

峰高とその時刻における包絡線との差の確率分布の理論

北 野 利 一*・間 瀬 肇**

1. はじめに

狭帯域スペクトル波のゼロアップクロス法で定義される波高は、およそ Rayleigh 分布に従うであろうことが数々の観測結果により確認されている。そもそも、Rayleigh 分布は、線形不規則波の包絡線の関数値の確率分布である。Longuet-Higgins (1952) により適用されたのは、正確に言うと、ゼロバンドという厳密な狭帯域スペクトルを持つ特殊な不規則波の波高分布である。すなわち、普通の意味の狭帯域スペクトルを有する線形不規則波の波高分布は導かれてはいない。

本村・太田 (1993) は、1) 峰の頂点は包絡線を通らないこと、2) 峰の頂点の時刻は不等間隔であるため、その時刻の包絡線の値の確率分布は Rayleigh 分布であるとは限らないことを指摘し、数値シミュレーションで包絡線と峰の差の確率分布および峰の時刻での包絡線の値の確率分布を求め、それらに基づいて波高分布を求めた。

本研究では、数値シミュレーションで得られた包絡線と峰の差の確率分布を数学的に導き、それに基づき峰高分布を議論する。

2. 背 景

水位変動の関数(少なくとも一階微分可能な連続関数)を Fourier 級数表示し、それを変形して、

$$\begin{aligned}\eta(t) &= \sum c_n \cos(\sigma_n t - \varepsilon_n) \\ &= I_c(t) \cos \sigma_m t - I_s(t) \sin \sigma_m t \\ &= A(t) \cos(\sigma_m t - \phi(t)) \dots\dots\dots (1)\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}I_c(t) &= \sum c_n \cos((\sigma_n - \sigma_m)t - \varepsilon_n) \\ I_s(t) &= \sum c_n \sin((\sigma_n - \sigma_m)t - \varepsilon_n)\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

と表す時、 I_c , I_s は確率変数であり、中心極限定理により 2 変数 Gauss 分布を得る。そして、変数変換

$$I_c = A \cos \phi, \quad I_s = A \sin \phi \dots\dots\dots (3)$$

を行い、不要な変数 ϕ で積分することにより、次に示す Rayleigh 分布が得られる。

$$r(A)dA = \frac{A}{m_0} \exp\left(-\frac{A^2}{2m_0}\right)dA \dots\dots\dots (4)$$

ただし、 m_0 はスペクトルの最低次のモーメントである。以上により、確かに包絡線の関数値の確率分布は Rayleigh 分布であることがわかる。

Longuet-Higgins (1975, 1983) が波高と周期の概略的な結合分布を導くために用いた確率変数 I_c , I_s とその時間微分の確率変数 I'_c , I'_s の結合分布は

$$\begin{aligned}p(I_c, I_s, I'_c, I'_s) dI_c dI_s dI'_c dI'_s \\ = \frac{dI_c dI_s dI'_c dI'_s}{(2\pi)^2 \nu^2 \sigma_m^2 m_0^2} \exp\left\{-\frac{I_c^2 + I_s^2}{2m_0} - \frac{I'^2_c + I'^2_s}{2\nu^2 \sigma_m^2 m_0}\right\} \dots\dots\dots (5)\end{aligned}$$

である。ここで、 ν はスペクトルの狭帯域の程度を表すパラメータで、以下のように定義される。

$$\nu = \sqrt{(m_2 m_0)/m_1^2 - 1} \dots\dots\dots (6)$$

次に、時間 $t \in (-\infty, \infty)$ に対し、ある水位変動の関数 $\eta(t)$ が与えられた時、実数パラメータ ρ および α を用いて以下に定義される水位変動の関数列、“狭帯化族 I”

$$\eta^{(\rho 1)}(t) = A(t) \cos(\sigma_m t / \rho - \phi(t)); \quad (0 < \rho \leq 1) \dots\dots\dots (7)$$

