

# 波群の新しい表示法の試み

森 信 人\*・安 田 孝 志\*\*

## 1. 緒 言

波群 (wave grouping) の問題は、海岸・海洋構造物に大きな影響を及ぼすため、その表示方法や特性について様々な議論がなされて来た。本来の波群の意味は波の連なりの度合いであり、波高分布を何ら規定していないが、最大波高やそれに準ずるような大きな波高を持つ波の出現頻度が多い場合についても波群が発達した状態として広義に捉えられるようになってきている。このように、波群は単に波の連なりだけでなく、工学的に問題となる波浪の状況を示しているため、波の連なりと波高や振幅が時間・空間的にどの様に結びついているのかを定量的に評価する必要がある。現在のところ、波列の波群性を評価する場合、連なりについては平均連長、波高については  $GF$  が一般的に用いられている。しかし、これらの指標の持つ意味、それぞれの関連性、妥当性については不明瞭な点が多く疑問の余地がある。

本研究では、従来用いられている波群の表示方法の定義とその問題点について触れた後、新しい波群の表示方法についての提案とその適用について検討を行う。

## 2. 従来用いられている統計量の特性と欠点

### 2.1 平均連長

不規則な波の波高を定義する方法としてゼロクロス法は非常に簡便であり、また直感的な方法である。しかし、実波形のローカルな極大値と極小値を波高として定義するゼロクロス法は、波形に人為的な操作を加えていない反面、波形が持つ情報のかなりの部分を捨てており、ゼロクロス法より連長などを計算した場合、波高との関連などは失われ、それぞれ独立したものとししか認識されないという欠点を持っている。波列が線形波であると仮定した場合、連長の値はスペクトル形状と結びついており、波群はスペクトルのバンド幅と等価であると考えて良い。しかし、実際の波列は弱非線形性を持っており、スペクトルには非線形成分が含まれ、スペクトル幅とは何

を指すのか? という問題がある。実際、スペクトル幅パラメータ  $\varepsilon$ ,  $\nu$  や包絡波形の相関パラメータ  $\kappa$  はスペクトルの非線形成分の影響を受け過大評価される傾向がある。それゆえ、スペクトルの形状やバンド幅を陽に含むような統計量を用いることは、その値が観測方法やデータの処理方法によって変動するだけでなく、非線形性の度合いの評価という不確定な要因を含むため、好ましくない。また、波形から連長は計算できるが、連長から波形を一義的に作ることは不可能であり、水槽や数値的に波列を再現する場合に連長を直接取り込むことはできない。

### 2.2 SIWEH および $GF$

$GF$  の定義は、

$$GF = \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} [E(t) - \bar{E}]^2 dt / \bar{E}^2} \dots \dots \dots (1)$$

$$E(t) = \int_{-T_p}^{T_p} \eta^2(t+\tau)(1-|\tau|/T_p) d\tau \dots \dots \dots (2)$$

であり (ここで、 $T_0$  は観測時間、 $T_p$  はピーク周期)、式 (2) 中の三角フィルターをデルタ関数  $\delta(t-\tau)$  に置き換えると、kurtosis  $\mu_4$  を用いて

$$GF = \sqrt{\mu_4 - 1} \dots \dots \dots (3)$$

と表されることから、基本的に  $GF$  と  $\mu_4$  は関連の深い統計量であることがわかる。kurtosis が波高分布の形状を支配する統計量であることを考えると、Weibull 母数  $m_w$  と  $GF$  の関係は、式 (3) の  $\mu_4$  と  $GF$  の関係を経験的に置き換えたものであると言える。

また、 $Q(\tau) = (1-|\tau|/T_p)$  のフーリエ振幅  $\bar{Q}(\omega)$  は、

$$\bar{Q}(\omega) = \Re \left[ -\frac{4}{\omega T_0} \sin(\omega T_p) \right] + 3 \left[ -\frac{4}{\omega^2 T_0 T_p} \sin(\omega T_p) \right] \dots \dots \dots (4)$$

であるから、計算の過程でバンドフィルター (実部に  $1/\omega$ 、虚部に  $1/\omega^2$ ) を使うため、 $GF$  にはスペクトルバンド幅の影響が陰に含まれている。これは、同じ波高分布に従う波列に対して異なる値を取ることがあり、スペクトル形状が異なる波列に対して絶対評価が難しく、 $GF$  の値が大きい場合でも広義の意味では波群が必ずしも発達

