

円正規分布関数を用いた方向スペクトルの 推定法の実験・現地観測データへの適用

横 木 裕 宗*・磯 部 雅 彦**・渡 辺 晃**

1. はじめに

最近では、海岸・海洋構造物の設計や港湾内の静穏度の予測等のための波浪変形計算を行う際の入射波浪として、多方向不規則波を用いることが一般的になってきた。方向スペクトルは多方向不規則波浪場を記述する有効な手段である。しかし一般に、限られた実測データから方向スペクトルを精度よく推定することは容易ではなく、特に構造物が存在する波浪場、つまり入射波と反射波が共存する場合での方向スペクトルの推定は重要であるにもかかわらず、実用的な推定法はいまだ十分には確立されていないのが現状である。そこで本研究においては、入射波と反射波が共存している場合での方向スペクトルを簡便にかつ実用的な精度で推定することを目的とし、横木ら(1994)によって提案された入・反射波共存場における方向スペクトルの推定法を、数値シミュレーションデータ・実験データ・現地観測データに適用してその有効性の検討を行った。

方向スペクトルを推定する方法は従来いくつか提案されている(例えば、堀川編, 1985)。本研究で用いた推定法は、方向スペクトルを円正規分布関数を用いていくつかのパラメータの関数として定式化し、それらのパラメータを実測データから推定することから、堀川編(1985)のいうパラメータ法の一つといえる。なお、方向スペクトルの関数形を明示的に仮定しないで推定する方法とし

ては、最尤推定法(磯部・近藤, 1983)、ベイズ型モデルによる方法(橋本, 1987)、拡張最大エントロピー原理法(橋本ら, 1993)などがある。

2. 方向スペクトルの推定法

(1) クロスパワースペクトルの表示式

入・反射波共存場における、地点 x_p, x_q 間のクロスパワースペクトル Φ_{pq} は次式のように表される。

$$\begin{aligned} \Phi_{pq}(f) = & \int_0^{2\pi} \{ \exp[-ikR_{pq} \cos(\theta - \Theta_{pq})] \\ & + r \exp[-ikR_{pqr} \cos(\theta - \pi + \Theta_{pqr})] \\ & + r \exp[-ikR_{pqr} \cos(\theta - \Theta_{pqr})] \\ & + r^2 \exp[-ikR_{pq} \cos(\theta - \pi + \Theta_{pq})] \} \\ & \cdot S(f, \theta) d\theta \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

ここで、 k は周波数 f に対応する波数、 θ は波数ベクトルの方向角、 r は反射率を表している。また、 $R_{pq}, R_{pqr}, \Theta_{pq}, \Theta_{pqr}$ などは観測地点間の距離や角度を表している(図1)。

ここで、方向スペクトルとして円正規分布関数を用いた次式のような関数形を仮定する(横木ら, 1994)。

$$S(f, \theta) = P(f) \frac{1}{2\pi I_0(a)} \exp\{a \cos(\theta - \theta_0)\} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 $P(f)$ は周波数スペクトル、 a は分布形の尖鋭度を表すパラメータで、以下方向集中度係数と呼ぶ。この方向集中度係数 a は、その値が大きいたまは、光易型方向関数における方向集中度パラメータ s と $a \approx s/2$ という関係がある。また、 θ_0 はピーク波向、 $I_0(a)$ は 0 次の変形された Bessel 関数である。

式(2)を式(1)に代入すると、式(3)、(4)が得られる。

$$\begin{aligned} \Phi_{pq}(f) = & \left\{ \varphi(a, \theta_0, R_{pq}, \Theta_{pq}|f) \right. \\ & + r^2 \varphi(a, \theta_0, R_{pq}, \pi - \Theta_{pq}|f) \\ & + r \varphi(a, \theta_0, R_{pqr}, \Theta_{pqr}|f) \\ & \left. + r \varphi(a, \theta_0, R_{pqr}, \pi - \Theta_{pqr}|f) \right\} \\ & \times (1 + \delta_{pq \in p}) P(f) \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

