

非線形二次長周期波の方向スペクトル

関 本 恒 浩*・水 口 優**

1. はじめに

浅海域における長周期波の問題は、漂砂や構造物の安定性などの海岸工学上の重要な課題として、近年積極的に研究が進められている。浅海域でも比較的水深の深い領域（水深 10～20 m）では、岸からの反射波を除けば長周期波の大部分は Longuet-Higgins and Stewart (1962) に始まる 2 次非線形による拘束波と考えられ、砕波点近傍への入射波としての役割を考えれば、2 次非線形干涉としての長周期波の性質を明確にすることは工学上きわめて重要である。しかしながら、2 次波の方向分散性まで考慮した検討は、Sand (1982)、木村 (1985) や橋本ら (1992) による検討があるものの詳細についてはこれまでほとんどない。そこで、本研究は 2 次長周期スペクトルについて方向分散性まで含めた検討を実施し、現地の方角スペクトルとの比較検討を行うとともに、簡便な 2 次波の方向スペクトル近似算定法を提案するものである。

2. 非線形二次長周期方向スペクトルの性質

弱非線形・疑似ガウス過程を仮定すれば Stokes 波的な摂動法により 2 次までを考慮することにより 2 次オーダーまでの波数周波数スペクトルが求められる。

$$S(k, \sigma) = S^{(1)}(k, \sigma) + S^{(2)}(k, \sigma) \quad \dots\dots\dots (1)$$

また、2 次の波数周波数スペクトルは非線形核関数 $K(k', k-k', \sigma, \sigma-\sigma')$ を用いて次のように表現される。

$$S^{(2)}(k, \sigma) = \int_{k'} \int_{\sigma'} K(k', k-k', \sigma, \sigma-\sigma')^2 \times S^{(1)}(k', \sigma') S^{(1)}(k-k', \sigma-\sigma') dk' d\sigma' \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 k は波数ベクトル、 σ は角周波数であり、

$$K(k', k'', \sigma, \sigma') = -\frac{g}{2} \left\{ \frac{\sigma' + \sigma''}{\sigma \sigma'} D + \frac{1}{\sigma \sigma'} (k' \cdot k'' - R' R'') - \frac{1}{g} (R' + R'') \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$D = \frac{(2(\sigma' + \sigma'')(k' \cdot k'' - R' R'') + \sigma''(k'^2 - R'^2) + \sigma'(k''^2 - R''^2))}{g|k' + k''| \tanh |k' + k''| h - (\sigma' + \sigma'')^2} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$R' = |k'| \tanh |k'| h = \frac{\sigma'^2}{g} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ただし、 h は水深、 g は重力の加速度である。また、

$$k(-\sigma) = -k(\sigma) \quad \dots\dots\dots (6)$$

であり、 $k < k' (\sigma < \sigma')$ のときに長周期成分が現れる。橋本ら (1992) の指摘しているように、1 次の波数周波数スペクトルから 1 次の方向スペクトルへ変換する際には、線形の分散関係式を用いればよいが、2 次の方向スペクトルは次の拘束条件にしたがって変換する必要がある。

$$\sigma = \tan^{-1} \left\{ \frac{|k'| \sin \theta' + |k - k'| \sin \theta''}{|k'| \cos \theta' + |k - k'| \cos \theta''} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

この関係を用いて方向スペクトルが得られる。

$$S(\sigma, \theta) = S^{(1)}(\sigma, \theta) + S^{(2)}(\sigma, \theta) \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$S^{(2)}(\sigma, \theta) = \iint_{\sigma'} K(\sigma', \sigma - \sigma', \theta', \theta'') \times S^{(1)}(\sigma', \theta') S^{(1)}(\sigma - \sigma', \theta'') d\sigma' d\theta' \quad \dots\dots\dots (9)$$

