

波動場中の円柱のまわりの流れ構造について

奥村 慎也*・佐藤 幸雄**・渡部 靖憲***

1. ま え が き

微小振幅浅水波あるいは深水波等の波動場中に円柱を水平かつ2次元的に設置した場合を考えると、波動場中においては水平方向および鉛直方向流速成分が存在し、また流速は時間的に変化するため、円柱は種々の方向から流体力を受け、そして上下左右に動揺することが考えられる。この様な状態において、さらに粘性の影響によって円柱表面に剝離が生じ、円柱表面の極く近傍の境界層内に剝離渦を伴うような場合に、円柱に加わる流体力はポテンシャル流の場合と異なることが考えられる。この様な円柱表面に剝離を伴うような場合の流体力に関する研究としては振動流中に円柱を置いた場合の Justesen (1991) の研究があり、Morison 式中の抗力係数、質量係数を求めている。また、波動場の場合はポテンシャル流による解析、たとえば Ogilvie (1963) があるが、円柱表面に剝離を伴った場合の研究はあまり多くない。一つは流速成分を任意に仮定して与えた Stansby ら (1991) による数値解析があるが、完全に波動場を取扱ったものとは考えられない。もう一つは、実験的に剝離の状態を調べた、増田ら (1985) の研究である。

本研究は円柱の表面に剝離を伴った場合の円柱のまわりの流れ場ならびに円柱に加わる流体力を数値解析により求めたものである。この場合、実海域規模を考えるとレイノルズ数ならびに K.C. 数が非常に大きく、計算が難しいため、計算可能な円柱の直径および波高が比較的小さい場合を取扱った。そして、没水深の差異に対する剝離渦の発生状況および円柱に加わる流体力と Morison 式による流体力との比較検討を行った。

2. 基本方程式

2次元流の波動場内に円柱を水平に置いた場合を考え、また円柱は固定されて、動揺しないものとする。座標系は図-1 に示すように、流れに平行な方向に x 軸を、垂直な方向を y 軸にとる。各変量に “'” を付したものを

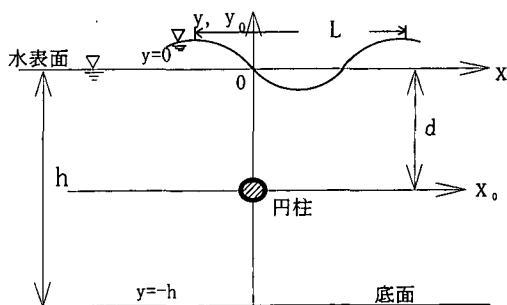


図-1 座標系の定義

有次元量として書き表された渦度方程式および流れ関数に対するポアソン方程式は、それぞれ式 (1) および式 (2) である。

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} = -\frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{\partial \omega'}{\partial x} + \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \omega'}{\partial y} + \nu \Delta \omega' \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\Delta \psi' = -\omega' \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 x' , y' はそれぞれ水平、鉛直軸の値であり、 ω' および ψ' はそれぞれ渦度および流れ関数である。また、 ν は動粘性係数、 $\Delta (= \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2)$ はラプラシアンである。

つぎに、各変量を円柱の半径 R_0 ($2R_0 = D$; D : 直径) と表面波の振動数 σ' により無次元化すると、それぞれ以下のように表される。

$$x = x' / R_0, \quad y = y' / R_0, \quad t = \sigma' t'$$

$$\omega = \omega' / \sigma', \quad \psi = \psi' / \sigma' R_0^2$$

$$\nu = \nu' / \sigma' R_0^2$$

従って、式 (1), (2) を無次元化した場合の渦度方程式及び流れ関数に対するポアソン方程式はそれぞれ式 (3) 及び (4) で表される。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \nu \Delta \omega \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\Delta \psi = -\omega \quad \dots\dots\dots (4)$$