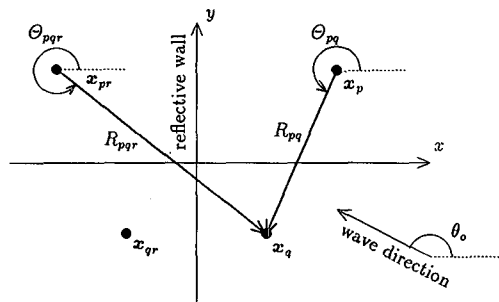


図-1 座標の定義

* 正会員 工修 東京大学助手 工学部土木工学科

** 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科

$$\begin{aligned} \varphi(a, \theta_0, R, \Theta|f) \\ = \frac{1}{2\pi I_0(a)} \int_0^{2\pi} \exp\{-ikR \cos(\theta - \Theta)\} \\ \cdot \exp\{a \cos(\theta - \theta_0)\} d\theta \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

ここで ε_p は x_p の波高計に含まれるノイズの $\Phi_{pp}(f)$ に対する割合を示している。

式 (4) の積分を Bessel 関数を用いて展開すると、式 (5) が得られる。

$$\begin{aligned} \varphi(a, \theta_0, R, \Theta|f) \\ = J_0(kR) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \cos(2m\beta) \\ \cdot J_{2m}(kR) \frac{I_{2m}(a)}{I_0(a)} + 2i \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cos[(2m+1)\beta] \\ \cdot J_{2m+1}(kR) \frac{I_{2m+1}(a)}{I_0(a)} \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

ここで、 $\beta = \theta_0 + \Theta + \pi$ 、 $J_0(z)$ は 0 次の Bessel 関数である。本推定法の数値計算では、クロスパワースペクトル Φ_{pq} の値を式 (3) と式 (5) を用いて求めている。

(2) パラメターの推定法

パラメターの推定には磯部 (1989) にしたがって最尤推定法を用いた。尤度 L を次式のように定義する。

$$L = \frac{1}{(2\pi\Delta f)^M |\Phi|} \exp\left(-\sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M \Phi_{pq}^{-1} \hat{\Phi}_{pq}\right) \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 M は観測地点の数、 $|\Phi|$ は行列 Φ の行列式を表している。また、 Φ_{pq} は本推定法により求めるべきクロスパワースペクトル、 $\hat{\Phi}_{pq}$ は観測された水面変動の時系列データをスペクトル解析して得られたクロスパワースペクトルである。

この尤度 L を最大にするパラメター $\lambda_i (i=1 \sim N_p) (N_p$ はパラメターの数) を求める方法を説明する。

式 (6) をパラメター λ_i で偏微分すると、

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = \sum_{j=1}^M \sum_{l=1}^M \frac{\partial L}{\partial \Phi_{jl}} \frac{\partial \Phi_{jl}}{\partial \lambda_i} \dots\dots\dots (7)$$

が得られる。この式の値を 0 とするようなパラメターを求めればよい。ここで、

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi_{jl}} = L \times \left\{ -\Phi_{jl}^{-1} + \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M \Phi_{iq}^{-1} \hat{\Phi}_{qp} \Phi_{pj}^{-1} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

となるので、結局、

$$\begin{aligned} f_i(\lambda) = \sum_{j=1}^M \sum_{l=1}^M \left\{ -\Phi_{jl}^{-1} + \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M \Phi_{iq}^{-1} \hat{\Phi}_{qp} \Phi_{pj}^{-1} \right\} \frac{\partial \Phi_{jl}}{\partial \lambda_i} = 0 \\ \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

を満足する $\lambda = [\lambda_i]$ (列ベクトル) を求めればよいことがわかる。

(3) 修正 Marquardt 法

本研究では、非線形連立方程式 (9) を解くのに修正 Marquardt 法を用いた。これは、本推定法で以前用いていた Newton 法では、解の初期値が真の解から大きく離

表-1 数値シミュレーションに用いたパラメター

Case	$H_{1/3}$ (m)	$T_{1/3}$ (s)	$S_{\max}$	θ_0 (deg)	r
A0	0.04	1.25	75	180	0.0
A1	0.04	1.25	75	180	1.0
B0	0.05	1.00	10	180	0.0
B1	0.05	1.00	10	180	1.0

れていたり解くべき連立方程式の非線形性が強い場合には、収束計算の安定性が悪くなるためであり、修正 Marquardt 法ではこのような場合にも真の解を求められるように改良されているからである。以下に中川・小柳 (1982) にしたがって簡単に説明する。