2 次長周期方向スペクトルの特性を調べるために、式 (9) を構成する要素について検討する。非線形核関数については木村 (1982) によって簡単に調べられているが、ここでも検討を加える。非線形核関数は 2 つの成分波の干涉の強さを表すもので、式 (3) からわかるように、2 つの 1 次成分波の周波数（この周波数の和あるいは差が 2 次成分の周波数となる）および交差角によって決定される。図-1 は長波近似した 1 次成分波の相対水深 $\sqrt{h/g} f' = 0.1$ としたときの成分波の交差角に対する非線形核関数の分布形状を、2 次非線形長周期波に対する相対水深 $\sqrt{h/g} f$ 別に調べたものである。2 次長周期波の相対水深（周波数）が大きくなるにつれ、分布形状が広がっている。特に相対水深が小さい場合には、2 つの成分

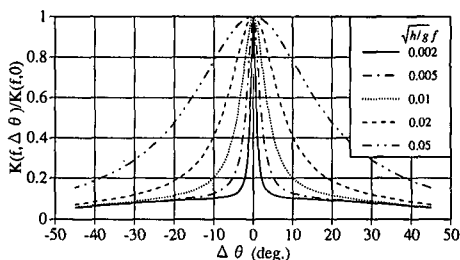


図-1 ピーク値で無次元化した非線形核関数と中心角の関係

* 正会員 工修 五洋建設(株) 技術研究所
 ** 正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科

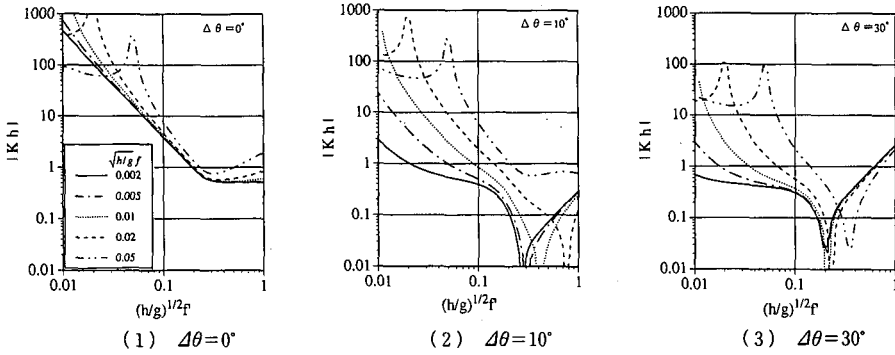


図-2 非線形核関数と1次成分波の無次元周波数(相対水深)との関係

波の交差角の狭い範囲に分布が集中しており、同一方向の成分の干渉が強くなることがわかる。この傾向は、1次成分波の相対水深を変化させてもほぼ同様の傾向であった。図-2は1次波の相対水深と水深で規格化した非線形核関数の関係を交差角 $\Delta \theta = 0^\circ, 10^\circ$ および 30° について2次長周期波の相対水深をパラメータに示したものである。ここで、非線形核関数は絶対値表示しているがその主要部分は負の値をとっている。したがって、式(3)より1次波の振幅の大きいところでは長周期波は負となり、いわゆる set-down 波となることを意味している。非線形核関数は1次成分波の周波数が小さいほど大きく、1次成分波の交差角が小さいほど大きな値となる。また、2次長周期波の周波数が一定であれば、1次成分波の交差角が大きくなるにしたがって、非線形核関数も大きくなる。この傾向は交差角が 0° の場合を除けば、交差角が小さくなるほど強くなっている。交差角が 0° で傾向が異なるのは図-1に示したように、2次長周期波の周波数が小さい場合、交差角 0° 付近で核関数が急激に大きくなるためである。1次成分波の相対水深が大きい領域では、下向きに落ち込んだ部分があるが、核関数の符号がこれより周波数の大きい領域で負から正に転じており、比較的深い水深では周波数差の干渉により set-up 波を生ずることを意味する。2次長周期波の相対水深が比較的大きい場合、1次成分波の低周波側では、さきほどとは逆に局所的に核関数が大きくなっているところが見られる。これより低周波数側でも符号が負から正に変わっており、この領域は周波数の和による2次長周期波を表し、set-up 波となって存在する。非線形核関数の絶対値は非常に大きく、この周波数帯に自由波のエネルギーが存在すれば、非常に大きく増幅される。なお、本研究で念頭においているような標準的な周波数スペクトルを考える場合には、この領域における1次成分波のエネルギーは非常に小さいため、この影響をほとんど考慮する必要はない。ただし、港内副振動や碎波帯内などのように、この領域の周波数帯で自由波としてエネルギーを持ってい

