

潜堤上における非線形波浪変形に伴う周期・波向の変化について

山本省吾*・磯部雅彦**・渡辺 晃**

1. 緒 論

潜堤などによって水深の急変する部分を波が通過すると、堤体上では波高水深比が大きくなり波の非線形性が強くなるため、周波数の異なった2倍周波数成分波や3倍周波数成分波等の高周波数成分波が発生することが実験によって知られている。大山ら(1991)は、境界要素法(BEM)を用いた強非線形ポテンシャルモデルを使って、矩形潜堤上の波の分裂の数値解析を行った。

このような高周波数成分波を発生させる潜堤を実際の波浪場に設置することで潜堤背後での波浪特性を変化させることができる。一般に、浮体式構造物は高周波数成分波に対して有効な消波機能をもつため、潜堤との併用で効率的な波浪制御を期待できる。また、人工構造物以外にも、砂州のような水深急変部における波の周波数特性の変化は、波浪場だけでなく海浜流場の解析の上でも重要である。この高周波数成分波の発生は、非線形性の強い現象の一つであり、従来の線形波動方程式や、弱非線形の仮定に基づく摂動法の考え方をを用いた解析では、不十分であることが多い。そこで、本研究では非線形緩勾配波動方程式(磯部, 1994)を用いて、非碎波の断面2次元波浪場における数値解析を行い、従来の波高制御だけでなく、周波数・波向をも制御できる潜堤について考察した。

2. 基礎方程式と境界条件

(1) 鉛直分布関数

静水深を h 、原点($z=0$)を静水面上にとった波浪場を考える。本研究では、式(1)のように速度ポテンシャルの鉛直方向の分布形を $Z_1=1$ および $Z_2=(1+(z/h))^2$ の2つの鉛直分布関数の重ね合わせを用いて近似する。こうすると、鉛直座標 z を独立変数から除け、未知数は水面変動 η と鉛直分布関数 Z_1, Z_2 のそれぞれの重み係数である f_1, f_2 になる。

$$\phi(x, y, z, t) = Z_1(z, h(x, y))f_1(x, y, t) + Z_2(z, h(x, y))f_2(x, y, t)$$

$$= f_1 + \left(1 + \frac{z}{h}\right)^2 f_2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

(2) 波動方程式

鉛直分布関数を以上のように表した時、非線形緩勾配波動方程式(磯部, 1994)は、次の3つの式になる。ただし、 g は重力加速度を表し、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ とする。

$$g\eta + \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{(h+\eta)^2}{h^2} \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \nabla f_1 + \frac{(h+\eta)^2}{h^2} \nabla f_2 \right\}^2 + \frac{1}{2} \left\{ \frac{2(h+\eta)}{h^2} f_2 \right\}^2 - \frac{2\eta(h+\eta)}{h^3} f_2 \left\{ \nabla f_1 + \frac{(h+\eta)^2}{h^2} \nabla f_2 \right\} \nabla h = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \left[(h+\eta) \nabla f_1 + \frac{(h+\eta)^3}{3h^2} \nabla f_2 \right] + \frac{(h+\eta)^2(h-2\eta)}{3h^3} \nabla f_2 \nabla h - \frac{2(h+\eta)\eta}{h^3} f_2 \nabla \eta \nabla h = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{(h+\eta)^2}{h^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \left[\frac{(h+\eta)^3}{3h^2} \nabla f_1 + \frac{(h+\eta)^5}{5h^4} \nabla f_2 \right] - \frac{4(h+\eta)^3}{3h^4} f_2 - \frac{(h+\eta)^2(h-2\eta)}{3h^3} \nabla f_1 \nabla h - \frac{2(h+\eta)^3\eta}{h^5} f_2 \nabla \eta \nabla h = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

本研究では断面2次元波浪場を考えるので、 ∇ のうち $\partial/\partial y$ は考えない。

(3) 境界条件

ゾンマーフェルトの岸側境界条件式・沖側境界条件式は、以下のとおりである。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + C \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - C \frac{\partial \Phi}{\partial x} - 2 \frac{\partial \Phi_{in}}{\partial t} = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 Φ は速度ポテンシャル等の波浪場の変数を、 C は波の位相速度を表す。また、 Φ_{in} は波浪場の変数 Φ の入射成分を表す。ここでの Φ は、未知変数 η, f_1, f_2 である。