修正 Marquardt 法では繰り返し計算における、 $k+1$ 回目の解ベクトル $\lambda^{(k+1)}$ は次式で与える。

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} - [A + \mu^{(k)} \{E + \text{diag}(A)\}]^{-1} f^{(k)} \dots (10)$$

ここで、 $A = [A_{ij}] = [\partial f_i / \partial \lambda_j]$ (微分係数行列) であり、 $f = [f_i]$ である。また、 $\text{diag}(A)$ は行列 A の対角成分からなる対角行列を、 E は単位行列を表す。

なお、式 (10) におけるパラメター μ を、連立方程式の非線形性が強いときには大きくとる必要があり、そのときには、式 (10) は次式のように表され、これは一般に最急降下法と呼ばれる計算法と同じになる。

$$\lambda^{(k+1)} \sim \lambda^{(k)} - \left(1 + \frac{\partial f_i}{\partial \lambda_i}\right)^{-1} f_i^{(k)} \dots\dots\dots (11)$$

一方、 μ を小さくとれば式 (10) は Newton 法と同じ計算法となる。修正 Marquardt 法では毎回の繰り返し計算の中で μ の大きさを調節することにより解ベクトルが真の値に近づいていくようになっている。

本研究では、方向スペクトルパラメター λ_i を求める収束計算にこの方法を取り入れることによって、安定な収束計算を行うことができた。

3. 数値シミュレーションデータへの適用

推定法の有効性を検討するために、数値シミュレーションによって得られた水面変動の時系列データに適用し、その結果を検討した。

水面変動データは、Bretschneider-光易型の方向スペクトルと光易型の方向関数を用いてシミュレートした。このとき用いたパラメターを表-1 に示した。また、水面変動データの取得点の配置すなわち波高計アレイは、後に述べる実験データを計測した波高計アレイと同じ配置とした (図-6)。

これらの時系列データをスペクトル解析して得られたクロスパワースペクトルに対して推定法を適用した結果を図-2~図-5 に示す。それぞれの図中の 3 本の折れ線はそれぞれ異なった 3 本の波高計アレイを用いて推定し

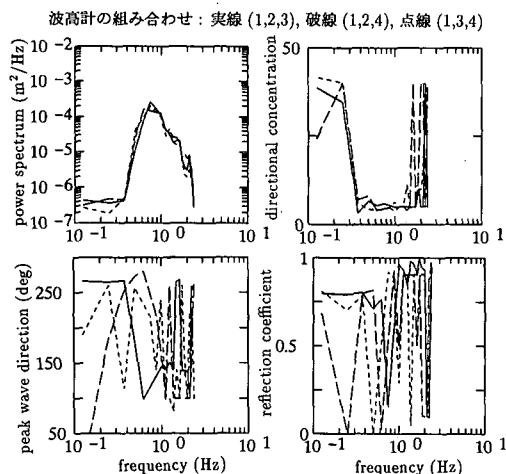


図-2 方向スペクトルパラメータの推定結果
(Case A1; Array A)

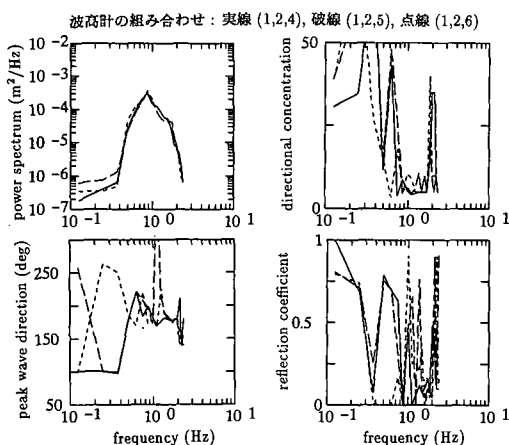


図-3 方向スペクトルパラメータの推定結果
(Case A1; Array B)

た結果である。それぞれの折れ線に対応する波高計の組み合わせは図中に示した通りである。

図-2はCase A1の波浪場に対して波高計アレイAを用いて推定した結果である。また、図-3は同じ波浪場に対して波高計アレイBを用いて推定した結果を示している。どちらの図も左上図から時計回りに、入射波のパワースペクトル、方向集中度係数、反射率、ピーク波向の周波数成分毎の推定値を示している。これらの図から、同じ波浪場を推定しているにも関わらず、当然ながら波高計の配置によってパラメータの推定値が異なることがわかる。つまり、反射面に対して垂直に配置された波高計アレイを用いると反射率が、また、平行に配置された波高計アレイを用いると方向集中度係数およびピーク波向きが比較的正しく推定されていることがわかる。このことは、直線アレイの場合はアレイの方向に対称に

