである。更に、0.0や1.0付近に比べ0.6付近の方が卓越していることは明らかであり、平均値0.6、標準偏差0.2の比較的なだらかな分布を仮定する。この時パラメータは、 $q=3.0$ 、 $s=2.0$ となる。一方、極例として判断に価する経験や情報が全くない場合、事前分布として一様分布を仮定することもできる。この場合、事後分布は尤度分布と一致し、事前情報は結果に反映されない。

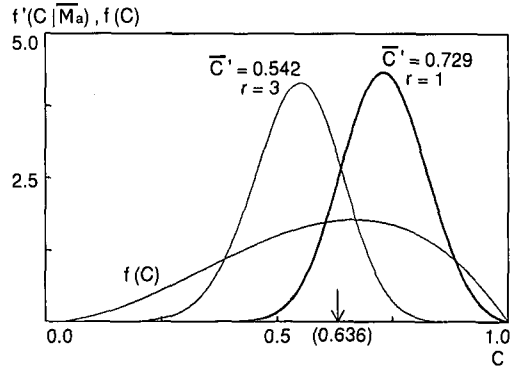


図-3 ベイズ統計による分布の改更

(4) 事後分布

(14)、(15)式を適用し(11)式を書き改める。

$$f'(C | \bar{M}_a) = k \cdot f(C) \cdot L(\bar{M}_a | C) \quad (16)$$

(16)式が被災情報を組み入れ、摩擦係数の平均値の改更を行う基本式である。一方、 C の期待値が母数の点推定量として用いられる。事後の推定量 $\bar{C}'$ は次式により求めることができる。

$$\bar{C}' = \int_0^1 C f'(C) dC \quad (17)$$

(17)式は事後分布の平均値を求めるもので、ベイズ推定値と呼ばれる。

ここで、波浪およびケーソン重量から $\bar{M}_a=0.636$ と計算され、4函中1函($r=1$)が滑動した場合と4函中3函($r=3$)が滑動した場合の事後分布を図-3に例示する。摩擦係数の平均値は $\bar{M}=0.636$ であることから、この条件での滑動確率は0.5であり、4函中2函の滑動が期待される。図より、 $r=1$ の場合滑動確率はおよそ0.25であり、摩擦係数の平均値は想定より大きくなければならず、その推定値は0.636から0.729に改更される。一方、 $r=3$ の場合平均値は想定より小さく0.636から0.542に改更される。被災情報を効果的に取り入れ、平均値の更新が行われていることが分かる。

(5) 分布の更新

事後分布を事前分布に置き換え、新たな被災情報を取り入れ更新を行うことができる。これを進めることで推定値の精度は向上していく。この場合事前・事後分布が同一の分布に属する共役分布を使うと便利である。2項分布に対する共役分布はベータ分布であり、ベータ分布のパラメータの置き換えによって推定値の更新が進められる。しかし、(14)式の2項分布には積分が含まれており、事後分布は既往の確率モデルには当てはまらず、任意の分布となる。従って新たな更新を行う際、数値的な取扱いをしなければならず不便である。そこで事後分布もベータ分布と仮定し、ベイズ推定による平均値 $\bar{C}'$ と

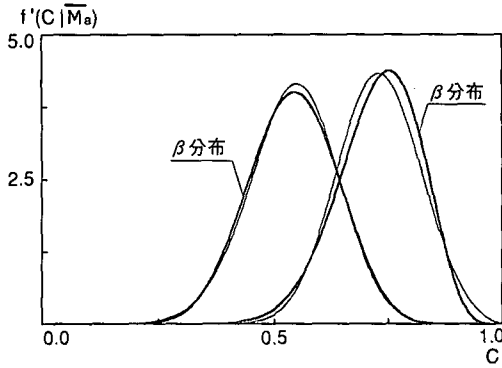


図-4 事後分布とベータ分布

標準偏差 σ_c で記述されるものとする。ベータ分布のパラメータ q , s との関係は下式で表現される。

$$\bar{C} = \frac{q}{q+s} \quad (18)$$

$$\sigma_c^2 = \frac{qs}{(q+s)^2(q+s+1)} \quad (19)$$

(18), (19)式で求められたパラメータより、事後分布はベータ分布として表現され、後の更新が容易になる。図-3に示した事後分布とベータ分布を比較したものを図-4に示す。図中太線がベータ分布である。多少形状に違いが見られるものの平均値と標準偏差は一致しており、再更新での結果への影響は小さいと言える。図-5に一連の評価手法のフローを示す。