れば、1次成分波のエネルギーの存在する周波数帯と周波数差の干渉による2次長周期波のエネルギーの存在する周波数帯の中間の領域で、大きなエネルギーを持つ set-up 波が存在する可能性がある。

1次波の方向スペクトルは通常、方向関数 $G^{(1)}(\theta|\sigma)$ と周波数スペクトル $S^{(1)}(\sigma)$ に分けて考えられる。したがって、式(9)は

$$S^{(2)}(\sigma, \theta) = \int_{\sigma'} \int_{\theta'} K(\sigma, \sigma - \sigma', \theta, \theta') S^{(1)}(\sigma) S^{(1)}(\sigma - \sigma') \times G^{(1)}(\theta|\sigma) G^{(1)}(\theta'|\sigma - \sigma') d\sigma' d\theta' \dots \dots \dots (10)$$

のように書ける。このように書き下した場合、2次の方向スペクトルを特徴付ける要素として周波数スペクトルの積として表される非線形エネルギーが重要である。図-3は非線形エネルギー分布の計算例を示したものである。周波数スペクトルとしてピーク周波数とスペクトルピーク値で正規化した修正 Bretschneider-光易型スペクトルを用いて、横軸に1次成分波の周波数を縦軸に2次成分波の周波数をそれぞれとって等値線を示したものである。図中原点を通る対角線より右下の部分は周波数の差の成分によるエネルギーを表し、左上の部分は周波数の和の成分のエネルギーを表す。周波数の差の成分すなわち長周期成分に着目すると、当然のことながら長周期波の周波数は0で最大となりこのときの1次成分波の周波数はピーク周波数である。長周期波の周波数が大きくなるにつれて、ピークの位置は1次成分波の周波数の

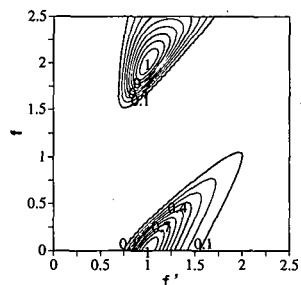


図-3 非線形エネルギーの分布

大きい方へほぼ直線的に移動するとともにピーク値は指数関数的に減少している。通常長周期波のエネルギーは1次成分波の1/2以下の周波数帯で有意なことを考慮すれば、2次の長周期波の挙動はピーク周波数付近の比較的狭い範囲に存在する成分波に強く影響を受けることがわかる。

1次成分波の周波数スペクトルとして修正 Bretschneider-光易スペクトルを、方向分布関数として光易型方向分布関数を用いたときの2次の非線形長周期波の方向スペクトルの理論計算例を示す。ここでは、有義波高1m、有義波周期10秒、水深を10mで固定し、光易型方向分布関数の方向集中度パラメータを10および75の2種類について示した。図-4は方向スペクトルのエネルギーの等値線を示した結果である。当然ではあるが、1次成分波の方向集中度が小さければ、2次長周期波の方向スペクトルも小さい。また、水深が浅いほどエネルギーレベルは高く、方向集中度が高いほどエネルギーレベルが高い結果となった。

図-5は2次長周期波の方向集中度を調べるため代表周波数に対する方向分布関数を示したものである。図中には参考のため光易型方向分布関数も同時に示してある。方向分布関数形状は周波数によらずほぼ一定で、1次成分波の方向分布特性に比べ分布の幅が小さいことがわかる。本計算条件の範囲では、方向集中度 $s=5\sim 25$ 程度で、第1次近似としては $s=10$ 程度を考えれば良いことがわかる。