入射波成分についてももう少し検討する。 $(\partial h/\partial x)=0$ と仮定し、かつ非線形項を無視すると、波浪場の3つの方程式(2)、(3)、(4)はそれぞれ、

* 正会員 工修 五洋建設(株)

** 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科

$$g\eta + \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{h}{3} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{h}{3} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{h}{5} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} - \frac{4}{3h} f_2 = 0 \quad (9)$$

となる。式(7)について、入射波成分のみを考えると次のようになる。

$$\frac{\partial f_{1,\text{in}}}{\partial t} + \frac{\partial f_{2,\text{in}}}{\partial t} = -g\eta_{\text{in}} \quad (10)$$

式(6)のうち、 f_1, f_2 については、

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - C \frac{\partial f_1}{\partial x} + r_1 2g\eta_{\text{in}} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} - C \frac{\partial f_2}{\partial x} + r_2 2g\eta_{\text{in}} = 0 \quad (12)$$

ここで、式(11)と式(12)に含まれる重み係数 f_1, f_2 の入射比 r_1, r_2 ($r_1 + r_2 = 1$)については次のように考える。

式(7)を t で偏微分して式(8)、(9)の $\partial\eta/\partial t$ に代入すると、

$$-\frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} \right) + h \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{h}{3} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} = 0 \quad (13)$$

$$-\frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} \right) + \frac{h}{3} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{h}{5} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} - \frac{4}{3h} f_2 = 0 \quad (14)$$

の2式を得る。

ここで f_1, f_2 を次のようにおく。

$$f_1 = a_1 e^{i(kx - \omega t)}, \quad f_2 = a_2 e^{i(kx - \omega t)} \quad (15)$$

a_1, a_2 はそれぞれ、 f_1, f_2 の振幅、 k は波数、 ω は角周波数で分散関係式を満たす。式(13)、式(14)は、次のようになる。

$$\frac{\omega^2}{g} (a_1 + a_2) - hk^2 a_1 - \frac{hk^2}{3} a_2 = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\omega^2}{g} (a_1 + a_2) - \frac{hk^2}{3} a_1 - \frac{hk^2}{5} a_2 - \frac{4}{3h} a_2 = 0 \quad (17)$$

与えられた角周波数 ω に対して式(16)、(17)が自明でない解($a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$)を持つための条件を求める。

$$k^2 = \frac{6h^2\omega^2 - 15gh \pm \sqrt{(6h^2\omega^2 - 15gh)^2 + 60gh^3\omega^2}}{2gh^3} = \chi \quad (18)$$

式(18)中の符号が負のときは $k^2 < 0$ となり、この場合、波数が虚数となる。これは減衰定常波を表すので不適である。 $k^2 > 0$ の場合、進行波を表す。

固有値 $k^2 = \chi$ から、 a_1, a_2 の比を r_1, r_2 ($r_1 + r_2 = 1$)で表すと次のようになる。

$$r_1 = \frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{3\omega^2}{2gh\chi} - 0.5 \quad (19)$$

$$r_2 = \frac{a_2}{a_1 + a_2} = 1.5 - \frac{3\omega^2}{2gh\chi} \quad (20)$$

3. 入射波および計算条件

入射波としてクノイド波2次理論・ストークス波3次理論の保存波を用いた。水面変動 η および $\partial\eta/\partial t$ を求めて、入射波データ η_{in} および $\partial\eta_{\text{in}}/\partial t$ とした。クノイド波、ストークス波のどちらを入射波として用いるかはアーセル数 $Ur=25$ をその境界とした。入射波の条件を2種類用意し、Case 1とCase 2と呼ぶ。

Case 1: (周期 $T=7.1$ s, 波高 $H=1.0$ m, 水深 $h=10.0$ m)

Case 2: (周期 $T=7.1$ s, 波高 $H=2.0$ m, 水深 $h=10.0$ m)

また、計算領域は断面2次元で、水平方向は500mとした。数値計算の水平方向差分 Δx と時間差分 Δt を、それぞれ入射波長の1/64、入射波の周期の1/64にした。