パラメータ更新により推定精度の向上が図れることは、利便性と共に一般化を促す意味でも重要であり、本手法の特徴の一つと言える。また、摩擦係数本来のばらつきに加え、平均値もばらつきを持つとの考えに立脚している本手法は、母数を確率変数とし、母数推定に伴う不確定性と基礎確率変数を形式上統合することのできるベイズ統計の特徴を利用したものである。

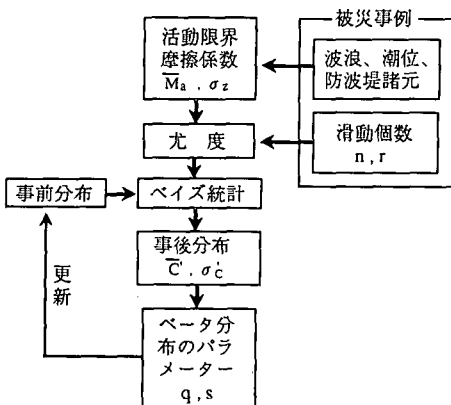


図-5 ベイズ統計による分布の更新フロー

4. 被災事例への適用

平成3年2月の冬期風浪による岩手県久慈港の諏訪下地区防波堤の被災を例に、本手法の適用性の検討を行う。資料は宮井ら(1993)から引用した。図-6に被災箇所平面図を示す。防波堤全長は1,050 m、被災は3箇所及び合計約127.0 mに渡って被災した。被災状況は、75箇中9箇が最高で1.2 m程滑動した。図-7に防波堤の被災前の断面図を示す。表-1に被災時の波浪諸元、波力、重量等を示す。波力は合田式による。

表の各数値を(6)式、(9)式に適用すると、滑動限界摩擦係数 $\bar{M}_a = 0.410$, $\sigma_z = 0.123$ と計算される。これら数値を(10)式に代入、積分を実行すると滑動確率として $F_z(\bar{M}_a) = 0.033$ が得られる。しかし、実際の滑動確率はおよそ $9/75 = 0.12$ であり、摩擦係数の平均値は推奨値0.636より小さいことが予想される。ベイズ統計による

表-1 波浪等の諸元

波高	10.6 m	—
周期	14.0 s	—
潮位	+2.15 m	—
入射角	24.0 deg	—
水平波力	152.3 t/m	1492.5 kN/m
揚圧力	78.9 t/m	773.2 kN/m
ケーソン水中重量	417.3 t/m	4089.5 kN/m

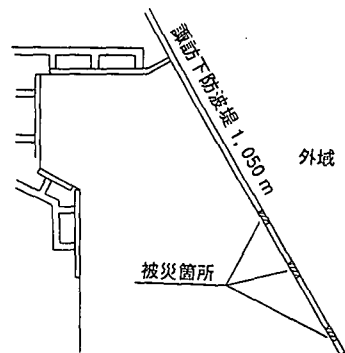


図-6 被災箇所平面図

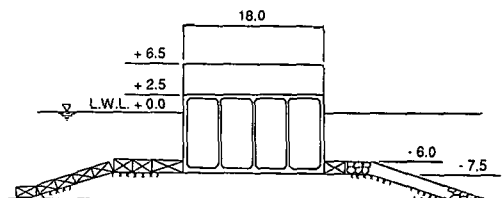


図-7 被災前の堤体断面図

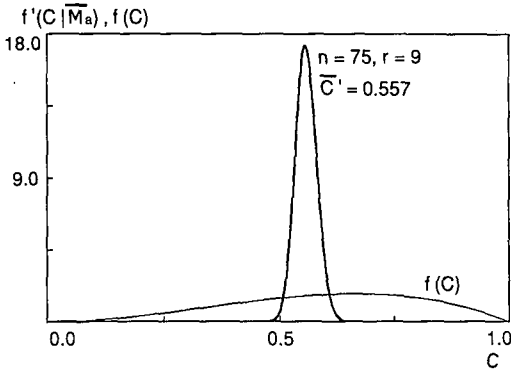


図-8 被災事例による分布の更新

平均値の改更を行った結果を図-8に示す。この結果から、久慈港諏訪下地区防波堤の摩擦係数の平均値の推定値は0.557で、予想どおり小さい結果となった。これは既往の実験、先見確率、さらに被災情報を反映した結果であり、これまでの推奨値より有意であることは明らかである。しかし、対象とした被災事例は母集団からの無作為抽出には当たらず、全体を代表している保証はない。現時点では防波堤固有の特性を反映した結果であると解釈すべきである。