さらに、式 (5) を用いた等角写像として図-2 に示すような新しい座標系を導入すると、無次元化された渦度方程式および流れ関数に対するポアソン方程式はそれぞれ式 (6) および式 (7) のようになる。

$$x = e^r \cos \theta, \quad y = e^r \sin \theta \quad \dots\dots\dots (5)$$

* 学生会員 北見工業大学大学院 工学部土木開発工学科

** 正 会 員 工 博 北見工業大学助教授 工学部土木開発工学科

*** 学生会員 北海道大学大学院 工学部土木工学科

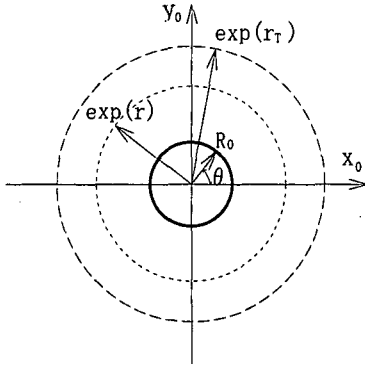


図-2 等角写像による座標系

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = J^{-1} \left\{ -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) \right\} \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -J\omega \quad (7)$$

ここで、 J は式 (5) のヤコビアンで式 (8) で表される。

$$J = e^{2r} \quad (8)$$

次に、後述する数値解析のときに、円柱の近傍で計算メッシュを細かくし、円柱より離れるに従ってメッシュが粗くなるようにするために、式 (9) で示されるような、さらに新しい座標軸 ξ を導入する。

$$r = r_T \frac{e^{b\xi} - 1}{e^b - 1} \quad (9)$$

ここで、 b は座標の歪度合いを表す定数 ($b = 1 \sim 5$ 程度) であり、 r_T は計算領域の 1 番外側 ($\xi = 1$) のときの r の値である。

3. 境界条件

まず、流れ関数 ψ の r 方向微分係数を求めると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial r} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= -ve^r \cos \theta + ue^r \sin \theta \quad (10) \end{aligned}$$

により表される。

いま、円柱より遠く離れた境界層外縁に微小振幅浅水波の流速成分を与えることとする。無次元化された流速成分はそれぞれ、 $u = u'/\sigma R_0'$ 、 $v = v'/\sigma R_0'$ であり、これより、

$$u = A \cdot \frac{\cosh k(y+h)}{\sinh kh} \sin(kx-t) \quad (11)$$

$$v = A \cdot \frac{\sinh k(y+h)}{\sinh kh} \cos(kx-t) \quad (12)$$

により与えられる。式 (11)、式 (12) 中の各無次元変量は以下のである。

水深： $h = h'/R_0'$ 、波長： $L = L'/R_0'$ 、

振幅： $A = H'/2R_0'$

従って、式 (6) 及び (7) の境界条件として、 $r = r_T$ における $\partial \psi / \partial r$ の値は、円柱の設置水深すなわち没水深が $d (= d'/R_0')$ のとき、式 (13) により与えられる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_{r=r_T} &= A \cdot R_T \left[\sin \theta \frac{\cosh ky_0}{\sinh kh} \sin(kx_0 - t) \right. \\ &\quad \left. - \cos \theta \frac{\sinh ky_0}{\sinh kh} \cos(kx_0 - t) \right] \quad (13) \end{aligned}$$

ここで、 $x_0 = R_T \cos \theta$ 、 $y_0 = h - d + R_T \sin \theta$ 、 $k = 2\pi/L$ 、 $\exp(r_T) = R_T$ である。

また、渦度は、 $r = r_T$ において $\omega = 0$ である。

一方、円柱の表面上においては、“non-slip” の条件より、 $u = v = 0$ であり、式 (6)、(7) に対する境界条件として、

$$r = 0 \text{ で } \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \quad (14)$$

また、渦度については Thom の式を使用して、

$$r = 0 \text{ で } \omega = -J^{-1} \frac{\partial \xi}{\partial r} \left\{ \frac{2\psi(\Delta \xi)}{(\Delta \xi)^2} \right\} \quad (15)$$

4. 数値解析の方法

式 (6) および式 (7) を解く方法のうち、まず式 (6) の渦度を求める場合は基本的には簡単な差分法とスペクトル法を組み合わせ、佐藤・浜中ら (1993) の方法に沿った方法を使用した。しかし、時間方向に前進差分を用いたこの方法ではレイノルズ数が小さいときは精度は良いが、レイノルズ数及び K.C. 数が大きくなると次第に数値計算は発散し易くなる。そのため、レイノルズ数がやや大きくなっても発散せず、精度も良いといわれている A.D.I 法を使用した。また、流れ関数を求める場合は式 (7) にスペクトル法を使用し、フーリエ領域における一次方程式を解き、さらに、その解を逆フーリエ変換することにより求めた。