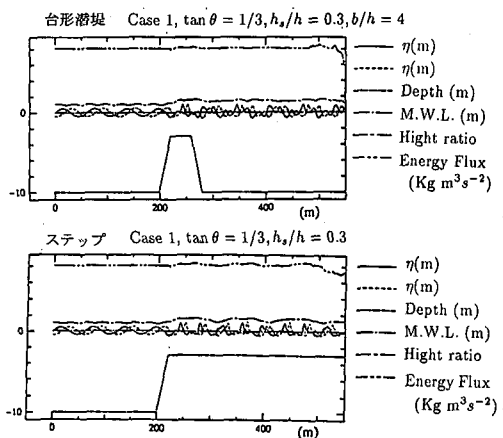
4. 数値計算方法

支配方程式は時間については1階の偏微分方程式であり、静水状態を初期状態として、Newton-Raphson法を用いて、未知変数である水面変動 η および重み係数 f_1, f_2 の解を求めた。また、潜堤上に波が伝播する際のエネルギー保存の様子を確認する目的で、エネルギーフラックスを調べた。また、水路上の各点における波の時系列データが得られるが、これらをフーリエ解析によって各周波数成分波に分けた。

5. 計算結果

緩勾配の地形としては、ステップ地形と台形潜堤を取り上げる。

●ステップ地形



図一 空間波形およびエネルギーフラックス等の分布

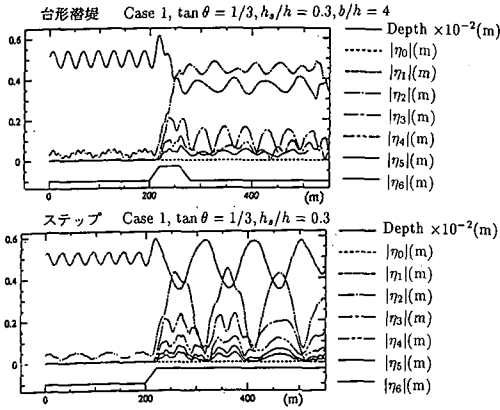


図-2 各成分波振幅の分布

- ・段差前の勾配 ($\tan \theta = 1/3, 1/5, 1/10, 1/20$)
- ・ステップ上水深 ($h_s/h = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$)
- 台形潜堤
 - ・天端水深 ($h_s/h = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$)
 - ・天端幅 ($b/h = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 20, 22$)

なお、天端幅は台形上辺の長さを意味する。

構造物周りの波形等の空間分布を図-1に示した。横軸は沖側境界からの距離をとっている。つまり、左端が沖側境界に、右端が岸側境界になる。また、構造物周りの各周波数成分波を図-2に示した。ステップでは、2倍周波数成分波等のビート長(再帰距離) λ が明確になりやすい。本研究では、2倍周波数成分のビート長 λ_2 のみに着目する。理論的には、2倍周波数成分のビート長 λ_2 は次のように決まる(Massel, 1983)。

$$\lambda_2 = 2\pi(k_2 - 2k_1) \quad (21)$$

ただし k_2 は2倍周波数の自由波波数、 k_1 は2倍周波数の拘束波波数であり、以下の分散方程式を満たす。

$$k_2^2 \tanh k_2 h = \frac{4\omega^2}{g} \quad (22)$$

$$k_1^2 \tanh k_1 h = \frac{\omega^2}{g} \quad (23)$$

式(21)~(23)の解は数値計算結果の2倍周波数成分波の波長とほとんど等しい値を得る。

潜堤背後の各成分波振幅(基本, 2倍, 3倍周波数成分波振幅)の空間分布について考えることにする。潜堤背後での各成分波振幅の空間分布は、自由波と拘束波の非線形干渉によって、一様でなく、ある波形を描く。振幅の空間分布の極大値(ピーク値)と平均値が、ステップ前面勾配・ステップ上水深・潜堤天端幅によってどのように変化するか、その関係を調べてみた。

まず、ステップ前面勾配が、各成分波振幅の空間分布の極大値と、どのような関係にあるか入射波条件 Case 1 で検討してみた(図-3)。ステップ前面の勾配が大きいほ