\* 学生会員 工修 岐阜大学大学院 工学研究科 (日本学術振興会特別研究員)

\*\* 正会員 工博 岐阜大学教授 工学部土木工学科

しているとは言えないことを表している、それゆえ、 $GF$ の値は kurtosis で代表される波高分布の変化とスペクトル幅の影響の2つの要因に関わると言える。

### 3. 変換の定義

上述したように、連長により波群を捉えた場合、時系列に対する情報や水面の変動値に関する情報は失われ、 $GF$ を用いるとその値は波高だけでなくスペクトル幅に影響される。そこで、周期、時刻および広がり全てをパラメータとして含む関数展開を考え、従来の手法より波群の詳細な情報を評価する方法を考えることにする。

#### 3.1 定 義

1次元のデータ列に対し、データの持つ時間・スケール(周波数)および集中度(連なり)の情報を調べるため、これらをパラメータとする関数展開を考える。ある関数系  $\phi(t)$  を選び、次式の3パラメータの関数系を作る。

$$\phi^{(\alpha, \beta, \gamma)}(t) = \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \phi\left(\alpha, \frac{t-\beta}{\gamma}\right) \quad (5)$$

$\phi^{(\alpha, \beta, \gamma)}(t)$  は、互いに相関関数系であり、この関数を用いて水面変動  $\eta(t)$  を展開する。

$$W(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\sqrt{c_\phi}} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t) \phi^{(\alpha, \beta, \gamma)*}(t) dt \quad (6)$$

ここで、 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$  (実数体) であり、 $\alpha$  は集中度、 $\beta$  は時刻のパラメータ、 $\gamma$  は周期(周波数の逆数)のパラメータ、 $*$  は複素共役を意味する。 $c_\phi$  は、 $\phi(t)$  のフーリエ係数  $\tilde{\phi}(\omega)$  を用いて次式で与えられる。

$$c_\phi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{\phi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \quad (7)$$

$c_\phi$  が有界であれば、式(6)は次式の逆変換を持つ。

$$\eta(t) = \frac{1}{\sqrt{c_\phi}} \iiint_{-\infty}^{\infty} W(\alpha, \beta, \gamma) \phi^{(\alpha, \beta, \gamma)}(t) \frac{d\alpha d\beta d\gamma}{\gamma^2} \quad (8)$$

但し、 $\phi(t)$  および  $\eta(t)$  は  $L^2(\mathbf{R})$  でなければならない。

また、逆変換(8)が成立するための条件式(7)は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 0 \quad (9)$$

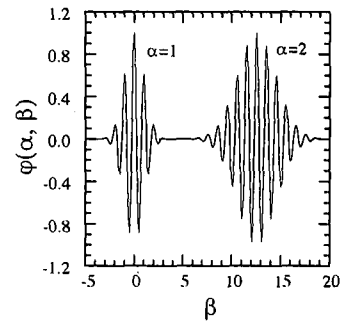
と同値である。

基底関数  $\phi(t)$  としては、次節で述べる様な整合性からガウス分布に振動成分を掛け合わせ、スケール項を付けた関数、

$$\phi^{(\alpha, \beta, \gamma)}(t) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\gamma}\right)^2\right] \exp\left[i\omega_p\left(\frac{1}{\gamma}-\beta\right)\right] \quad (10)$$

を与える。

ここで注意したいのは、逆変換は  $L(\mathbf{R}^2)$  の意味では成り立つが、 $L(\mathbf{R})$  の意味では成り立たないことである。これは、関数展開に用いた基底関数系  $\phi^{(\alpha, \beta, \gamma)}(t)$  が直交関数



図一 基底関数の形状 ( $\alpha=1$  および  $2$ )

系でなく、しかも1次従属であることに起因している。基底関数系の1次従属性は、式(8)によって得られる  $W(\alpha, \beta, \gamma)$  の1次従属性を引き起こし、データとは無関係なパターンを生み出してしまふ。しかし、 $W^2(\alpha, \beta, \gamma)$  にフーリエ変換の Parseval の等式で与えられるようなエネルギー分配の意味を与えなければ、その工学的な応用性はかなり広いと思われる。

