

Wavelet 変換による波浪データの解析

仲 座 栄 三*・大 城 真 一**・津 嘉 山 正 光***・日 野 幹 雄****

1. はじめに

不規則な波浪データの解析に、フーリエ変換 (FT) は強力な解析ツールとなっている。これまで、非定常な波群性の波の解析には、Short Time FT (STFT) が用いられてきた。これは、通常用いる FT 解析が解析周波数に対して測定時間内の平均的なフーリエ係数を与えるため、測定時間を適当な長さに分割した後 (短時間データウィンドウを通して) FT をかけて現象の非定常性を引き出そうとする目的などで使用される。しかしながら、この解析手法では (後で説明するように)、高周波数の成分波に対しては十分な解像度が得られても、低周波数の波に対しては、分解能が低下するという短所を有する。何よりも問題となのは、STFT では、成分波のスペクトル変動 (包絡波形) は与えられても、非定常な成分波そのものの波形が得られない所にある。

最近、Wavelet 解析 (変換) というものが開発された。この Wavelet 変換 (WT) は、上述した FT 解析の抱えていた非定常性に対する適応性の壁を突き破るものであった。この WT の出現で、これまで遅々として進まなかった非定常かつ不規則な信号の解析が一気に前進する気配を見せている。開発当初、WT は連続 Wavelet 変換を基礎として数学的に複雑な計算手法を用いながら展開されてきた。しかし、最近になって、デジタル信号処理への応用が盛んになり、離散時間 Wavelet 変換 (DTWT) が理論的に研究されると共に、Wavelet フィルターバンクとしての解釈が進んできた (例えば、Vaidyanathan, 1993; 尾知, 1994)。この WT 解析は、これまでの STFT 解析で解析ウィンドウの周波数帯域幅が固定されてきたものを、時間及び周波数で変化させることで、解析ウィンドウ関数に完全直交性を持たせることに成功し、その結果、変換後の信号の完全再構成を可能にしている。

このような、Wavelet 変換という強力な解析ツールは以下のような研究分野 (流体を中心とするならば) への応用が期待される。

- 1) 波動問題: 例えば、非線形作用による自己捕捉、拘束波の発生、分散による成分波の位相変化など非線形性及び分散性を伴う波浪変形問題、砕波現象の解明、非定常周波数スペクトル及び方向スペクトルの定式化、風波の発生、長周期波の発生、湾内振動解析、造波信号の作成、等々。
- 2) 流体力学の問題: 例えば、渦のマーキングや分離などに対する周波数解析、カオス的な流体運動解析への応用。
- 3) 水文・気象の問題
- 4) 河川・地下水の流出解析問題
- 5) 数値解析への応用

本研究では、今後 Wavelet 解析 (変換) が様々な形で展開されていくと考えられる上記研究分野の中で、特に波浪解析への応用に着目し、実際に室内実験で得られた波浪データへ Wavelet 解析を試み、それを基に、波の非線形・分散性の作用及び長周期波の発生などについて検討する。また、そのことを通じて Wavelet 変換の波浪データ解析への有用性を示す。

2. Wavelet 解析の基礎理論及び Wavelet フィルターバンクの概略

連続 Wavelet を用いた波浪データの解析例は、日本国内では森・安田 (1993) や小林・高橋 (1994) に見られる。しかし、彼らを取り扱った連続 Wavelet 変換は理論体系が複雑で、しかも Mother Wavelet に特殊な関数が用いられており、従来の STFT ほど解析ツールとしての融通性がない。しかし、それ以上に問題なのは、これまでの解析例では全て Wavelet 係数を用いて物理現象の議論がなされており、これが従来のパワースペクトルとの物理的な意味付けの面から現象理解を困難にしていることである。後で示すように、本研究では Wavelet 変換過程を、Wavelet フィルターバンクによるデータ解析として解釈し、非定常不規則信号から成分波そのものの波形を抽出することに WT 解析を利用している。

以下では、従来の STFT と離散時間 Wavelet 変換 (DTWT) とを比較しながら、DTWT の基礎理論および Wavelet Basis の満たすべき条件やその設計手法につい