5. 圧力場について

Navier-stokes の方程式を使用して導かれた圧力方程式をさらに無次元化すると、式 (16) のように表される。

$$\Delta p = 2 \left\{ \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \quad (16)$$

ここで、 $p = p'/\rho'(\sigma^2 R_0'^2)$ 、 ρ' ：流体の密度

式 (16) の境界条件は、 $r - \theta$ 軸に関して、円柱表面では、

$$r = 0 \text{ で } \frac{\partial p}{\partial r} = -\nu \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \quad (17)$$

である。

円柱より遠く離れたところでは微小振幅波の圧力の式

表-1 計算条件

CASE	h	L	d	$r_u = \tanh k(-d+h)$	A	ν	K.C.数	Re数
1—1	800	4840	200	0.653	1.0	0.00510	3.35	418
1—2	800	4840	400	0.478	1.0	0.00510	2.89	360
1—3	800	4840	600	0.254	1.0	0.00510	2.62	327
2—1	400	2420	100	0.653	2.0	0.00255	6.69	1672
2—2	400	2420	300	0.254	2.0	0.00255	5.24	1310

を適用することとして、無次元化された圧力を式 (18) で与えた。

$$p = \frac{A \cdot L}{2\pi} \frac{\cosh ky_0}{\sinh kh} \sin(kx_0 - t) \quad \dots\dots\dots (18)$$

式 (16) により圧力 p を求める方法は前述の 3. において流れ関数 ψ が求まると、その ψ を使用して、 ϕ を求めたときと全く同じ方法でポアソン方程式を解くことにより求められる。

6. 計算結果と考察

計算条件を表-1 に示した。円柱のまわりに組まれるメッシュの分割数は θ 方向 64, r 方向 64 とした、したがって $\Delta x = 2\pi/64$, $\Delta \xi = 1/64$ である。時間ステップの Δt は CASE-1 の場合、佐藤・浜中らの方法を使用し $\Delta t = 2\pi/16000$ であり、CASE-2 の場合は A.D.I 法を使用し $\Delta t = 2\pi/1024$ とした。なお $r_r = 2.0$ (一定) である。また、波動場におけるデータは表-1 に示すように円柱の直径を $D = 5.0$ cm, 波高 $H = 10, 40$ cm のそれぞれ 2 種類で、水深 $h = 10$ m, 波長 $L = 121$ m, 周期 $T = 10$ sec は

それぞれ 1 通りの値である。表-1 はこれらの値を半径 R_0' により無次元化された値を示している。無次元量を使用した場合、没水深における水平、鉛直方向流速成分の比 r_u は $r_u = \tanh k(-d+h)$ であり、また、没水深 d における K.C. 数および Re 数はそれぞれ、

$$\text{K.C. 数} = \frac{u' T'}{D} = \pi A \frac{\cosh k(-d+h)}{\sinh kh} \quad \dots\dots (19)$$

$$\text{Re 数} = \frac{u' D'}{\nu} = \frac{2\pi \cosh k(-d+h)}{\nu \sinh kh} \quad \dots\dots (20)$$

である。

図-3, 4 および図-5 はそれぞれ CASE-1 の没水深が $d = 200, 400, 600$ に変えた場合の渦度の Contours を示したものであり、図-3 の $d = 200$ の場合は、流速成分の値が大きいため、剥離の発生が大きいこと、また r_u の値も大きいことから、図中に (●印) で示した剥離点 A が円柱表面を時計回りに回転しているのが分かる。しかし図-4 の $d = 400$ ($r_u = 0.487$) になると、剥離点 (●印) は回らず、また、 $t = \pi$, (d), $t = 2\pi$, (h) の位相では剥離点は明確ではない。図-5 の $d = 600$ ($r_u = 0.254$) にな

