

高次 Boussinesq 方程式とそのステップ地形への適用性

喜 岡 渉*・柏 原 謙 爾**

1. はじめに

断面平均流速を代表流速とした Boussinesq 方程式 (Peregrine, 1967) は、波の非線形性と分散性をともに考慮した波動方程式として浅海波の伝播変形計算に広く用いられてきたが、その近似オーダーは低次 (すなわち弱非線形・弱分散) であり、中間水深やパー背後の水深増大部、または砕波限界付近における波形の再現性等その適用性については問題が残されている。波動方程式は一般に水深方向への積分過程を経て得られることから、波動方程式の分散性についての高精度化はいかに流速の鉛直分布関数の近似精度を向上させるかという問題に帰着する。例えば、灘岡・中川 (1993)、磯部 (1994) および後野 (1994) は複数流速成分の連成により流速場の近似の高精度化を図っている。しかしながら、連成波動方程式を用いた手法は、非線形項まで取り込んだ具体的な計算を行うに際し、現時点では数値計算上確立されていない要素が多く残されている。一方、長波近似を対象とした改良も行われている。後藤 (1984) ならびに藤間ら (1986) は、Peregrine の Boussinesq 方程式に対し、非線形の近似度を上げた高次の方程式を誘導している。Nwogu (1993) は、代表流速として任意水深の水平方向流速を用いることで見かけ上従来の Boussinesq 方程式よりも高精度の分散性を有する方程式を提案している。従来の計算アルゴリズムが比較的容易に適用できるという観点から見れば、このような Boussinesq タイプの波動方程式の高精度化についても検討を加えておくべきであろう。

本研究では、Nwogu (1993) と同様に任意水深の流速を用いて高次 Boussinesq 方程式の誘導を行い、得られた方程式の基本的な性質について検討を加えた。ただし、対象としたのは非線形性 ϵ と分散性 μ^2 について、それぞれ ϵ^2 , $\epsilon\mu^2$, μ^4 のオーダーまでとった方程式で、アーセル数 $Ur \sim 1$ の仮定下では従来の Boussinesq 方程式に対して 1 次数高次の方程式である。

2. 高次 Boussinesq 方程式の誘導

流体は非圧縮性、非粘性とし、断面 2 次元の非回転運動を考える。図-1 に示すように、 x^* 軸を静水面と一致させ、 z^* 軸を鉛直上向きにとる。以下、添字 * は物理量を示すものとする。流体運動の基礎方程式、境界条件式は、水位変動 $\zeta^*(x^*, t^*)$ と速度ポテンシャル $\phi^*(x^*, z^*, t^*)$ に対し、以下に示す Laplace 方程式、自由水面における力学および運動学的境界条件、水底条件の各式によって与えられる。

$$\phi_{x^*x^*}^* + \phi_{z^*z^*}^* = 0 \quad (-h^* \leq z^* \leq \zeta^*) \dots\dots\dots (1)$$

$$\phi_{t^*}^* + g\zeta^* + \frac{1}{2}(\phi_{x^*}^{*2} + \phi_{z^*}^{*2}) = 0 \quad (z^* = \zeta^*) \dots\dots\dots (2)$$

$$\zeta_{t^*}^* + \zeta_{x^*}^* \phi_{x^*}^* - \phi_{z^*}^* = 0 \quad (z^* = \zeta^*) \dots\dots\dots (3)$$

$$h_{x^*}^* \phi_{x^*}^* + \phi_{z^*}^* = 0 \quad (z^* = -h^*) \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 h^* は静水深である。また、添字 x^* , z^* はそれぞれの空間軸方向、 t^* は時間に関する偏微分を表す。式 (1)~(4) の変数を入射波の代表振幅 a_0^* 、代表角周波数 ω_0^* および代表水深 h_0^* によって無次元量

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\omega_0^*}{\sqrt{gh_0^*}} x^*, & z &= \frac{z^*}{h_0^*}, & t &= \omega_0^* t^*, \\ h &= \frac{h^*}{h_0^*}, & \zeta &= \frac{\zeta^*}{a_0^*}, & \phi &= \frac{\omega_0^*}{a_0^{*2} g} \phi^*, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

に変換し、それぞれ非線形性と分散性の指標となる 2 つのパラメータ $\epsilon = a_0^*/h_0^*$, $\mu^2 = \omega_0^{*2} h_0^*/g$ について式 (1)~(4) を整理すると次の式 (6)~(9) になる。

$$\mu^2 \phi_{xx} + \phi_{zz} = 0 \quad (-h \leq z \leq \epsilon \zeta) \dots\dots\dots (6)$$