$\gamma=1$  とスケール変化を一定とした場合、式(5)は次のように簡略化できる。

$$G(\alpha, \beta) = W(\alpha, \beta, 1) \quad (11)$$

$$\phi^{(\alpha, \beta)}(t) = \phi^{(\alpha, \beta, 1)}(t) \quad (12)$$

これを用いると、式(5)および式(6)は代表周波数  $\omega_p$  を用いて次のように書き換えることができる。

$$G(\alpha, \beta) = \frac{1}{c_\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t) \phi^{(\alpha, \beta)*}(t) dt \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \phi^{(\alpha, \beta)}(t) &= \phi(\alpha, t-\beta) \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2\right] \exp[i\omega_p(t-\beta)] \quad (14) \end{aligned}$$

基底関数として式(14)で表される関数系を用いることは、データの{代表的( $\gamma=1$ )な広がり}と、その時間的な集中度を調べることを意味する。図一は  $\alpha=1$  および  $2$  の場合の  $\phi(t)$  の形状であり、 $\alpha$  の値が大きくなると包絡波形の収束が遅くなることがわかる。

#### 3.2 従来の変換との対応

いま仮に、 $\alpha=\infty, \beta=0$  と置き(つまり、データの時間的な広がりおよびその起因時刻に関しては考えない)、基底関数を1パラメータに簡略化できるとする( $W \Rightarrow V(\gamma), \phi(t) \Rightarrow \phi(\gamma, t)$ )。

$$V(\gamma) = W(\infty, 0, \gamma) \quad (15)$$

$$\phi(\gamma, t) = \phi^{(\infty, 0, \gamma)}(t) \quad (16)$$

これより、式(5)および式(6)は定数  $c_\phi$  を用いて次のように書き換えることができる。

$$V(\gamma) = \frac{1}{c_\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t) \phi^{(\gamma)*}(t) dt \quad (17)$$

$\gamma$  はスケールに関する変数であるから、 $\omega = \omega_p/\gamma$  と置く

と、式 (10) は、

$$\phi(\omega, t) = \phi(0, 0, \omega_p/\gamma) = \exp(i\omega t) \quad \cdots (18)$$

となる。式 (7) に式 (16) を代入すれば  $c_\phi = 2\pi$  が得られ、式 (17) はフーリエ変換に帰着される。

$$V(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t) \exp(i\omega t) dt \quad \cdots (19)$$

また、集中度を一定、つまり  $\alpha=1$  と置き、基底関数系を簡素化した場合を考えると、

$$T(\beta, \gamma) = W(1, \beta, \gamma) \quad \cdots (20)$$

$$\Psi^{(\beta, \gamma)} = \psi^{(1, \beta, \gamma)}(t) \quad \cdots (21)$$

これを用いると、式 (5) および式 (6) は定数  $C_\Psi$  を用いて次のように書き換えることができる。

$$T(\beta, \gamma) = \frac{1}{C_\Psi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t) \Psi^{(\beta, \gamma)*}(t) dt \quad \cdots (22)$$

$$\begin{aligned} \Psi^{(\beta, \gamma)}(t) &= \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \Psi\left(\frac{t-\beta}{\gamma}\right) \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}t^2\right] \exp\left[i\omega_p\left(\frac{t}{\gamma}-\beta\right)\right] \quad \cdots (23) \end{aligned}$$

これは、Morlet のアナライジング・ウェーブレットを用いた連続ウェーブレット変換に他ならない。

### 3.3 計算方法

式 (13) を実際に計算する場合は、データの周期性を仮定し、 $\phi(t)$  のフーリエ変換を以下のように表す。

$$\begin{aligned} \phi^{(\alpha, \beta)}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{(\alpha, \beta)}(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= e^{-i\omega\beta} \tilde{\phi}(\alpha, \omega) \quad \cdots (24) \end{aligned}$$

ここで、 $\tilde{\phi}(\alpha, \omega)$  は、 $\phi(\alpha, t)$  のフーリエ変換であり、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\alpha^2(\omega - \omega_p)^2\right] \quad \cdots (25) \end{aligned}$$

式 (13) に式 (24) を代入すると次式を得る。

$$G(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{C_\phi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\eta}(\omega) \tilde{\phi}^{(\alpha, \beta)*}(\alpha, \omega) d\omega \quad \cdots (26)$$

ここで、データの周期を  $T$  とすると、水面変動  $\eta(t)$  は次式のようにフーリエ級数展開される。

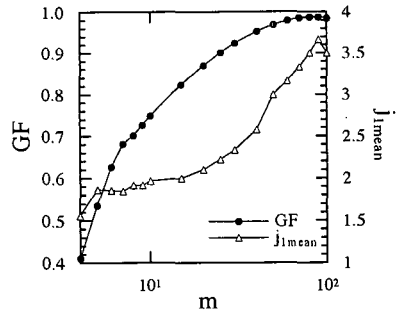
$$\eta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i \frac{2\pi n}{T} t\right) \quad \cdots (27)$$

$$\tilde{\eta}(\omega) = 2\pi a_n \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right) \quad \cdots (28)$$