* 正会員 工博 琉球大学工学部助手 環境建設工学科

** 正会員 工修 (有) 海岸環境調査研究所

*** 正会員 工博 琉球大学工学部教授 環境建設工学科

**** 正会員 工博 中央大学総合政策学部

て述べる。

2.1 FT と STFT

以下に述べる基礎理論は、全て Vaidyanathan (1993) に詳述されており、ここでの説明もそれによるところが大である。

入力信号を $x(t)$ とし、FT 及び STFT を施した後に得られる係数を $X(\omega)$ 及び $X(\omega, m)$ とすると、これらの間の関係式は以下のように示される。

$$X_{\text{FT}}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad \dots\dots\dots (1a)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_{\text{FT}}(\omega) e^{j\omega n} d\omega \quad \dots\dots\dots (1b)$$

$$X_{\text{STFT}}(\omega, m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) v(n-m) e^{-j\omega n} \quad \dots\dots\dots (2a)$$

$$x(n) v(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_{\text{STFT}}(\omega, m) v^*(n-m) \cdot e^{j\omega n} d\omega \quad \dots\dots\dots (2b)$$

ここで、 $v(i)$ はデータウィンドウである。このデータウィンドウには、例えば、矩形ウィンドウ、ハニングウィンドウやハミングウィンドウなどが用いられる。また、ウィンドウ長は一定であるため、高周波数の波に対して解像度が高くても、低周波数の成分波に対して解像度が落ちることになる。上式から、これらの変換は共に、入力信号を ω に中心周波数を有するバンドパスフィルタに通し、出力を直流 (DC) に変調する作用をしている。その結果、出力信号は間引きが可能となり、データ圧縮可能となる。また、得られる係数は平均値としての意味を持つ。

式 (2b) で、 $\sum |v(m)|^2 = 1$ ならば、

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_{\text{STFT}}(\omega, m) v^*(n-m) e^{j\omega n} d\omega \quad \dots\dots\dots (2c)$$

となる。ここで、 $v^*(n)$ は $v(n)$ の複素共役関数である。また、データの間引きを考慮した STFT は、一般に次式に示す形の変換対で示される。

$$x_k(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h_k(n_k n - m) \quad \dots\dots\dots (3a)$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_k(m) f_k(n - n_k m) \quad \dots\dots\dots (3b)$$

ここで、 $f_k(n)$ は基底関数 (Basis Function) と呼ばれる。FT の場合、基底関数は $\exp(j\omega n)$ であり、次式で示すように、正規直交性を有する。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{j\omega_1 n})^* (e^{j\omega_2 n}) = 2\pi \delta(\omega_1 - \omega_2) \quad \dots\dots\dots (4)$$

同様に、式 (3) で示す変換対が成立するためには、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_k^*(n - n_{k_1} m_1) f_{k_2}(n - n_{k_2} m_2) = \delta(k_1 - k_2) \delta(m_1 - m_2) \quad \dots\dots\dots (5)$$

が成立する必要がある。

これまでの STFT に対する窓関数の概念では、式 (5) を満たす基底関数の設計が殆ど不可能であった。

2.2 STFT から WT へ

WT は、STFT でウィンドウ関数を時間と周波数の関数とした次式のような関数形を用いることで実現される。

$$h_k(t) = a^{-k/2} h(a^{-k} t), \quad a > 1, \quad k = \text{integer} \quad \dots\dots\dots (6)$$

この基底関数は、Mother Wavelet と呼ばれ、Gabor 関数や Laplacian-Gaussian 関数など、これまで様々な関数形が提案されている。Mother Wavelet から得られる基底関数が直交関数ならば、順変換の基底関数 $h_k(t)$ と逆変換の基底関数 $f_k(t)$ とは、 $f_k(t) = h_k(-t)$ なる関係を有し、順変換の基底を決めると自動的に逆変換の基底も求まる。連続 Wavelet 変換については、これ以上の説明を割愛して、以下離散時間 Wavelet 変換について簡単に述べる。

離散時間 Wavelet 変換及びその逆変換は、データ間引きをサンプルレートの 2 倍とすると、次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} y_k(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h_k(2^{k+1}n - m), \quad 0 \leq k \leq M-2 \\ y_{M-1}(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h_{M-1}(2^{M-1}n - m). \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7a)$$

$$\begin{aligned} x(n) &= \sum_{k=0}^{M-2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_k(m) f_k(n - 2^{k+1}m) \\ &+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_{M-1}(m) f_{M-1}(n - 2^{M+1}m) \quad \dots\dots\dots (7b) \end{aligned}$$