と“狭帯化族 II”

$$\eta^{(\alpha 1)}(t) = A(t/\alpha) \cos(\sigma_m t - \phi(t/\alpha)); \quad (1 \leq \alpha \leq \infty) \dots\dots\dots (8)$$

について考える(北野 (1995) を参照)。時間領域で“狭帯化族 I”は包絡線を保持し、その中で波が速く振動していく関数列であり、“狭帯化族 II”は平均角周波数を保持し、包絡線の変化率が小さくなっていく関数列である。それぞれの関数列のスペクトルモーメントは

$$m_k^{(\rho 1)} = \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} m_j \left(\frac{1-\rho}{\rho} \frac{m_1}{m_0}\right)^{k-j} \dots\dots\dots (9)$$

$$\begin{aligned}m_k^{(\alpha 1)} &= \frac{1}{\alpha^{k+1}} \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} m_j \left((\alpha-1) \frac{m_1}{m_0}\right)^{k-j} \\ &\dots\dots\dots (10)\end{aligned}$$

* 工 修 大阪府

** 正会員 工 博 京都大学助教授 工学部土木工学科

となり、式(6)を用いて、それぞれの帯域幅パラメータを求めると

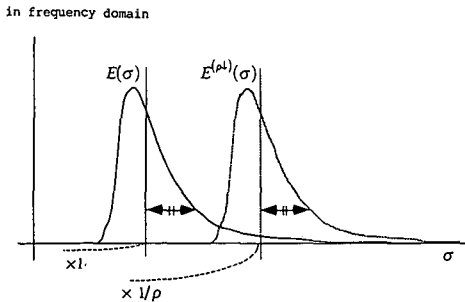
$$\nu^{(\rho 1)} = \rho \nu(\leq \nu) \quad (11)$$

$$\nu^{(\alpha 1)} = \rho / \alpha (\leq \nu) \quad (12)$$

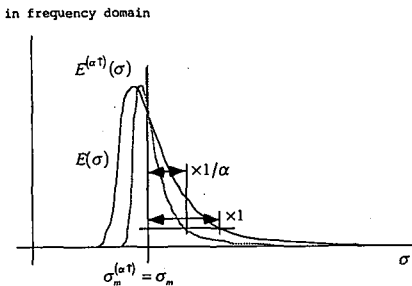
となる。 $\rho \rightarrow 0$ および $\alpha \rightarrow \infty$ で狭帯化する事がわかる。周波数領域で“狭帯化族 I”は、図-1(a)に示すように、元のスペクトル形が高周波側に並行移動するのに対し、“狭帯化族 II”は、図-1(b)のように通常の意味の狭帯化が起こる。

時間領域での二つの関数列は相対的なものである。以下、狭帯化を考える際、時間領域では“狭帯化族 I”を、周波数領域では“狭帯化族 II”を考える。この時、ゼロバンドスペクトル波は、狭帯化の極限 $\rho \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow \infty$ として表現される。

水位変動の関数 $\eta(t)$ と包絡線の関数 $\pm A(t)$ が接する時刻 t_{amp} の包絡線の関数の絶対値 $A(t_{amp})$ を、新たに“amplitude”と名づける。包絡線の関数は正・負あるので“crest-amplitude” $A(t_{c,amp})$ および“trough-amplitude” $-A(t_{t,amp})$ が存在する。この“amplitude”という概念を用いると、ゼロバンドスペクトル波において、引き続く二つゼロアップクロス時刻の間に $t_{c,amp}$ と $t_{t,amp}$ が一つずつ存在し、その時の“crest-amplitude”と“trough-amplitude”の大きさの和はゼロアップクロス法による