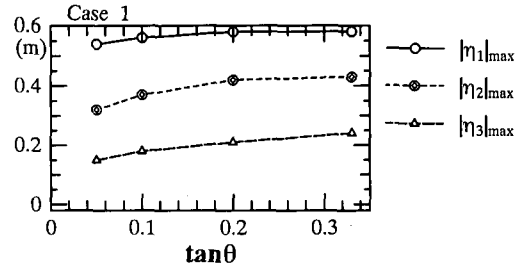


図-3 ステップ前面勾配と各成分波振幅ピーク値

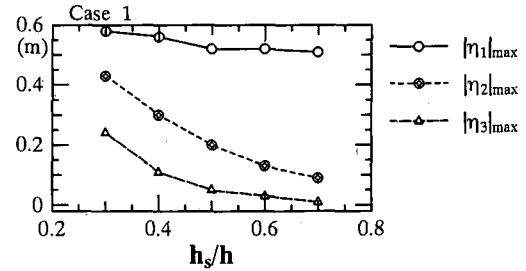


図-4 ステップ上水深と各成分波振幅ピーク値

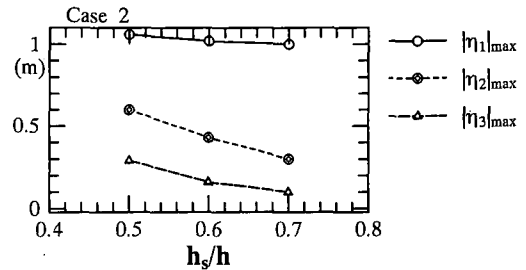


図-5 ステップ上水深と各成分波振幅ピーク値

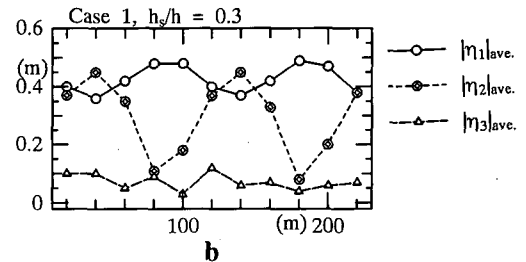


図-6 天端幅と各成分波振幅

ど2倍, 3倍周波数成分波振幅の空間分布のピーク値が増加する。

次に、ステップ上水深が、振幅の空間分布の極大値と、どのような関係にあるか検討してみた。これも Case 1 (図-4) と Case 2 (図-5) の2つの入射波の条件で検討しているが、Case 1 の場合はステップ天端水深比 $h_s/h = 0.2$ で、Case 2 の場合は $h_s/h = 0.4$ で砕波が生じた。天

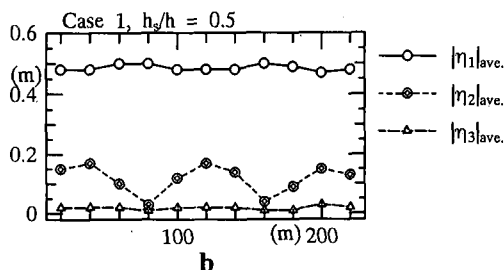


図-7 天端幅と各成分波振幅

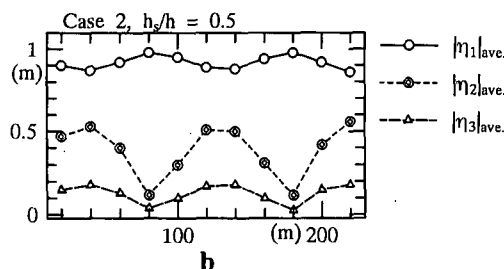


図-8 天端幅と各成分波振幅

端水深が小さいほど潜堤背後での各周波数成分波振幅の空間分布のピーク値は大きくなる。

次に、台形潜堤天端幅が、振幅の空間分布の平均値と、どのような関係にあるか検討してみた。台形潜堤の形状は、勾配 $\tan \theta = 1/3$ であり、入射波の条件 Case 1 の場合は、天端水深比 $h_s = 0.3h$ (図-6) と、 $h_s = 0.5h$ (図-7) の 2 種類、入射波の条件 Case 2 の場合は、天端水深比 $h_s = 0.5h$ (図-8) のみで検討した。この場合も 2 倍周波数成分の再帰距離は、式 (21) の計算値とほぼ等しかった。天端幅と 2 倍周波数成分波振幅の空間分布の関係は、天端幅が 2 倍周波数成分波の再帰距離の整数倍の時に潜堤背後で振幅が小さく、 $(2n+1)/2$ 倍の時に大きくなる。また、そのときの変動は波高に対する天端水深が小さいほど激しくなる。また、入射波高比が大きいほど高周波数成分波が潜堤背後において発達している様子がわかる。

6. 平面波浪場の数値計算

一様水深の平面波浪場に、沿岸方向に等形状の潜堤を設置し、波が任意の角度で入射する場合の波の屈折および分裂の様子を数値解析する。岸沖方向を x 、沿岸方向を y とする。沿岸方向 (y 方向) には、底面形状は一定であるので、 $\partial h / \partial y = 0$ であり、さらに沿岸方向の波速 C_y は一定である。従って、以下の式が成り立つ。