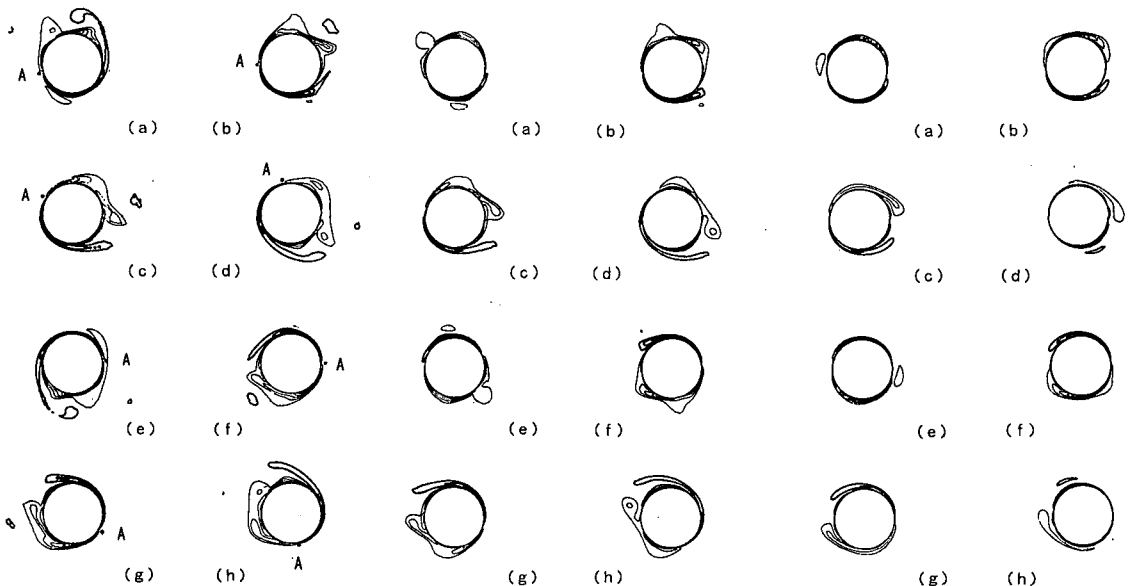


図-3 渦度の Contours, CASE 1-1
 $d = 200$, K.C. = 3.35, Re = 418,
 $\Delta \omega = 3$

図-4 渦度の Contours, CASE 1-2
 $d = 400$, K.C. = 2.89, Re = 360,
 $\Delta \omega = 3$

図-5 渦度の Contours, CASE 1-3
 $d = 600$, K.C. = 2.62, Re = 327,
 $\Delta \omega = 3$