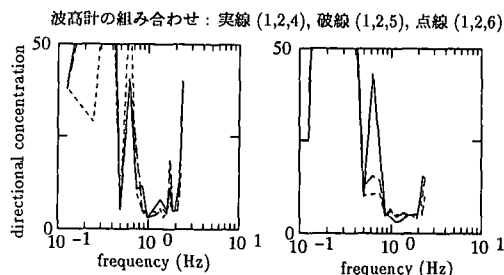


図-4 方向集中度係数の推定結果 (Array B)

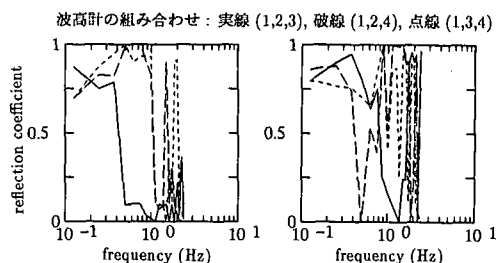


図-5 反射率の推定結果 (Array A)

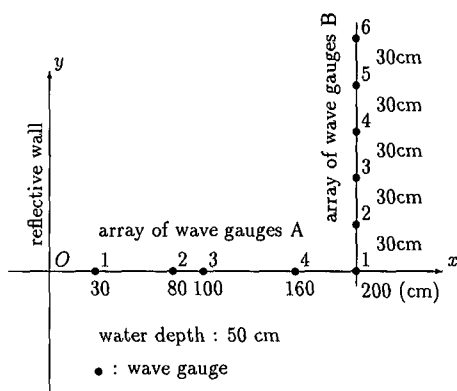


図-6 波高計の配置図

入射してくる波の方向を区別できないことと、入・反射波の分離には反射波前面での重複波の振幅の場所による変化をできるだけ正確に計測しなければならないことを考え合わせると納得できる。

図-4は反射面に平行な波高計アレイで、それぞれCase B0 (左図)、Case B1 (右図)の波浪場における方向集中度係数を推定した結果である。真値が $S_{\max}=10$ であるにも関わらず、ピーク周波数よりやや低周波数側付近で大きめの推定値が得られている。これは、この付近の周波数をもつ成分波の波長が約4mとなり、波高計アレイBのすべての地点で重複波の節となるため推定の精度が落ちているものと思われる。

図-5は反射面に垂直な波高計アレイで、それぞれCase A0 (左図)、Case B0 (右図)の波浪場における反

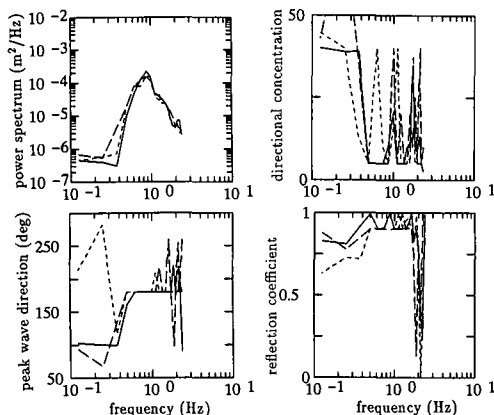


図-7 方向スペクトルパラメータの推定結果
(Case A; Array A)

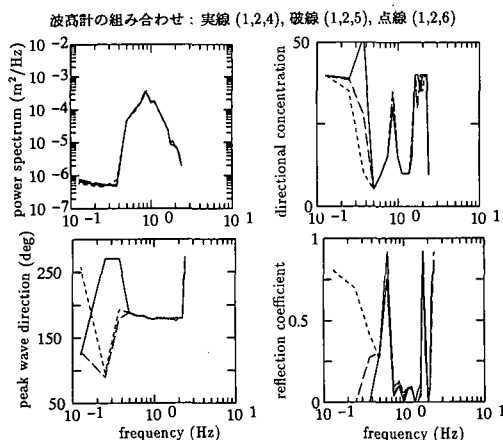


図-8 方向スペクトルパラメータの推定結果
(Case A; Array B)