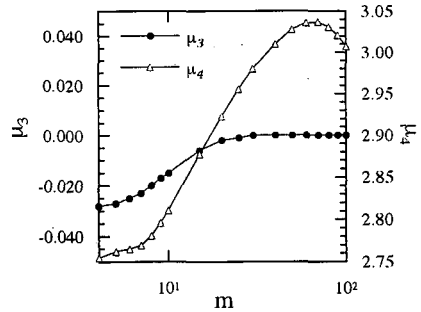
ここで、 $a_n$  および  $\tilde{\eta}(\omega)$  は複素フーリエ係数であり、 $\delta(\cdot)$  はディラックのデルタ関数を意味する。

式 (27) および (28) より式 (26) の離散表示は、

$$\begin{aligned} G(\alpha, \beta) &= \frac{1}{\sqrt{C_\phi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \tilde{\phi}^*\left(\alpha, \frac{2\pi n}{T}\right) \exp\left(i \frac{2\pi n}{T} \beta\right) \\ &\quad \cdots (29) \end{aligned}$$



(a) GF および  $j_{\text{mean}}$  とスペクトルバンド幅  $m$  の関係



(b) skewness  $\mu_3$  および kurtosis  $\mu_4$  とスペクトルバンド幅  $m$  の関係

図-2 各種統計量の関係

で与えられ、特に  $T=1$  の場合、次式のように表される。

$$G(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{C_\phi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \tilde{\phi}^*(\alpha, 2\pi n) \exp(i2\pi n\beta) \quad \cdots (30)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{C_\phi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\alpha^2(\omega - \omega_p)^2\right] \\ &\quad \cdot \exp(i2\pi n\beta) \quad \cdots (31) \end{aligned}$$

式 (31) より、係数  $G(\alpha, \beta)$  は式 (27) および式 (30) もしくは式 (31) を計算することにより得られる。また、 $\alpha \in [0 + \delta_+ + \infty]$  であるが、計算の都合上 1.5 で打ち切る。

## 4. 適用結果

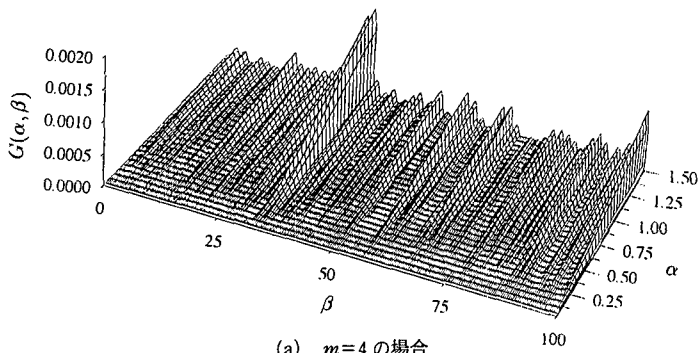
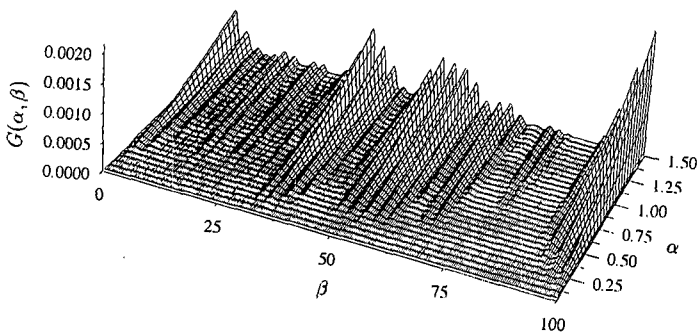
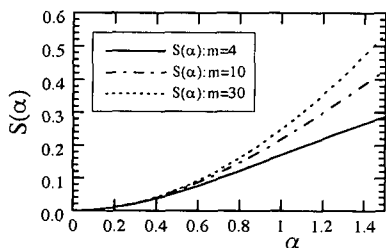
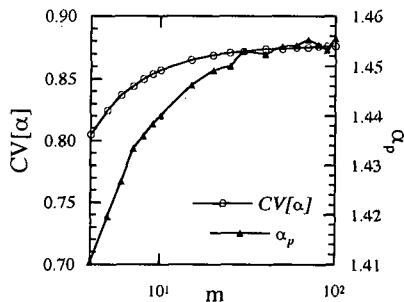
### 4.1 初期条件