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{dt}{dy} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{C_y} \quad (24)$$

非線形緩勾配波動方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{(h+\eta)^2}{h^2} \frac{\partial f_2}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{(h+\eta)^2}{h^2} \frac{\partial f_2}{\partial x} \right\}^2 \\ & + \frac{1}{2} \frac{1}{C_y^2} \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{(h+\eta)^2}{h^2} \frac{\partial f_2}{\partial t} \right\}^2 + \frac{1}{2} \left\{ \frac{2(h+\eta)}{h^2} f_2 \right\}^2 \\ & - \frac{2\eta(h+\eta)}{h^3} f_2 \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{(h+\eta)^2}{h^2} \frac{\partial f_2}{\partial x} \right\} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \dots (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(h+\eta) \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{(h+\eta)^3}{3h^2} \frac{\partial f_2}{\partial x} \right] \\ & + \frac{1}{C_y^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[(h+\eta) \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{(h+\eta)^3}{3h^2} \frac{\partial f_2}{\partial t} \right] \\ & + \frac{(h+\eta)^2(h-2\eta)}{3h^3} \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{2(h+\eta)\eta}{h^3} f_2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \dots (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(h+\eta)^2}{h^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(h+\eta)^3}{3h^2} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{(h+\eta)^5}{5h^4} \frac{\partial f_2}{\partial x} \right] \\ & + \frac{1}{C_y^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{(h+\eta)^3}{3h^2} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{(h+\eta)^5}{5h^4} \frac{\partial f_2}{\partial t} \right] \\ & - \frac{4(h+\eta)^3}{3h^4} f_2 - \frac{(h+\eta)^2(h-2\eta)}{3h^3} \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \\ & - \frac{2(h+\eta)^3\eta}{h^5} f_2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \dots (27) \end{aligned}$$

式 (26)、式 (27) の中の $1/C_y^2$ を含んだ項について、更に式変形する。式 (26) の中の項は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{C_y^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[(h+\eta) \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{(h+\eta)^3}{3h^2} \frac{\partial f_2}{\partial t} \right] \\ & = \frac{1}{C_y^2} \left[\frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{(h+\eta)^2}{h^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial t} \right. \\ & \quad \left. + (h+\eta) \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} + \frac{(h+\eta)^3}{3h^2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} \right] \dots (28) \end{aligned}$$

また、式 (27) の中の項は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{C_y^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{(h+\eta)^3}{3h^2} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{(h+\eta)^5}{5h^4} \frac{\partial f_2}{\partial t} \right] \\ & = \frac{1}{C_y^2} \left[\frac{(h+\eta)^2}{h^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{(h+\eta)^4}{h^4} \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial t} \right. \\ & \quad \left. + \frac{(h+\eta)^3}{3h^2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} + \frac{(h+\eta)^5}{5h^4} \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} \right] \dots (29) \end{aligned}$$

断面 2 次元の数値計算の場合と異なる点は、式 (28) と式 (29) で表される項がつけ加えられたことであり、下線部のように $\partial^2 / \partial t^2$ の項を含んでいる。このため、本研究の数値計算方法では、連立方程式の解が求まらず、計算結果は得られなかった。そこで、次のようにして $\partial^2 / \partial t^2$ を $\partial / \partial t$ に置き換える工夫をした。 r_1, r_2 は式 (19)、式 (20) を用いる。

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f_1}{\partial t} = -gr_1 \frac{\partial \eta}{\partial t} \dots (30)$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial t} = -gr_2 \frac{\partial \eta}{\partial t} \dots (31)$$