(a) 狭帯化族 I



(b) 狭帯化族 II

図-1 狭帯化族 I および II の周波数領域での変化

波高の下限の評価となり、その上限は実際の峰と谷の時の包絡線の値の和で評価できる。包絡線が保持される“狭帯化族 I”に対して考えると、時間軸上の任意の区間において、極限 $\rho \rightarrow 0$ で、無限個のゼロアップクロス点が稠密に存在する。したがって、正・負の包絡線上に“crest-amplitude”および“trough-amplitude”も稠密に存在する。結局、一種のはさみうちの方法で、ゼロアップクロス法による波高は、包絡線の値の2倍になることがわかる。以上のことを記号で表現すると

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0} \{ |\eta^{(\rho 1)}(t_{crest,n,\rho})| + |\eta^{(\rho 1)}(t_{trough,n,\rho})|; n \in Z \} \\ & \geq \lim_{\rho \rightarrow 0} \{ A(t_{c,amp,n}) + A(t_{t,amp,n}); n \in Z \} \\ & = \{ 2A(t); n \in R \} \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0} \{ |\eta^{(\rho 1)}(t_{crest,n,\rho})| + |\eta^{(\rho 1)}(t_{trough,n,\rho})|; n \in Z \} \\ & \geq \lim_{\rho \rightarrow 0} \{ A(t_{crest,n}) + A(t_{trough,n}); n \in Z \} \\ & = \{ 2A(t); n \in R \} \quad (14) \end{aligned}$$

である。ただし、 $t_{crest,n,\rho}$ および $t_{trough,n,\rho}$ はパラメータ ρ によって決まる実際の峰と谷の時刻の列を整数 n で表したものであり、 $t_{c,amp,n,\rho}$, $t_{t,amp,n,\rho}$ も“amplitude”に対して同様の意味を持つ。 Z および R はそれぞれ整数および実数の集合を表す。以上より、極限 $\rho \rightarrow 0$ で厳密に、波高の値の集合は包絡線の値の2倍の集合になり、波高が Rayleigh 分布に従うことがわかる。

以上の議論で“amplitude”という概念の有効性が確かめられた。これを、狭帯域スペクトル波に適用する。表記の簡便さのために、時系列 $\eta(t)$ に対してその $A(t_{amp})$, $A(t_{c,amp})$ および $A(t_{t,amp})$ の集合を $Amp\langle \eta \rangle$, ${}^c Amp\langle \eta \rangle$ および ${}^t Amp\langle \eta \rangle$ と記す。また、その包絡線の値の集合を $Env\langle \eta \rangle$ と記す。すなわち、

$$Env\langle \eta \rangle = \{ A(t); t \in R \} \quad (15)$$

である。そして、水位変動の関数 $\eta(t)$ に対して、次に定義する水位変動の関数列，“エルゴード族”

$$\eta^{(\beta)}(t) = A(t) \cos(\sigma_m(t + \beta) - \phi(t)) \quad (16)$$

を定義する。これは全ての $\beta \in [0, 2\pi/\sigma_m]$ について同一の包絡線関数を持ち、また

$$\begin{aligned} \eta^{(\beta)}(t) = & \sum \{ (c_n \cos(\phi_n - \sigma_m \beta)) \cos \sigma_n \\ & + \{ c_n \sin(\phi_n - \sigma_m \beta) \} \sin \sigma_n \} \quad (17) \end{aligned}$$

であるので、スペクトルが同一であるという性質がある。逆に、この二つの性質を持つ関数列は、この“エルゴード族”に限られることも示せる(北野, 1995)。したがって、“エルゴード族”は同じ統計的特性を持つ。一つの“エルゴード族”で、パラメータ β を $[0, 2\pi/\sigma_m]$ で変化させる

と、

$$\bigcup_{\beta \in [0, 2\pi/\sigma_m)} \{e^{i\beta} \text{Amp} \langle \eta^{(\beta)} \rangle\} \\ = \bigcup_{\beta \in [0, 2\pi/\sigma_m)} \{e^{i\beta} \text{Amp} \langle \eta^{(\beta)} \rangle\} = \text{Env} \langle \eta \rangle \dots \dots \dots (18)$$