あるいは、 $f_k(n - 2^{k+1}m)$ を η_{km} とおくことで、

$$x(n) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_k(m) \eta_{km}(n) \quad \dots\dots\dots (7c)$$

なる一般形に書ける。

ここで、 η_{km} は Wavelet Basis Function であり、 $y_k(m)$ は Wavelet 係数である。この基底関数 η_{km} が直交関数であるならば、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta_{km}(n) \eta_{li}^*(n) = \delta(k-l) \delta(m-i) \quad \dots\dots\dots (8)$$

となり、 $y_k(m)$ は次式で与えられる。

$$y_k(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \eta_{km}^*(n) \quad \dots\dots\dots (9)$$

その結果、 $f_k(n) = h_k^*(-n)$ の関係が成立する。

2.3 FIR フィルタに基づく Wavelet Basis の設計手法

基本的な条件, $k=0, 1$ の場合について考えることにして, 式(8)を変形し, Z 変換を施した後, $f_k(n)$ 及び $h_k(n)$ の Z 変換をそれぞれ $F_k(Z)$ 及び $H_k(Z)$ とすると, 次式のように変形される.

$$\begin{aligned} \overline{F_k(z)}F_l(z) + \overline{F_k(-z)}F_l(-z) \\ = 2\delta(k-l), \quad 0 < k, \quad l < 1 \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

すなわち, 正規直交性の必要条件は, Wavelet 基底が上式で示される Paraunitary 条件を満足することである. また, $F_k(z) = \overline{H_k(z)}$ である. この条件を満足する $H_k(z)$ 及び $F_k(z)$ の関係は, 次のような条件を有する場合であることが, Smith and Barnwell や Mintzer らによって示された (Vaidyanathan, 1993).

Paraunitary 条件を満たすための十分条件

$$(1) \quad H_1(z) = z^{-N} \overline{H_0(-z)}, \quad N = \text{Order of } H_0(-z)$$

$$(2) \quad F_0(z) = \overline{H_0(z)} \text{ and } F_1(z) = \overline{H_1(z)}$$

ここで, $C(z) = H_0(z)\overline{H_0(z)}$ とおくと, Paraunitary 条件は次式のようになる.

$$C(z) + C(-z) = 2 \dots\dots\dots (11)$$

上式を満足するような, $C(z)$ の時間領域での表現を概念図で示すと図-1 のようになる. すなわち, Wavelet Basis の設計としては, 上記の条件を満足するハーフバンドフィルタ $C(z)$ を設計し, それを因数分解によりハイパス及びローパスフィルタに分解することで, $H_1(z)$, $H_0(z)$ が得られる.

上述の設計手法で, 次数を $N=20$ として求めた, $H_1(z)$ 及び $H_0(z)$ のインパルス応答 (Wavelet Basis) の設計例を図-2 に示す. 図示のとおり, Wavelet Basis は時間軸上で局在しており, コンパクトサポートである. また, 連続時間に対する Mother Wavelet は, この Wavelet Basis の無限乗積で与えられる.

2.4 Wavelet 変換のフィルタバンクによる信号処理としての解釈

離散データの Wavelet 変換操作を一種のマルチレートシステムとして捉え, 例えば, $k=0, 1$ に対する Wavelet 変換対を考えると, Wavelet 変換対は図-3 に示すような 2 分割 tree 構造からなる QMF フィルタバンク, すなわち Wavelet 解析フィルタバンクとして解釈される (例えば, 尾知, 1994). すなわち, Wavelet 係数は, 上述した Paraunitary 条件及び Smith らの条件を有するフィルタバンクに入力データを通した後, 出力側のデータを間引くことによって実現される. 高次の Wavelet 係数は, 同様な手順をさらに追加することによって得られる. さらに, 合成フィルタを通過した信号を加え合わせ