初期スペクトルを次式で表される Wallops 型スペクトルとして持つ不規則波を合成し、代表波形勾配  $k_p a$  を 0.1、スペクトルバンド幅パラメータ  $m$  を 4 から 100 まで 18 通り、合計 20 ケースを解析対象とした。

$$S(f) df = \alpha H_{1/3}^2 f_p^{-1} \left(\frac{f}{f_p}\right)^{-m} \exp\left[-\frac{m}{4} \left(\frac{f}{f_p}\right)^{-4}\right] df \quad \cdots (32)$$

$$\eta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2S(f_n)} \cos(2\pi f_n t + \epsilon_n) \quad \cdots (33)$$

ここで、 $\alpha$  は  $H_{1/3} = 4.004 \sqrt{\int_0^x S(f) df}$  を満たす定数、 $f_p$  はスペクトルのピーク周波数、 $a_{1/3}$  は有義波高の 1/2、 $m$  は

(a)  $m=4$  の場合(b)  $m=30$  の場合図-3 式 (13) により得られた係数  $G^2(\alpha, \beta)$  の分布図-4 平均集中度  $S(\alpha)$  に及ぼすスペクトル幅の影響図-5 代表集中度  $\alpha_p$  および  $CV[\alpha]$  とスペクトル幅の関係

スペクトルバンド幅パラメータ,  $\varepsilon_n$  は  $[0, 2\pi]$  の間で分布を持つ一様乱数列であり、一波列当り 400~500 波としている。

#### 4.2 解析結果

図-2 は,  $m$  と  $GF$ , 平均連長  $j_{\text{mean}}$ , skewness および kurtosis の関係を示す。 $GF$  および  $j_{\text{mean}}$  共にスペクトル幅が狭くなるほど大きな値を取っており,  $j_{\text{mean}}$  だけでなく,  $GF$  もスペクトル幅に大きく影響を受けていることがわかる。これは,  $GF$  が式 (3) の関係から大きな波高を持つ波の出現確率に関わっているだけでなく, スペクトル幅の影響も同時に含んでいることを示し,  $GF$  波群を表すパラメータとしては不適切な面があることを表している。また, skewness の値はほぼ 0 であるが, kurtosis

の値はスペクトル幅が狭帯である場合はほぼ 3, 広帯になると 0.28 前後となり, Gauss 分布からやや外れる傾向がある。

これらの特性をもつ不規則波列に対して式 (13) で定義された関数展開を適用することにする。図-3 は  $m=4$  および 30 の場合の結果であり,  $m=4$  の場合が  $\alpha$  の値が大きくなるにつれ係数  $G^2(\alpha, \beta)$  の変動分布が  $\beta$  方向に離散的になるのに対し,  $m=30$  では前後の変化に対して緩やかに変化するようになっている。この,  $\alpha$  軸方向の  $G^2(\alpha, \beta)$  の変化率は波列の連に対応しているため, この集中度  $\alpha$  の変化を調べることで連の特性が, また時間変化  $\beta$  について調べることができる筈である。そこで

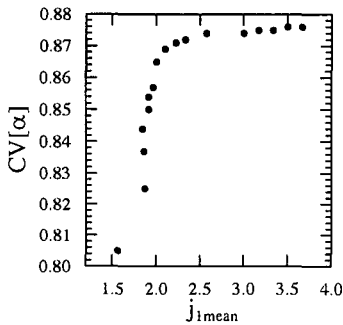
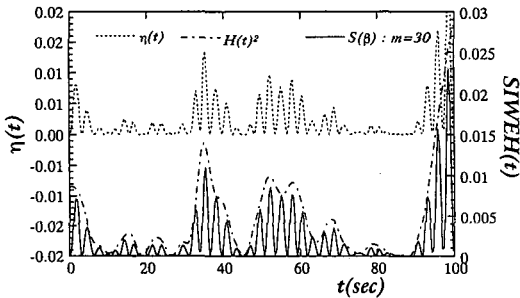
図-6 代表集中度  $\alpha_p$  と平均連長  $j_{\text{mean}}$  の関係図-7  $S_\beta(\beta)$  と水位変動の 2 乗値  $\eta^2(t)$  および包絡波形の 2 乗値  $H^2(t)$  の時間変化