となり、一つの“エルゴード族”の“crest (trough)-amplitude”の集合は包絡線の関数値の集合と同じ性質を持つことが示される。これより、“amplitude”の確率分布が包絡線の関数値の確率分布と同じ性質を持つこと、つまり、Rayleigh 分布であることがわかる。加えて、一般に、峰は“crest-amplitude”の近傍に存在し、そうでない場合の確率は、狭帯域スペクトル波の場合、小さいことが示される（北野，1995）。

3. 包絡線と峰の差の確率分布

水位変動の関数を“amplitude”の近傍で Taylor 展開して、峰（谷）となる時刻 $t_{c(t)}$ を求めると

$$t_{c(t)} = t_{amp} \\ + \frac{I_c(t_{amp})I'_c(t_{amp}) + I_s(t_{amp})I'_s(t_{amp})}{\sigma_m^2(I_c^2(t_{amp}) + I_s^2(t_{amp}))} + o(\nu^2) \\ \dots \dots \dots (19)$$

である。これを用いて、包絡線と峰の差 δ_- および“amplitude”と峰との差 δ_+ を求めると

$$\delta_- = \delta_+ \\ = \frac{\{I_c(t_{amp})I'_c(t_{amp}) + I_s(t_{amp})I'_s(t_{amp})\}^2}{2\sigma_m^2\{I_c^2(t_{amp}) + I_s^2(t_{amp})\}^{3/2}} + o(\nu^3) \\ \dots \dots \dots (20)$$

となる。 δ_- と δ_+ は等しく（故に、 $\delta = \delta_- = \delta_+$ とおく）、また、その大きさが ν^2 のオーダーである（木村・太田，1993）ことも確認できる。次の変数変換

$$\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \zeta(t) \end{pmatrix} = R(t) \begin{pmatrix} I_c(t) \\ I_s(t) \end{pmatrix}, \quad R(t) = \frac{1}{A(t)} \begin{pmatrix} I_c(t) & I_s(t) \\ -I_s(t) & I_c(t) \end{pmatrix} \\ \dots \dots \dots (21)$$

を用いると、 δ は

$$\delta = \frac{\xi^2(t_{amp})}{2\sigma_m A(t_{amp})} + o(\nu^3) \dots \dots \dots (22)$$

と表せる。変換が回転（等長かつ合同な変換）であるため、直ちに、確率変数 I_c 、 I_s 、 I'_c 、 I'_s の結合分布の式(3)は、

$$p(A, \phi, \zeta, \xi) dA d\phi d\zeta d\xi \\ = \frac{AdA d\phi d\zeta d\xi}{(2\pi)^2 \nu^2 \sigma_m^2 m_0} \exp\left(-\frac{A^2}{2m_0} - \frac{\zeta^2 + \xi^2}{2\nu^2 \sigma_m^2 m_0}\right) \\ \dots \dots \dots (23)$$

と書き換えることができる。 δ は正の変数であることに注意して、式 (22) を用いて式 (23) を変換し、不要な変数 ϕ および ξ で積分して、

$$p(A, \delta) dA d\delta = \frac{A^{3/2} dA d\delta}{\nu \sqrt{\pi} \delta^{1/2} m_0^{3/2}} \\ \cdot \exp\left(-\frac{A^2}{2m_0} - \frac{A\delta}{\nu^2 m_0}\right) \dots \dots \dots (24)$$

を得る。ここで、 δ を

$$\delta = (\nu^2 \sqrt{m_0}) \dots \dots \dots (25)$$

のように無次元化し、さらに不要な変数 A で積分して、以下の δ の確率分布を得る。

$$p(\delta) d\delta = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\delta^2\right) Lg(\delta) d\delta}{\sqrt{\pi\delta}} \dots \dots \dots (26)$$

ここで、 $Lg(x)$ は次に定める関数である。

$$Lg(x) = \int_x^\infty (y-x)^t \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) dy \dots \dots \dots (27)$$