射率を推定した結果である。方向集中度係数が大きい場合には比較的正しく推定されているが、方向集中度係数が小さい場合には波高計アレイによって推定値が大きく異なっている。

4. 実験データへの適用

本研究の推定法を多方向不規則造波装置を有する水槽での実験データに適用した。実験データは平口ら(1991)によって得られたものを用いた。これは表-1のCase A, Case B (反射率は未知数)のパラメータを用いて計算される Bretschneider-光易型の方向スペクトル (光易型方向関数) に基づいて造波された多方向不規則波浪場において、図-6に示す波高計アレイで水面変動を計測したものである。

この水槽実験によって得られたデータをスペクトル解析して求めたクロスパワースペクトルに対して、方向ス

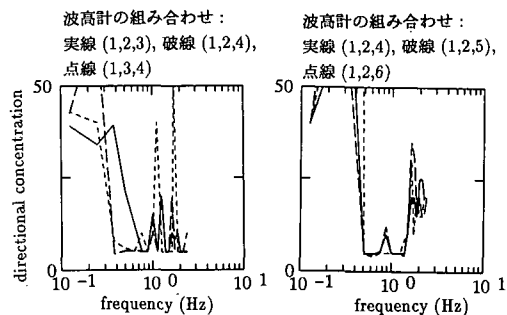


図-9 方向集中度係数の推定結果 (Case B)

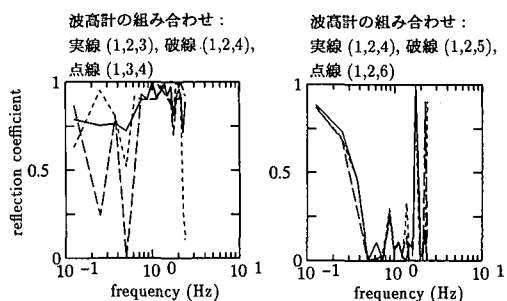


図-10 反射率の推定結果 (Case B)

ペクトルパラメータを推定した結果を図-7～図-10に示す。

図-7, 8はCase Aの波浪場に対して、それぞれ反射面に垂直な波高計アレイ、平行な波高計アレイを用いて推定した結果である。

それぞれの図の配置は図-2, 3と同様である。数値シミュレーションデータに対する推定結果と同様に、反射面に垂直なアレイを用いると反射率が、平行なアレイを用いると方向集中度係数およびピーク波向が比較的正しく推定されている。