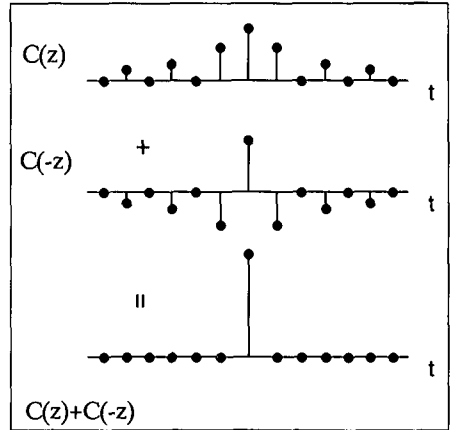


図-1 $C(z) + C(-z) = 2$ の時間領域での実現例

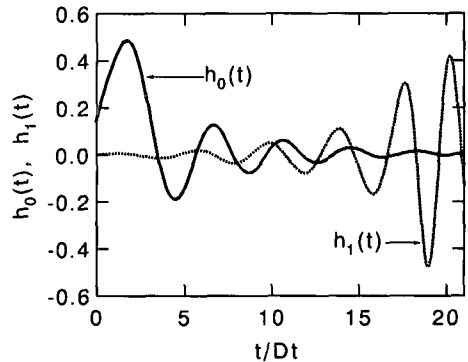


図-2 Wavelet Basis の時間応答波形

て, (構成側のフィルタがこれまで述べてきた完全再構成の条件を満たすことから,) 信号の完全再構成が得られることになる.

はじめに述べたように, これまで Wavelet 変換は, 非定常データに WT 解析を施し, Wavelet 係数を得, それを基にデータの非定常性を議論するのに用いられてきたように思える. FT 解析に基づく定常スペクトルや running スペクトルなどは, 得られる係数が平均値としての意味を有するので, 当然ながら成分波の非定常波形を得るということをせず, 確率密度関数という形で議論されて来ている.

本研究では, Wavelet 係数を議論の対象とするのではなく, 図-3 に示すような Wavelet フィルタバンクを通して得られる成分波形そのものを議論の対象としている.

3. 波浪データの Wavelet 変換による解析例

図-4 に, 波群性を有し比較的不規則な模擬波浪データへの Wavelet 解析の適用例を示す. この模擬波浪データは, 次式によって数値計算されたものである.

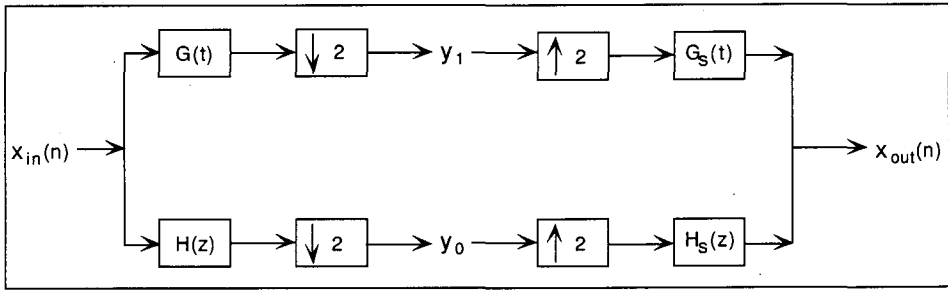


図-3 2分割QMFフィルターバンクによるWavelet解析の解釈

$$\begin{aligned}
 x(t) = & \sin(\sigma_2 t) + 0.5 \sin(\sigma_3 t) + 0.5 \sin(\sigma_1 t) \sin(\sigma_4 t) \\
 & + 0.5 \sin\left(\sigma_2 t + \frac{\pi}{5}\right) \sin(\sigma_5 t) + 0.25 \sin(\sigma_6 t) \\
 & + 0.25 \sin(\sigma_7 t) \dots \dots \dots (12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 = 2\pi f_1 = 2\pi/T_1, T_1 = 80.0 \text{ s}, \sigma_2 = 2\pi f_2 = 2\pi/T_2, T_2 = 40.0 \text{ s} \\
 \sigma_3 = 2\pi f_3 = 2\pi/T_3, T_3 = 20.0 \text{ s}, \sigma_4 = 2\pi f_4 = 2\pi/T_4, T_4 = 10.0 \text{ s} \\
 \sigma_5 = 2\pi f_5 = 2\pi/T_5, T_5 = 5.0 \text{ s}, \sigma_6 = 2\pi f_6 = 2\pi/T_6, T_6 = 2.5 \text{ s} \\
 \sigma_7 = 2\pi f_7 = 2\pi/T_7, T_7 = 1.25 \text{ s}, Dt = 0.5 \text{ s}
 \end{aligned}$$