図-6は方向分布関数が周波数に依存しないとしたときの方向スペクトルを示したものである。分布は方向分布関数が周波数に依存するとした場合と大きく違わない。ただし、方向分布関数が周波数に対し独立であるとした場合の方が全体的に方向集中度が高くなるため、エネルギーレベルは高い。

3. 2次長周期波方向スペクトル推定における問題点

通常、方向スペクトルの推定には式(11)の関係を用いる。

$$\Phi_{mn}(\sigma) = \int_k S(k, \sigma) \exp\{-ik \cdot (x_m - x_n)\} dk \quad \cdots (11)$$

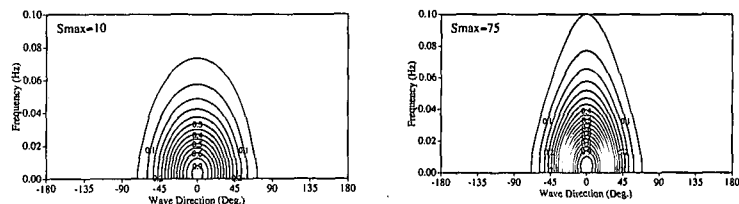


図-4 長周期方向スペクトル (水深10m, 有義波高1m, 有義波周期10秒)

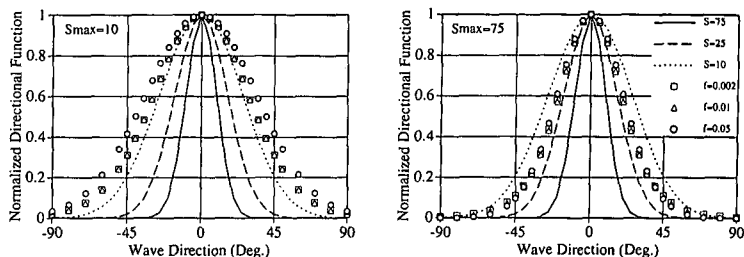


図-5 長周期方向スペクトルの方向分布関数 (条件は図-4と同じ)

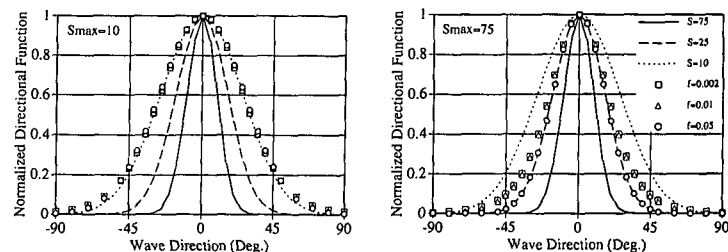


図-6 長周期方向スペクトルの方向分布関数 (条件は図-4と同じ)

1次成分波の方向分布関数が周波数に無関係とした場合

クロス・パワースペクトル Φ_{mn} は、

$$\Phi_{mn}(\sigma) = \Phi_{mn}^{(1)}(\sigma) + \Phi_{mn}^{(2)}(\sigma) \quad \cdots (12)$$

と表されることから、波数・周波数スペクトルは、通常の手法を用いることによって求めることができる。しかしながら、木村(1985)が指摘しているように、2次の非線形長周期波であっても、それを構成する成分波の交差角が大きければ波数の大きいものが出現する。このため、波数と周波数是一对一の対応をしない。したがって、方向スペクトルを求めるためには波数・周波数スペクトルを波数に関して積分する必要が生じる。また、波数の組合せによっては偶然に線形の分散関係を満たすものも考えられることから、厳密には観測データから2次の方向スペクトルを推定することは困難である。またこのことは、これまでの方向スペクトルの推定に関しても問題となる。すなわち、これまでは波数・周波数空間上で分散関係式を満足する曲面上にのみしか波のエネルギーがないものと考え、方向スペクトルへの変換を行ってきた。しかしながら、現実的には非線形性の影響で分散関係式を満足する曲面の周りにもエネルギーが分布しており、しかもそのエネルギー分布は真の1次成分波のエネルギー分布より波向きに広い範囲に分布している。この