これから時間 t に関して 1 階微分のみを含む波動方程

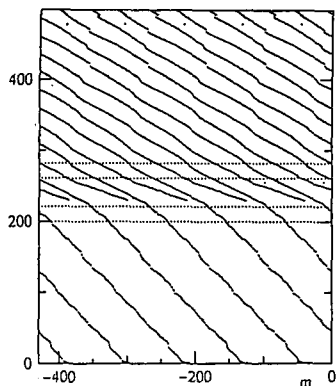

 Case 1, $\theta_0=45$, $\tan \theta=1/3$, $h_s/h=0.3$, $b/h=4$

図-9 平面波浪場の波峰線

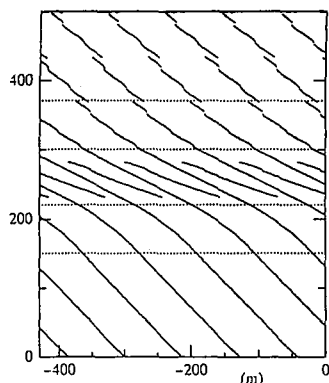

 Case 1, $\theta_0=45$, $\tan \theta=1/10$, $h_s/h=0.3$, $b/h=8$

図-10 平面波浪場の波峰線

式が得られた。境界条件については、境界における岸沖方向の位相速度 C_x を断面 2 次元の境界条件中の位相速度 C におきかえている。入射境界において、波の進行方向が岸沖方向となす角度を θ_0 とすると、入射波の波速が C ならば、岸沖方向の位相速度 C_x と沿岸方向の位相速度 C_y は、

$$C_x = \frac{C}{\cos \theta_0}, \quad C_y = \frac{C}{\sin \theta_0} \quad \dots\dots\dots (32)$$

で表される。前述したように、沿岸方向の位相速度 C_y は、常に一定である。以後、 $y=0$ の断面の波浪場の時間発展の様子を数値計算で解析していく。

7. 平面波浪場の数値計算結果

入射波の条件は Case 1. 波の入射角は 45 度。計算領域長は 500 m. 平面波浪場の数値計算といっても $y=0$ の断面 2 次元の波浪場が得られるわけであるが、ある断面の時間発展の様子は、ある瞬間の平面的な空間波浪分布の様子と同じである。そこで、断面 2 次元水面変動空間分布から、水面変動の極大値をプロットすることで、平面的な波峰の連なりを得る (図-9)。潜堤上で波峰線の方が変化し、波が屈折している様子がわかる。また、主波峰の間に 2 次波峰が生じているのがわかる。潜堤の勾配を $\tan \theta=1/10$ と緩くして、天端幅も ($b=8h$) と長くとり、その他の条件は同じにして計算を行った (図-10)。潜堤背後では、2 倍周波数成分波の発達程度によって波峰線も様子が異なる。潜堤背後の波峰線は主波峰のみである。

8. 結 論

本研究において得られた主な結論を以下に述べる。

- ・潜堤上で発生するは高周波数成分波の振幅は、潜堤前

面の勾配が大きいほど、天端水深が浅いほど増加する。

- ・潜堤背後の高周波数成分波は、潜堤幅が 2 倍周波数成分波の再帰距離の整数倍の時に振幅が小さく、 $(2n+1)/2$ 倍の時に大きくなる。
- ・入射波は、周期が長いほど、波形勾配が大きいほど、潜堤背後での高周波数成分波の発達が顕著になる。
- ・潜堤に斜めに入射する波の屈折を数値解析したところ、直角入射の場合と同様に高周波成分波が発生した。高周波成分波は波速の一様性を満足するために、基本周波数成分波よりも波向が汀線直角方向に近づくため、全体として図-9 のように潜堤前後で波向が変化することとなった。すなわち、潜堤を利用した波の非線形変形により、波の周期や波向を制御することが可能となることが示された。

参 考 文 献

- 磯部雅彦 (1994): 波浪変形解析のための波動方程式の比較研究, 土木学会論文集, No. 491/II-27, pp. 1-14.
- 磯部雅彦 (1994): 非線形緩勾配波動方程式の提案, 海岸工学論文集, 第 41 巻, pp. 1-5.
- 大山 巧・灘岡和夫 (1991): 数値波動水槽を用いた潜堤による波の分裂現象の解析, 海岸工学論文集, 第 38 巻, pp. 16-20.
- 大山 巧・灘岡和夫 (1992): 潜堤を通過する非線形波列の分裂現象の解析, 土木学会論文集, No. 450/II-20, pp. 31-40.
- 坪田勇人・磯部雅彦・渡辺 晃 (1994): 潜堤を用いた波浪制御に関する研究, 海岸工学論文集, 第 41 巻, pp. 641-645.
- Isobe, M. and N. C. Kraus (1983a): Derivation of a third-order Stokes wave theory, Hydraulics Lab. Rep., No. YNU-HY-83-2, Dept. of Civil Eng., Yokohama Nat. Univ.
- Isobe, M. and N. C. Kraus (1983b): Derivation of a second-order Cnoidal wave theory, Hydraulics Lab. Rep., No. YNU-HY-83-2, Dept. of Civil Eng., Yokohama Nat. Univ.
- Massel, S. R. (1983): Harmonic generation by waves propagating over a submerged step, Coastal Eng., Volume 7, pp. 357-380.