図示のとおり、抽出された成分波は式(12)で与えた各成分波と一致しており、Wavelet フィルタバンクを用いて不規則信号から波群性の波浪成分を抽出可能であることが分る。図-5は、図-4で示す成分波の合成波形と入力波形との比較である。図示のとおり、合成波は入力波を完璧に再現している。

次に、造波水槽実験で得られた波浪データへの適用例を示す。

実験は、長さ27 mの水路で、造波板から15.7 mの位置に汀線を有する海底勾配1/20の一樣斜面海底モデルを用いて行われた。造波板から8.5 mまで36.0 cmの一定水深部が続く。水位変動に関するデータはその水槽内で汀線位置から沖側へ向けて、120, 170, 220, 270, 320, 420, 520, 620, 770, 920 cmの計10地点で測定された。入射波の平均波高は約11 cmであり、平均周期は1.0秒

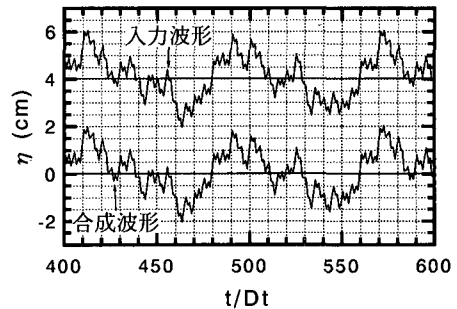


図-5 入力波形とWT解析による再合成波形との比較

である。

図-6に、基本波である周期1秒の成分波の時空間変動を示す。図中xの値は、汀線から沖側へ向かう距離を示す。基本波は、各測定点で極めて正弦波的な時間変動波形を示しており、砕波点から岸側で緩やかに減衰している。図-7は、3倍振動モードの成分波であり、この成分波の振幅は沖側から砕波点まで僅かに増大が見られるが、砕波帯内では爆発的に増えている。特に、汀線側の時間軸上の振動パターンはカオス的な振舞いを見せている。図-8に、周期2秒の成分波の時空間変動を示す。この成分波の時間的な振る舞いもカオス的である。特に、

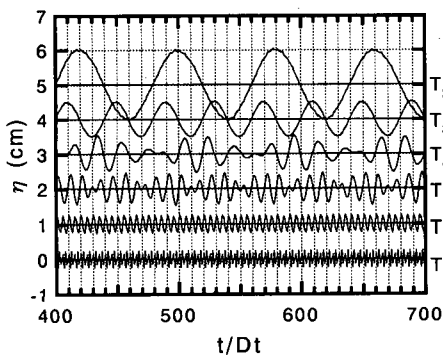
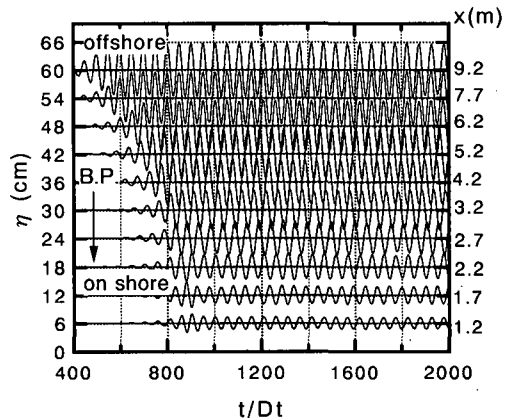
図-4 模擬波浪データへのWavelet解析例 ($T_i, i=2\sim6$ は成分波の周期を示す)