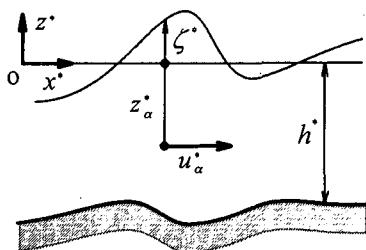


図-1 座標系と記号の定義

$$\mu^2(\Phi_t + \zeta) + \frac{1}{2}\varepsilon(\mu^2\Phi_x^2 + \Phi_z^2) = 0 \quad (z = \varepsilon\zeta) \cdots (7)$$

$$\mu^2(\zeta_t + \varepsilon\zeta_x\Phi_x) - \Phi_z = 0 \quad (z = \varepsilon\zeta) \cdots (8)$$

$$\mu^2 h_x \Phi_x + \Phi_z = 0 \quad (z = -h) \cdots (9)$$

また、式(8)および(9)を用いて式(6)を積分形表示にすると

$$\zeta_t + \left[\int_{-h}^{\varepsilon\zeta} \Phi_x dz \right]_x = 0 \cdots (10)$$

となる。

高次 Boussinesq 方程式の誘導過程は従来の Boussinesq 方程式のものに準じたいくつかの方法が考えられるが、本研究では速度ポテンシャルのべき級数展開を用いた誘導を行う。すなわち、まず Φ を水深方向に対して次式のようにべき級数展開する。

$$\Phi(x, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \{ [z + h(x)]^n \Phi_n(x, t) \} \cdots (11)$$

上式を式(6)と(9)に代入すると Φ_n について漸化式が得られ、 Φ は水底面における速度ポテンシャル Φ_0 により次式のように表される。

$$\begin{aligned} \Phi = & \Phi_0 - \mu^2 \left[\frac{1}{2} z^2 \Phi_{0xx} + z(h\Phi_{0x})_x + \left(\frac{1}{2} h^2 \Phi_{0x} \right)_x \right] \\ & + \mu^4 \left[\frac{1}{24} z^4 \Phi_{0xxxx} + \frac{1}{6} z^3 (h\Phi_{0x})_{xxx} \right. \\ & + \frac{1}{2} z^2 \left(\frac{1}{2} h^2 \Phi_{0x} \right)_{xxx} + z \left(\frac{1}{6} h^3 \Phi_{0x} \right)_{xxx} \\ & \left. + \left(\frac{1}{24} h^4 \Phi_{0x} \right)_{xxx} \right] + O(\mu^6) \cdots (12) \end{aligned}$$

任意水深 $z_a = z_a^*/h_0^*$ における速度ポテンシャル Φ_a の Φ_0 表記式を得るには、式(12)において $z = z_a$ を代入すればよい。 Φ, Φ_a それぞれの Φ_0 表記式から Φ_0 を消去すると、 Φ を Φ_a によって表した次式が得られる。

$$\begin{aligned} \Phi = & \Phi_a - \mu^2 \left[\frac{1}{2} (z^2 - z_a^2) \Phi_{axx} + (z - z_a)(h\Phi_{ax})_x \right] \\ & + \mu^4 \left[\frac{1}{24} (z^4 - z_a^4) \Phi_{axxxx} + \frac{1}{6} (z^3 - z_a^3)(h\Phi_{ax})_{xxx} \right. \\ & + \frac{1}{2} (z^2 - z_a^2) \left(\frac{1}{2} h^2 \Phi_{ax} \right)_{xxx} + (z - z_a) \left(\frac{1}{6} h^3 \Phi_{ax} \right)_{xxx} \\ & - \left\{ \frac{1}{2} (z^2 - z_a^2) + (z - z_a)h \right\} \left\{ \frac{1}{2} z_a^2 \Phi_{axxxx} + z_a(h\Phi_{ax})_{xxx} \right. \\ & + \left. \left(\frac{1}{2} h^2 \Phi_{ax} \right)_{xxx} \right\} - (z - z_a)h_x \left\{ \frac{1}{2} z_a^2 \Phi_{axxx} \right. \\ & \left. + z_a(h\Phi_{ax})_{xx} + \left(\frac{1}{2} h^2 \Phi_{ax} \right)_{xx} \right\} \left. \right] + O(\mu^6) \cdots (13) \end{aligned}$$

式(13)は異なる任意の2点の速度ポテンシャル Φ および Φ_a の関係を示しているにすぎず、境界(特にここでは水底面を指す)条件は含まれていない。したがって、連続式の導出は式(8)を用いるのではなく、2つの運動学的境界条件式(8)、(9)をともに含む式(10)より行わなければならない。また、式(8)は第1項に μ^2 が