式 (25) の無次元化により得られる式 (26) はパラメータ ν を含まないので、次元量 δ の確率分布は ν に関して相似形であることがわかる。また、式 (26) の平均値を求めると、

$$\langle \delta \rangle = \int_0^\infty \delta p(\delta) d\delta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \dots \dots \dots (28)$$

であり、これを次元量で表せば

$$\langle \delta \rangle = \frac{\nu^2}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2} m_0} \dots \dots \dots (29)$$

となる。

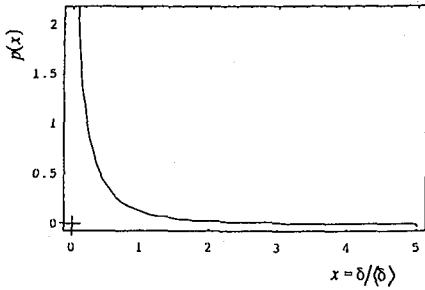
木村・太田 (1993) が用いた Wallops 型スペクトル

$$S(f) df = (f/f_p)^{-\tau} \exp\left(-\frac{\pi}{4} \{1 - (f/f_p)^{-4}\}\right) df \dots (30)$$

について式 (29) の値を表-1 に示す。Wallops 型スペクトルの帯域幅パラメータ ν は、以下のようにガンマ関数を用いて表せる。

表-1 Wallops スペクトル波の δ の平均値

τ	ν	木村・太田(1993)	式 (29)
4	0.6436	0.0844	0.2368
5	0.4247	0.0541	0.0944
6	0.3327	0.0378	0.0543
8	0.2463	0.0234	0.0270
10	0.2032	0.0170	0.0171
20	0.1252	0.0078	0.0053



(a) 理論結果

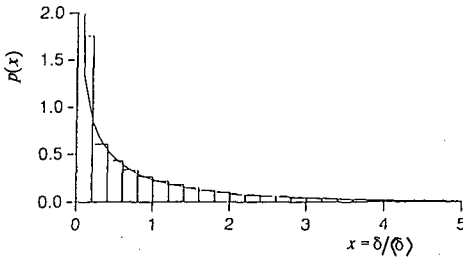

 (b) 数値シミュレーション結果
(木村・太田, 1993)

図-2 の確率分布

$$\nu = \sqrt{\left\{ \Gamma\left(\frac{r-3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{r-1}{4}\right) / \Gamma^2\left(\frac{r-2}{4}\right) \right\} - 1} \quad \dots\dots\dots (31)$$

広帯域の場合 ($r=4$) を除いて、理論による値は、木村・太田 (1993) の数値シミュレーション結果の良い近似値を与えている。変数 $\delta / \langle \delta \rangle$ の確率分布を図-2(a) に示す。これを木村・太田 (1993) のシミュレーション結果である図-2(b) と比較すると概ね一致するが、理論分布は、その確率変数の値が大きいところで過小値をとることに注意する。これは、上記 2. で述べたように、わずかの確率で峰 (谷) の付近で “amplitude” を持たず、また、その時には峰 (谷) は包絡線からずいぶんかけ離れることが原因となっている。すなわち、包絡線と峰の差の正確な分布はわずかにパラメータ ν に依存する部分が存在し、厳密に相似形ではない。

A および δ の結合分布である式 (24) を用いて δ の周辺分布を求めると

$$p(\delta|A)d\delta = \frac{\delta d\delta}{\nu \sqrt{\pi m_0}} \sqrt{\frac{A}{\delta}} \exp\left(-\frac{A\delta}{\nu^2 m_0}\right) \dots\dots\dots (32)$$

を得る。 $x = \sqrt{\delta}$ と置き換えると、式 (32) は

$$p(x|A)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi \nu^2 m_0 / (2A)}} \frac{dx}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{x^2}{2 \cdot \nu^2 m_0 / (2A)}\right) \dots\dots\dots (33)$$