ため、1次成分波のピーク周波数付近のエネルギーレベルの高い領域以外では、非線形性が強くなると、2次成分波からの漏れ成分の影響が利いてくるものと考えられる。このことは、現在用いられている標準的な方向分布関数の、周波数に対する依存のしかたにも疑問を投げかけるものと考えられる。

長周期波は通常の波浪成分よりも海底地形の影響を受けやすく波高計アレイを平面的に配置して水位変動を測定したのでは、波の変形による波長の変化のため、方向スペクトルの推定精度を著しく低下させる。このため、EMLM(磯部ら, 1985)やEMEP(橋本ら, 1992)を用いて、一地点観測を実施することが望ましい。水面変動も含む任意の波動量によるクロスパワースペクトルと波数周波数スペクトルの関係は次式となる。

$$\begin{aligned} \Phi_{mn}(\sigma) = & \int_k \{ H_m^{(1)}(k, \sigma) H_n^{(1)*}(k, \sigma) S^{(1)}(k, \sigma) \\ & + H_m^{(2)}(k, \sigma) H_n^{(2)*}(k, \sigma) S^{(2)}(k, \sigma) \} \\ & \times \exp \{-ik \cdot (x_m - x_n)\} dk \quad \cdots \cdots (13) \end{aligned}$$

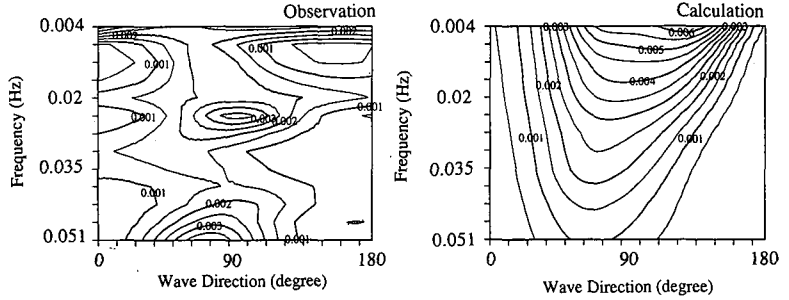
ここで、 $H_m(k, \sigma)$ は任意の波動量から水面変動への伝達関数であり、*は複素共役を示す。式(14)中の2次の伝達関数は1次の方向スペクトルの関数であり、方向スペクトルの形状によって変化する。したがって、任意の波動量のクロス・パワースペクトルから長周期波の波数周波数スペクトルを推定することは原理的に無理である。ただし、1次成分波と2次成分波のエネルギーの主要部分が独立・分離している場合、実測の伝達関数 $H_m(k, \sigma)$ を用い、見かけ上

$$\begin{aligned} \Phi_{mn}(\sigma) = & \int_k H'_m(k, \sigma) H'_n(k, \sigma) \{ S^{(1)}(k, \sigma) + S^{(2)}(k, \sigma) \} \\ & \times \exp \{-ik \cdot (x_m - x_n)\} dk \quad \cdots \cdots (14) \end{aligned}$$

のように1つの伝達関数によって波動運動量が表現できる場合には、任意の波動量からの波数周波数スペクトルの推定が近似的に可能と考えられる。いずれにしても、長周期方向スペクトルの現地波動データからの推定は難しく、場合によっては1次成分波から計算によって長周期方向スペクトルを求めることが必要と考えられる。

4. 現地波浪との比較

上述のような問題点はあるものの、2次長周期波の特徴はピーク周波数付近のスペクトル形状に依存し、成分波の交差角の影響も比較的狭い範囲に限られることや、1次成分波が長波条件に近づくにつれ、2次成分波の k と σ の関係は見かけ上線形の分散関係に近づくことか