次に、Case Bの波浪場に対して方向スペクトルパラメータを推定した結果のうち、方向集中度係数と反射率の

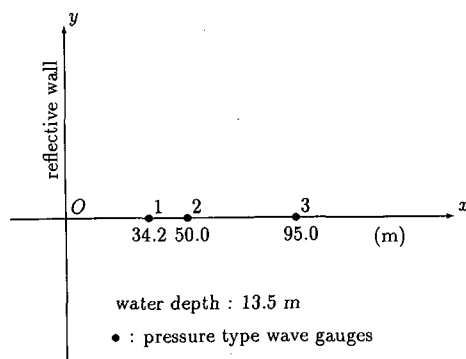


図-11 水圧式波高計の配置図

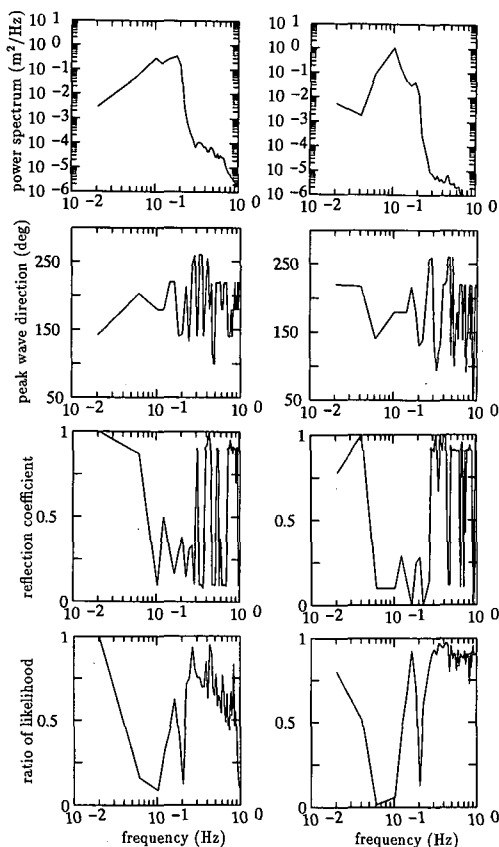


図-12 方向スペクトルパラメータの推定結果

推定値の結果を図-9, 10に示す。

これらの図において、右図は反射面に垂直なアレイを用いて推定した結果を、左図は平行なアレイを用いて推定した結果を示している。反射率については垂直なアレイの方が、方向集中度係数については平行なアレイの方が比較的良好な値を推定しているのも数値シミュレーションの場合と同じである。

5. 現地観測データへの適用

現地観測によって得られたデータに対して推定法を適用した結果の一例を示す。この現地観測は福島県小名浜港内において、1992年4月から5月にかけて行われたものである。本研究ではこの現地観測で得られたデータの、図-11に示した反射面（防波堤）前面に垂直方向に設置された水圧式波高計によって計測されたデータを用いた。

図-12は2つの異なる時刻に得られたデータに対する推定結果を示している。上から、入射波のパワースペクトル、ピーク波向、反射率、尤度比である。尤度比は、 $L/L_{\max}$ と表され、 $L_{\max}$ は式(6)において $\phi_{pq} = \hat{\phi}_{pq}$ と

おいたときの値である。これは、推定されたクロスパワースペクトルの組み合わせが、観測された時系列データをスペクトル解析して得られたものとのくらい等しくなっているかを示している（磯部，1989）。

図-12によると、どちらの結果もピーク周波数付近（0.1～0.2 Hz）では反射率が0.2ないし0.5となっている。また、0.1 Hz付近と0.2 Hz付近で尤度比が小さくなっているが、これはこれらの成分波が重複波となったときに、観測地点付近に腹ないしは節が現れ、そのためにクロススペクトルの精度が落ちるためである。したがって、0.05 Hzより低周波数成分波に対しては、すべての観測地点間で精度良くクロススペクトルが計算されているものと考えられるので、反射率などのパラメータを比較的正しく推定されているものと考えられる。

6. おわりに

本研究では、円正規分布を用いた方向スペクトルの推定法において、方向スペクトルパラメータを求める収束計算のアルゴリズムに修正 Marquardt 法を用いてより安定な収束解が得られるように改良した。さらに、数値シミュレーションデータ・実験データ・現地観測データに適用することにより、本推定法の有効性を検討した。その結果、波高計アレイの配置によっては推定値の精度が落ちることがあるものの、いずれのデータに対しても全体的には良好な推定結果が得られた。

最後に、本論文で用いた実験データ・現地観測データを快く提供して下さいました、(財)電力中央研究所 池野正明氏、五洋建設(株)清水琢三氏に深く感謝いたします。

参 考 文 献

- 磯部雅彦・近藤浩右 (1983): 入・反射波の共存場における方向スペクトルの推定法, 第30回海岸工学講演会論文集, pp. 44-48.
- 磯部雅彦 (1989): 標準化された方向スペクトルの推定法, 海岸工学論文集, 第36巻, pp. 158-162.
- 中川 徹・小柳義夫 (1982): 最小二乗法による実験データ解析, 東京大学出版会, pp. 99-110.
- 橋本典明 (1987): ベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定, 第34回海岸工学講演会論文集, pp. 126-130.
- 橋本典明・永井紀彦・浅井 正・菅原一晃・久高将信・小野修平 (1993): 方向スペクトルの推定における最大エントロピー原理法 (MEP) の拡張, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 136-140.
- 平口博丸・鹿島遼一・田中寛好・石井敏雅 (1991): 多方向不規則波造波機の反射波吸収性能に関する実験的研究, 海岸工学論文集, 第38巻, pp. 121-125.
- 堀川清司 編/本間 仁 監修 (1985): 海岸環境工学, 補章 A, 東京大学出版会, pp. 506-524.
- 横木裕宗・磯部雅彦・渡辺 晃 (1994): 円正規分布関数を用いた入・反射波共存場における方向スペクトルの推定法, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 41-45.