一方、経年締め固め効果による摩擦係数の増加の問題が指摘されている。これが事実であれば、摩擦係数は使用年数により異なる母集団を形成していると考えるのが自然である。この場合、被災事例を使用年数により分別し、それぞれに評価する必要がある。いずれにせよ、できるだけ多くの被災事例を取り込み、更新を重ねていくことが重要である。

5. おわりに

被災事例を効果的に活用した防波堤ケーソンの摩擦係数の推定手法について提案を行った。そこでは、ベイズ統計理論を使い、既往の実験、先見確率、さらに被災情報を取り入れ、バランスのとれた推定が行える。本手法の特徴について、以下に列記する。

- 1) 新たな被災情報を取り入れ、随時更新ができ、精度の向上が進められる。
- 2) 築年数の異なる被災事例を使うことで、経年締め固め効果による摩擦係数の増加を推定できる。

3) 被災時の波浪情報に加え、ケーソンの滑動個数だけで推定が行える。

確率変数が0~ ∞ に分布し、変動係数がおよそ0.3以下の場合、正規分布と対数正規分布はほぼ一致する。本論では、水平波力を正規分布として表現したが、負の作用力の可能性を考える必要はなく、また変動係数も $\gamma=0.17$ であり、対数正規を使うのが自然である。分布モデルとして対数正規の適用を考えていく必要があらう。

本手法では、ケーソン個々の滑動が独立であることが保証されなければならない。しかし現実には1函の滑動により他函の滑動を促すことも考えられ、事象の独立を保証できない。さらに波力の平面分布特性から、連なる防波堤を一つの滑動限界摩擦係数で代表することの問題点、滑動抵抗を摩擦係数だけで代表することの問題点等、整備すべき点は多い。しかし、防波堤の被災事例を有効に活用し、設計や信頼性評価に生かすには、本論で示したようなベイズ流の方法が効果的である。

参 考 文 献

- 氏家久芳・奥野敏彦・鈴木 誠・稲田裕 (1991): 消波ブロックの信頼性設計法の適用, 海岸工学論文集, 第38巻, pp. 601-605.
- 鹿島遼一・島田真行・山本正明・奥津一夫・今泉正次 (1988): ライフタイムコスト最小設計法, 第35回海岸工学講演会論文集, pp. 727-731.
- 外山進一 (1985): 信頼性理論の防波堤滑動安定性への適用, 港研資料, No. 540, 49 p.
- 高山知司・鈴木康正・河合弘泰・藤咲秀可 (1994): 防波堤の信頼性設計に向けて, 港研資料, No. 785, 36 p.
- 宮井真一郎・大平勝司・塩見雅樹 (1993): 被災防波堤集覧(その4) 港研資料, No. 765, 248 p.
- 山本方人・水村和正・遠藤泰司 (1989): 消波工被覆混成堤の信頼性設計, 海岸工学論文集, 第36巻, pp. 668-672.
- 山口 彰 (1993): 原子力プラントの地震PSAに基づく耐震安全裕度の改善, 第12回材料・構造信頼性シンポジウム, pp. 158-163.
- Itagaki H., T. Ishizuka and T. Kawano (1993): An application of bayesian reliability method for selecting optimal structural design dimensions and optimal inspection intervals, 第12回材料・構造信頼性シンポジウム, pp. 153-157.
- Fujimoto Y. and M. Mizutani (1993): Inspection strategy for deteriorating structures based on sequential cost minimization method Part 2 (Consideration of inevitable uncertainties). ICOSAR 93, Vol. 2, pp. 1013-1020.
- Tang, W., H., (1973): Probabilistic updating of flaw information, Jour. of testing and evaluation, JTEVA, Vol. 1, No. 6, pp. 459-467.