図一七 長周期方向スペクトルの観測値と計算値の比較

ら、近似的には通常方向スペクトル解析でもある程度は2次波の方向スペクトルを表現できるものと考えられる。そこで、常陸那珂港建設地点付近の現地波浪観測を実施し、現地における長周期の方向スペクトルとその際に観測された1次波の方向スペクトルを用いて算出した2次長周期波の方向スペクトルとの比較検討を行った。

現地観測は、常陸那珂港北護岸から600 m北側の水深17 m地点に、水圧センサー・水平2成分電磁流速計付き超音波波高計を設置して、1995年1月20日～1月28日までの約1週間の連続観測を実施した。観測期間中の波浪は有義波高で約1 m～2 m、有義波周期で7秒から12秒であった。

図一七は無作為に選んだ時間帯(1995年1月21日21時～22時)における長周期方向スペクトルの実測値と計算値を比較例を示したものである。実測値の解析では橋本ら(1992)によるEMEPを用い、流速から水面変動への伝達関数は実測値を用いた。図では長周期成分のみを示している。両者の差はあるものの、観測データの観測精度や周波数スペクトルの分解能の問題等を考慮すれば、エネルギーレベルの高い位置や、全体的なエネルギーレベルなどの基本特性は、定性的には説明できているものと考えられる。

5. 長周期方向スペクトルの近似

長周期方向スペクトルを計算するには核関数の計算や波数や波向き角の積分など、計算量が非常に大きくなることが問題となる。そこで、長周期方向スペクトルを簡便に求める方法を提案する。

まず、長周期波を対象として非線形核関数を近似する。式(4)～(5)を相対水深 kh に関するオーダ比較し、長波の分散関係を用いて周波数を用いた表示をすると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} K = & -\frac{1}{2h} \left[\frac{\sigma^2}{\sigma(\sigma - \sigma)} \frac{g(1 + 2 \cos \Delta \theta)}{h\sigma^2 + 2g(1 - \cos \Delta \theta)} \right. \\ & \left. + \cos \Delta \theta \right] \quad \cdots \cdots (15) \end{aligned}$$

図一八は式(15)による核関数の近似値と厳密値を比較

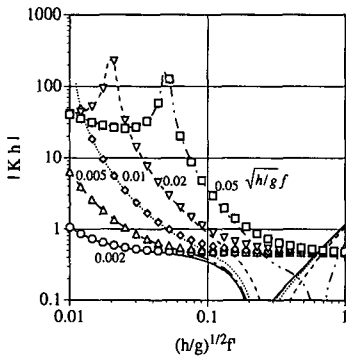


図-8 近似非線形核関数と厳密値の比較

した例である。長波近似を用いているため高周波数側の適合度は悪くなっているが、それ以外では非常に良い近似となっていることがわかる。

つぎに、非線形エネルギーを近似する。図-4 に示したように、非線形エネルギーの長周期成分は 1 次成分波のピーク周波数 σ_P から対象とする長周期波の周波数分だけシフトした形となっていることを考慮し、経験的に次式で近似することにした。

$$S(\sigma)S(\sigma-\sigma')=S(\sigma-\sigma')^2\frac{S(\sigma+\sigma_P)}{S(\sigma_P)}\dots\dots\dots(16)$$

方向分布特性としては、1 次成分波の交差角が小さいと仮定して、2 次長周期波の周波数と波向きに関連付けた。また、ここでは簡単のため方向分布関数は周波数とは独立として扱った。

以上を踏まえ、 a, b, m, n をパラメタとする一般的な周波数スペクトル

$$S^{(1)}(\sigma)=a\sigma^{-m}\exp[-b\sigma^{-n}]\dots\dots\dots(17)$$

を用い、解析的に式 (10) を積分することによって次式が得られる。

$$S^{(2)}(\sigma,\theta)=I_S\frac{a}{n}\frac{\Gamma(m/n)}{b^{m/n}}\frac{S'(\sigma_P+\sigma)}{S'(\sigma_P)}\cdot\alpha(\sigma^2,\theta)\dots\dots\dots(18)$$