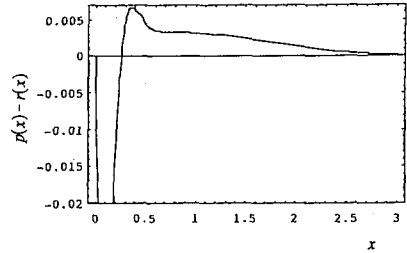


図-3 式 (36) の峰高分布と式 (4) の Rayleigh 分布の差

となる。これは平均値 0、分散値 $\nu^2 m_0 / (2A)$ の正領域 Gauss 分布 (truncated normal) を表し、分散値に A を含むことから、大きい峰高 ($\cong A$) に対し δ のばらつきが狭くなる。

4. 狭帯域波の峰高分布

式 (19) で得られた時刻を基にしてその時の水位変動、すなわち、峰高を求めると次のようである。

$$\eta(t_{c(t)}) = A(t_{amp}) + \delta + o(\nu^3) \dots\dots\dots (34)$$

その結果、式 (19) において

$$\left(\frac{\bar{\eta}_c}{A}\right) = \left(\frac{A + \delta}{A}\right) \dots\dots\dots (35)$$

と変換し、変数 x で積分して以下の峰高分布を得る。

$$p(\bar{\eta}_c)d\bar{\eta}_c = \exp\left(-\frac{\bar{\eta}_c^2}{2\nu^2(2-\nu^2)}\right) d\bar{\eta}_c \int_0^{\bar{\eta}_c} \frac{(\bar{\eta}_c - x)^3}{\nu \sqrt{\pi x}} \cdot \exp\left\{-\frac{(2-\nu^2)}{2\nu^2} \left(x - \frac{1-\nu^2}{2-\nu^2} \bar{\eta}_c\right)^2\right\} dx \dots\dots\dots (36)$$

これはあくまでも $\nu \rightarrow 0^+$ の解であり、水位変動の自乗平均値 $\sqrt{m_0}$ で無次元化した ν のオーダーの峰高について、必ずしも峰高を表しているわけではない (北野, 1995)。式 (36) の具体例として、帯域幅パラメータ $\nu=0.1$ の時の分布形と Rayleigh 分布の差を図-3 に示す。Rayleigh 分布の極大値周辺でその差が正になるのが特徴である。

5. 結 び

本研究で得られた知見は、まず、ゼロバンドスペクトル波という特殊な波の一つの具体化である。次に、峰高という離散量を、“amplitude” と “エルゴード族” という概念を用いて連続量に移し換え、正確な波高分布を知るための一つの手がかりを得たことである。これにより、峰とその時刻における包絡線の差の分布、および峰高分布が得られた。ただし、これらも厳密解というわけではない。これは、スペクトル形状をパラメータ ν のみで扱っていることに起因する。スペクトル形状をさらに的確に表わせるパラメータを確率分布に取り込めば、さらに精密な解が得られるはずである。

本研究での成果に基づいたゼロアップクロス法による波高(峰とそれに引き続く谷の大きさの和)については、今後研究の課題である。

参 考 文 献

- 北野利一(1995): 不規則波の統計的特性における包絡線の役割, 京都大学大学院工学研究科修士論文, 33 p.
- 木村 晃・太田隆夫(1993): ゼロクロス波で定義した不規則波の波高の確率特性について, 海岸工学論文集, 第40巻, pp.

146-150.

- Longuet-Higgins, M. S. (1952): On the statistical distribution of the heights of sea waves, *J. Mar. Res.*, Vol. 11, pp. 245-266.
- Longuet-Higgins, M. S. (1975): On the joint distribution of wave periods and amplitudes of sea waves, *J. Geophys. Res.*, Vol. 80, pp. 2688-2694.
- Longuet-Higgins, M. S. (1983): On the joint distribution of the periods and amplitudes in a random wave field, *Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A*, Vol. 389, pp. 241-258.
-