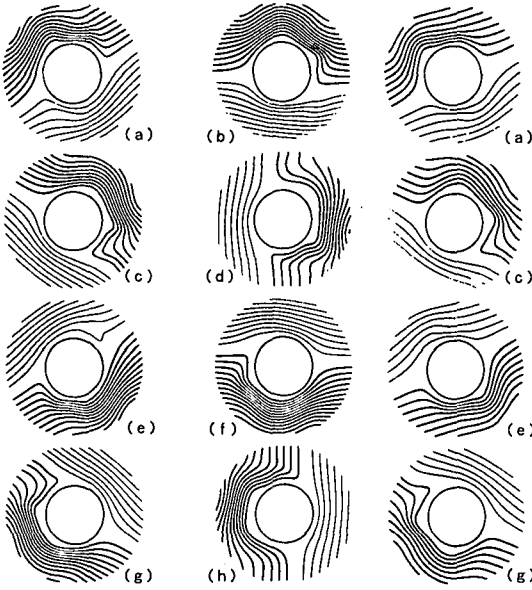


図-6 流れ関数の Contours, CASE 1-1
 $d=200$, $K.C.=3.35$, $Re=418$,
 $\Delta\psi=0.16$

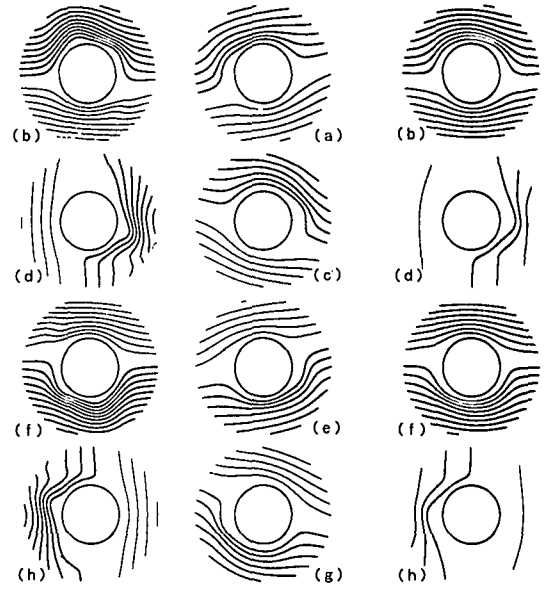


図-7 流れ関数の Contours, CASE 1-2
 $d=400$, $K.C.=2.89$, $Re=360$,
 $\Delta\psi=0.16$

図-8 流れ関数の Contours, CASE 1-3
 $d=600$, $K.C.=2.62$, $Re=327$,
 $\Delta\psi=0.16$

ると円柱上の渦度の値は (a)～(d) と (e)～(h) で上下対称となり完全に水平振動流の場合と類似して来るのが分かる。つぎに図-6, 7 および図-8 は上述の渦度の図に対応した流れ関数の Contours を示したものであり、これらの図より、波動による水平、鉛直流速についての流れの場の状況と、剥離渦の発生に伴う流線の乱れの状況が良く表現されていることが分かる (各図の (a)～(h))

の 8 つの図は 1 周期を 8 等分した $2\pi/8$ 毎の位相における図を示す)。図-9, 10 は $A=2.0$, $\nu=0.00255$ の場合の $d=100$ および $d=300$ のときの渦度の Contours を示したものであり、図より強い剥離渦が発生する状況が見られる。また没水深が $d=100$ の場合の図-9 からは、やはり剥離点 (●印) が円柱表面を回るのが見られ、没水深が $d=300$ の底面付近の場合は図-10 より CASE 1-

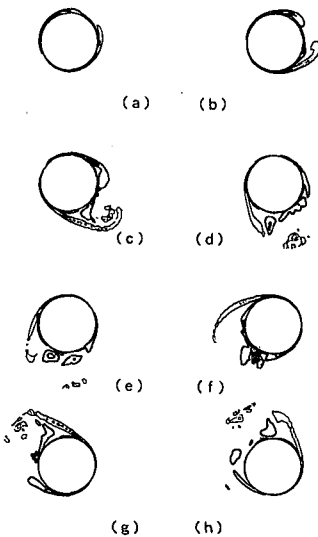


図-9 渦度の Contours, CASE 2-1
 $d=100$, $K.C.=6.69$, $Re=1672$,
 $\Delta\omega=10$

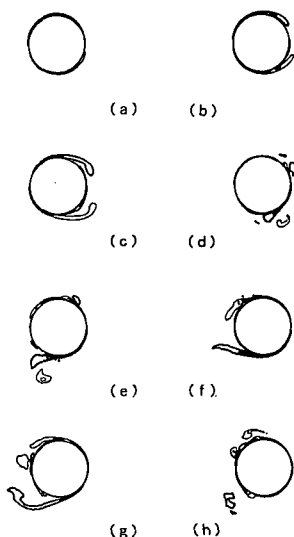


図-10 渦度の Contours, CASE 2-2
 $d=300$, $K.C.=5.24$, $Re=1310$,
 $\Delta\omega=10$

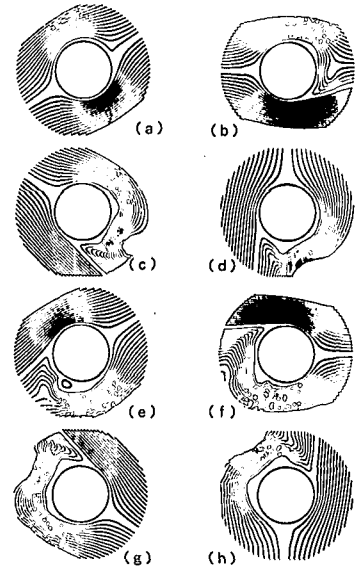


図-11 流れ関数の Contours, CASE 2-1
 $d=100$, $K.C.=6.69$, $Re=1672$,
 $\Delta\psi=0.16$