ただし、 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数、 σ_P はピーク周波数であり、

$$\alpha(\sigma^2,\theta)=\frac{g\sigma^2\left\{1+2\cos\left(\frac{\sigma}{\sigma_P}\theta\right)\right\}}{2h\left[\sigma^2h+2g\left\{1-\cos\left(\frac{\sigma}{\sigma_P}\theta\right)\right\}\right]}\dots\dots\dots(19)$$

$$S'(\sigma)=a\sigma^{-m-2}\exp[-b\sigma^{-n}]\dots\dots\dots(20)$$

$$I_S=\begin{cases} g_s^2[2B(p,q)-\{B_{z1}(p,q)+B_{zz}(p,q)\}], & 0\leq|\theta|\leq\frac{\pi}{2} \\ g_s^2[B_{zs}(p,q)+B_{z1}(p,q)], & \frac{\pi}{2}<|\theta|<\pi \end{cases}\dots\dots\dots(21)$$

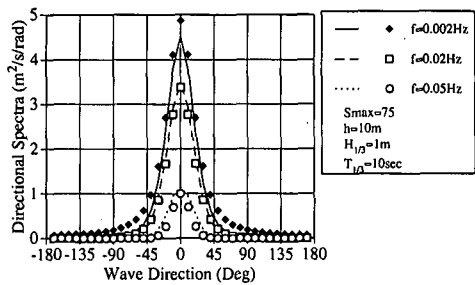


図-9 方向スペクトルの簡易式と理論値の比較

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{|\theta|}{2}\right), & Z_2 &= \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{|\theta|}{2}\right), \\ Z_3 &= \cos^2\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{|\theta|}{2}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

$$p=2s+\frac{1}{2}, \quad q=\frac{1}{2} \dots\dots\dots(23)$$

$$g_s=\frac{2^{2s-1}}{\pi}\frac{\Gamma^2(s+1)}{\Gamma(2s+1)}\dots\dots\dots(24)$$

また、 $B(\cdot)$ はベータ関数、 $B_z(\cdot)$ は不完全ベータ関数、 s は方向集中度パラメタである。図-9 は理論計算値と式 (18) による算定値を比較した結果である、計算値と理論値は比較的良く対応している。簡便法による計算誤差は理論値に対し最大約 30 %であった。実用上は十分と考えられる。

6. おわりに

2 次非線形長周期波の方向スペクトルの特性について詳細な検討を実施した。また、ここでは実測された波動量から 2 次非線形長周期波を推定することが難しいことを指摘した。今後は、現地データから方向分布特性を精度良く推定する方法を検討する予定である。なお、紙面の関係で式の誘導など省略したものについては、別の機会に報告する予定である。

参 考 文 献

- 磯部雅彦・近藤浩右・堀川清司 (1985): 方向スペクトルの推定における MLM の拡張, 第 31 回海岸工学講演会論文集, pp. 173-177.
- 木村 晃 (1985): 非線形長周期波の 2 次元スペクトル, 第 32 回海岸工学講演会論文集, pp. 154-158.
- 橋本典明・永井紀彦・菅原一兎・浅井 正・久高将信 (1992): 波浪の多方向性と弱非線形性を考慮した水圧波から表面波への換算法について, 海岸工学論文集, 第 39 巻, pp. 171-175.
- 橋本典明・永井紀彦・浅井 正・菅原一兎 (1993): 海洋波の方向スペクトルの推定における最大エントロピー原理 (MEP) の拡張, 港湾技術研究所報告 第 32 巻, 第 1 号, pp. 3-25.
- Longuet-Higgins, M. S and R. W. Stewart (1962): Radiation stress and mass transport in gravity waves, with application to surf beat, J. Fluid Mech., Vol. 13, pp. 481-504.
- Sand, S. E. (1982): Long waves in directional seas, Coastal Engineering, Vol. 6, pp. 195-208.