図-6 周期1秒の成分波の時・空間波形

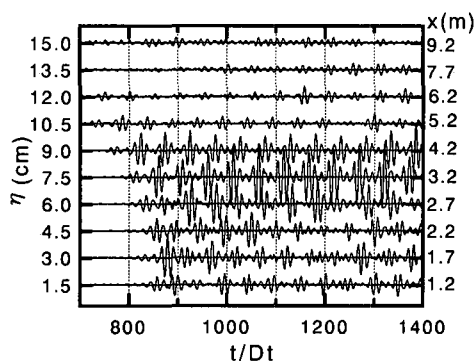


図-7 周期0.4秒の成分波の時・空間波形

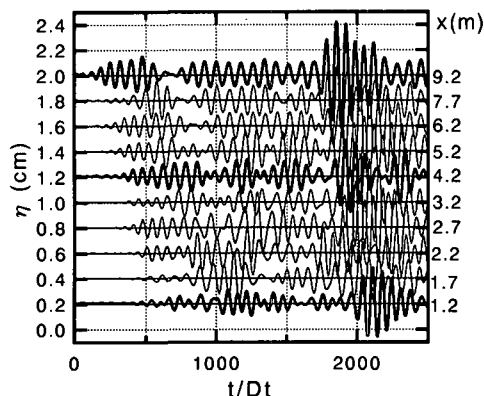


図-8 周期2秒の成分波の時・空間波形

注目されるのは、 $t/dt=2000$ 付近の振動である。汀線で反射された周期8秒程度の波が造波板で再反射され急激に分裂を生じた波が自己捕捉（引き込み現象）により互いに引き寄せられ、一つの安定な包絡ソリトンを形成しながら岸へと進行している。その結果、極めて安定なソリトンに拘束された長周期波が汀線まで進行している（図-9）。汀線と造波板との間の長周期振動が、それよりも高周波数側の波の分散及び非線形作用によって殆ど減衰することなく長時間維持されている。このことは、港湾などの静振や湾内振動などが、波の非線形性によって長時間維持されるというような、いわば一種の生命体維持システムが自然界で存在する危険性のあることを強く主張しているように思える。

図-9に、周期8秒の長周期波の波形を示す。この成分波の空間的な振動パターンには、沖側から汀線まで通じる進行波及び反射波の他に、碎波点を一つの分岐点とする振動パターンがあることを示している。

以上で説明した特異な物理現象は、Wavelet 係数を眺めていても決して出てくるものでなく、やはり波形そのものを見て初めて議論できるものである。現地データへ

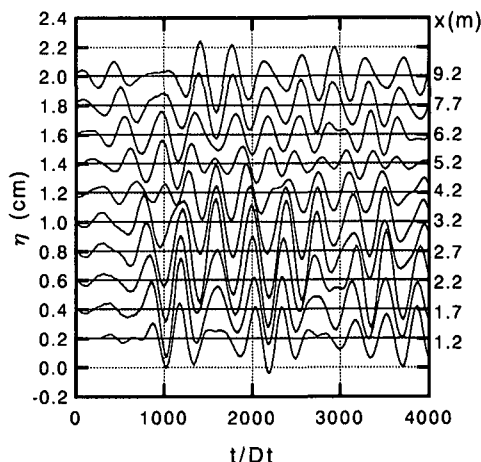


図-9 周期8秒の成分波の時・空間波形

の適用例については、津嘉山ら（1995）を参照。

波の非線形性や分散性による成分波間の干渉問題を含め、長周期波の発生メカニズムなどの説明は、紙面の都合で割愛せざるを得ない。これについては、他の研究分野への適用例と共に別の機会に詳述したい。

4. おわりに

本論文では、従来 Wavelet 係数という形で議論されてきた非定常不規則なデータの解析において、成分波の波形そのものを抽出し、それをもとに物理現象の不規則及び非定常性や非線形性などの解析を行うという手法を提示し、実際にデータ解析を行うことを通じて、波浪データ解析への本手法の有用性を具体的に示した。また、Wavelet 変換の基礎理論の概略を従来の STFT などと比較しながら述べると共に、Wavelet Basis の設計手法などについても説明した。

最後に、琉球大学工学部尾知博助教授及び金城繁徳助手には、WT 解析の基礎理論に関して、多大なご教授を頂いた。ここに記し、感謝いたします。

参考文献

- 尾知 博・Umashankar I.・Majid N. (1994): IIR フィルタに基づく直交ウェーブレット基底の一設計法, 電子情報通信学会論文誌, No. 8, pp. 1096-1099.
- 小林智尚・高橋智彦 (1993): Wavelet 変換を用いた実海岸の波群の解析とその再生, 海岸工学論文集, 第41巻, pp. 186-190.
- 津嘉山正光・河野二夫・仲座栄三・大城真一・福田孝晴 (1995): リーフ上の波の変形に関する研究, 海岸工学論文集, 第42巻, pp. 176-180.
- 森 信人・安田孝志 (1993): 現地波浪データのウェーブレット解析による時間波形データからの碎波頻度の推定法, 海岸工学論文集, 第41巻, pp. 181-185.
- Vaidyanathan P. P. (1993): Multirate systems and filter banks, PTR pertion Hall, Inc., p. 991.