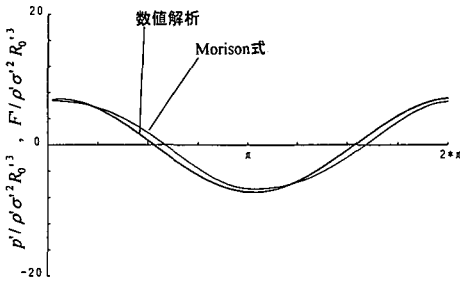


図-12 流体力（水平力）の時間変化（CASE 1-1）

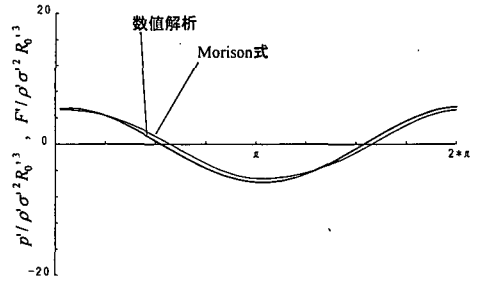


図-14 流体力（水平力）の時間変化（CASE 1-3）

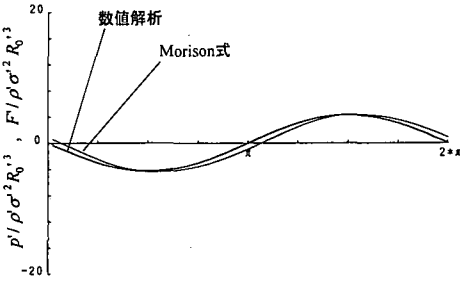


図-13 流体力（鉛直力）の時間変化（CASE 1-1）

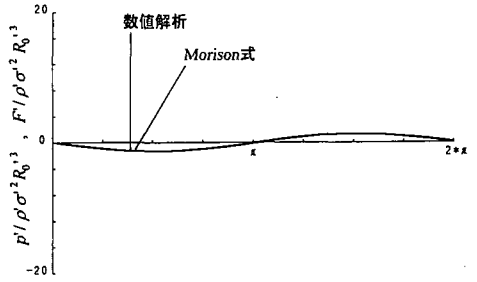


図-15 流体力（鉛直力）の時間変化（CASE 1-3）

3と同様、剥離点は回らないと云える。図-9に示す渦度のContoursに乱れが見られるのは、数値計算がやや不安定性を呈しているものと考えられる。図-11は図-9に対応した流れ関数のContoursを示したもので、速い流速の状況と剥離渦の存在を良く見ることが出来る。

つぎに、円柱のまわりの圧力場の計算値より特に円柱表面における圧力およびせん断力を合算して、円柱に加わる流体力を算出し、さらに1周期に渡った時間変化を求めた。各CASEについて流体力の水平方向分力を図-12, 14に、また、鉛直方向分力を図-13, 14にそれぞれ太い実線で示した。図中の細い実線はMorison式の値である。没水深が浅い $d=200$ の場合、図-12の水平力については剥離を伴う場合の方が粘性によるせん断力が働きMorison式の値よりやや大きい値を示すし、また、両者の位相に若干ズレが生じ、剥離を伴う方がむしろポテンシャルの圧力に近いと云える。鉛直力については位相のズレはあるが最大値は一致していると云える。また、 $d=600$ の没水深が深い位置では、水平力および鉛直力共にMorison式に近づいていると云える。これはK.C.数が小さく鉛直方向流速も小さいためと考えられる。

7. ま と め

水深に比べて円柱の直径が小さい場合、すなわちK.C.

数およびRe数が小さい場合の数値計算結果であるが、没水深の変化、すなわち r_u の値の変化に対応した、剥離渦の発生状況ならびに円柱のまわりの流れ場の様子を明確に表現することが出来た。また、流体力についてのMorison式との比較ではK.C.数が小さいため位相の差異の他はあまり大きな相違点は現れなかったが、K.C.数が大きい場合の計算が必要であると考えられるため、今後継続して数値解析を行う所存である。

参 考 文 献

- 佐藤幸雄・折橋恒春・浜中建一郎 (1993): 剥離を伴った振動流中の円柱に働く流体力について, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 856-860.
- 増田進弘・渡辺 晃・堀川清司 (1985): 波動場におかれた水平円柱に作用する波力と周辺流速場, 第40回土木学会年次学術講演会概要集II, pp. 541-542.
- Justesen, P. (1991): A numerical study of oscillating flow around a circular cylinder, J. Fluid Mech., vol. 222, pp. 157-196.
- Ogilvie, T. F. (1963): First-and second-order forces on a cylinder submerged under a free surface, J. Fluid Mech., vol. 16, pp. 451-472.
- Stansby, P. K. and Smith, P. A. (1991): Viscous forces on a circular cylinder in orbital flow at low Keulegan-Carpenter numbers, J. Fluid Mech., vol. 229, pp. 159-171.