図-4 に示すのは、係数  $G(\alpha, \beta)$  を時間変化成分  $\beta$  について観測区間  $[0, T_0]$  において積分した  $S_\alpha(\alpha)$  とスペクトルバンド幅の関係である。

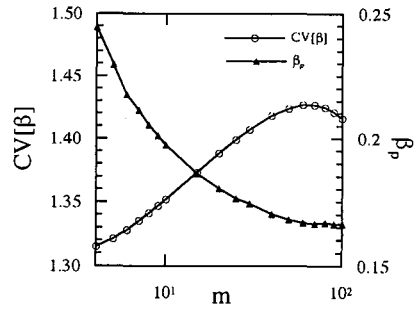
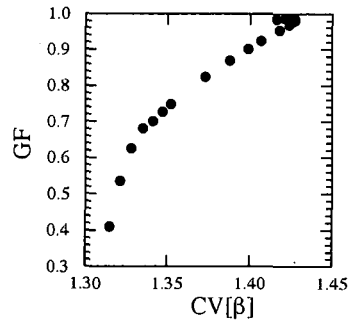
$$S_\alpha(\alpha) = \int_0^{T_0} |G(\alpha, \beta, 1)|^2 d\beta \quad \dots\dots\dots (34)$$

図より、平均的に見た  $\alpha$  の変化率はスペクトルバンド幅に大きく影響されており、 $S_\alpha(\alpha)$  の分布から平均的な集中度つまり波列の連特性を調べるにより可能であることがわかる。図-5 に示すのは、 $S_\alpha(\alpha)$  の代表値として  $\alpha$  の重心  $\alpha_p$  および変動係数  $CV[\alpha]$  とスペクトル幅の関係であり、ここで対象としている線形波列の場合の代表的な集中度(重心)  $\alpha_p$  はスペクトル幅に依存していることがわかる。また、図-6 は代表的な集中度  $\alpha_p$  と設定波高を  $H_{1/3}$  とした場合の平均連長  $j_{\text{mean}}$  の関係であり、集中度の代表量は平均連長と良く対応していることがわかる。

図-7 は、係数  $G$  を  $\alpha$  について積分した  $S_\beta(\beta)$ 、 $\eta^2(t)$  および Hilbert 変換による包絡波形の比較である。

$$S_\beta(\beta) = \int_{0+\epsilon}^{1.5} |G(\alpha, \beta, 1)|^2 d\alpha \quad \dots\dots\dots (35)$$

$S_\beta$  は包絡波形の変化と良く対応しており式 (13) の変数変換によっても波列の変化を時間的に捉えられる。そこで、 $S_\beta(\beta)$  を用いて波列のエネルギー変化について調べ

図-8 代表変動  $S_\beta(\beta)$  の代表値  $\beta_p$  および  $CV[\beta]$  とスペクトル幅の関係図-9 代表変動  $CV[\beta]$  と  $GF$  の関係

るため、図-8 に  $S_\beta$  の代表量としてそのピーク値  $\beta_p$  および変動係数  $CV[\beta]$  の関係を示す。

$$\beta_p = \frac{\int \omega \tilde{G}(\omega) \tilde{G}^*(\omega) d\omega}{\int \tilde{G}(\omega) \tilde{G}^*(\omega) d\omega} \quad \dots\dots\dots (36)$$

ここに、 $\tilde{G}$  は  $G$  の複素フーリエ係数であり、 $\beta_p$  はスペクトル幅が狭くなるにつれ減少し、1 に近づくことがわかる。つまり、スペクトル幅が狭くなると波列の変化は緩やかになり、変動係数  $CV[\beta]$  の値は減少し、図-2 の結果と逆の傾向となっている。図-9 は、 $CV[\beta]$  と  $GF$  との関係を示す。スペクトル幅に関係無く両者の間には一義的な関係が存在することがわかる。

## 5. 結 語

以上、平均連長および  $GF$  の持つ意味、他の波形統計量との関連性およびその問題点について検討を行い、これを踏まえた波群の表示方法についての提案とその適用について試みた。フーリエ変換およびウェーブレット変換を含む関数展開を用いて波形の解析を行った結果、集中度として連長に相当する量が、また時系列特性として  $GF$  に相当する量一つの関数展開の中から得られた。

最後に、本研究は文部省科学研究費(特別員研究費)による成果であることを付記し、ここに深謝する。