乗じられているが、積分形表示の式(10)では第1、2項のオーダーは等しいので、 Φ については最終式が必要としているオーダーである $O(\mu^4)$ の項までが考慮されていけばよいことがわかる。式(13)を式(7)の勾配をとったものと式(10)のそれぞれに代入するとともに、パラメーター ε, μ に対して $O(\varepsilon) = O(\mu^2)$ の条件すなわちアーセル数 $Ur \equiv \varepsilon/\mu^2 \sim 1$ の条件を課し、 $O(\varepsilon^2), O(\varepsilon\mu^2), O(\mu^4)$ までを考慮すると、最終的に次の高次 Boussinesq 方程式(14)、(15)を得る。なお、 $O(\varepsilon^2)$ のオーダー以上の非線形項は全て μ^{2m} が乗じられた項となっており、 $O(\varepsilon)$ と $O(\mu^2)$ の近似バランスにいかなる仮定を設けても非線形性のみしか持たない $O(\varepsilon^m) (m > 2)$ の非線形項は高次 Boussinesq 方程式には現れない。

$$\begin{aligned} \zeta_t + [(\varepsilon\zeta + h)u_a]_x + \mu^2 \left[\left(\frac{1}{2} z_a^2 - \frac{1}{6} h^2 \right) hu_{axx} \right. \\ + \left(z_a + \frac{1}{2} h \right) h(hu_a)_{xx} \Big]_x + \mu^2 \left[\varepsilon\zeta \left\{ \frac{1}{2} z_a^2 u_{axx} \right. \right. \\ + z_a(hu_a)_{xx} \Big\} \Big]_x - \mu^4 \left[\left(-\frac{5}{24} z_a^4 - \frac{1}{2} z_a^3 h - \frac{1}{6} z_a^2 h^2 \right. \right. \\ - \frac{1}{120} h^4 \Big) hu_{axxxx} + \left(-\frac{1}{3} z_a^3 - z_a^2 h - \frac{1}{3} z_a h^2 \right. \\ + \frac{1}{24} h^3 \Big) h(hu_a)_{xxxx} + \left(-z_a h - \frac{1}{2} h^2 \right) h \left(\frac{1}{2} h^2 u_a \right)_{xxxx} \\ + \left(z_a + \frac{1}{2} h \right) h \left(\frac{1}{6} h^3 u_a \right)_{xxxx} \\ - \left(z_a + \frac{1}{2} h \right) h \left[\frac{1}{2} z_a^2 \{ 2h_x u_{axxx} + h_{xx} u_{axx} \} \right. \\ + z_a \{ 2h_x(hu_a)_{xxx} + h_{xx}(hu_a)_{xx} \} \\ + \left. \left. \left\{ 2h_x \left(\frac{1}{2} h^2 u_a \right)_{xxx} + h_{xx} \left(\frac{1}{2} h^2 u_a \right)_{xx} \right\} \right] \right]_x \\ = O(\varepsilon^2 \mu^2, \varepsilon \mu^4, \mu^6) \cdots (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{at} + \varepsilon u_a u_{ax} + \zeta_x + \mu^2 \left[\frac{1}{2} z_a^2 u_{axxx} + z_a(hu_a)_{xx} \right] \\ - \mu^2 [\varepsilon\zeta(hu_a)_x]_x - \mu^4 \left[\left(-\frac{5}{24} z_a^4 - \frac{1}{2} z_a^3 h \right) u_{axxxx} \right. \\ + \left(-\frac{1}{3} z_a^3 - z_a^2 h \right) (hu_a)_{xxxx} + (-z_a h) \left(\frac{1}{2} h^2 u_a \right)_{xxxx} \\ + z_a \left(\frac{1}{6} h^3 u_a \right)_{xxxx} - z_a \left[\frac{1}{2} z_a^2 \{ 2h_x u_{axxxx} + h_{xx} u_{axxx} \} \right. \\ + z_a \{ 2h_x(hu_a)_{xxx} + h_{xx}(hu_a)_{xx} \} \\ + \left. \left. \left\{ 2h_x \left(\frac{1}{2} h^2 u_a \right)_{xxx} + h_{xx} \left(\frac{1}{2} h^2 u_a \right)_{xx} \right\} \right] \right] \\ + \varepsilon \mu^2 \left[u_a \left\{ \frac{1}{2} z_a^2 u_{ax} + z_a(hu_a)_x \right\} + \frac{1}{2} \{ (hu_a)_x \}^2 \right]_x \\ = O(\varepsilon^2 \mu^2, \varepsilon \mu^4, \mu^6) \cdots (15) \end{aligned}$$

上式(14)、(15)が時間に対して1階の方程式であるのは従来の Boussinesq 方程式と変わらない。しかしながら、高次項を考慮することにより空間に対しては最高5階の導関数が含まれることになり、数値計算上はより取り扱いの困難な方程式となっている。式(14)、(15)が

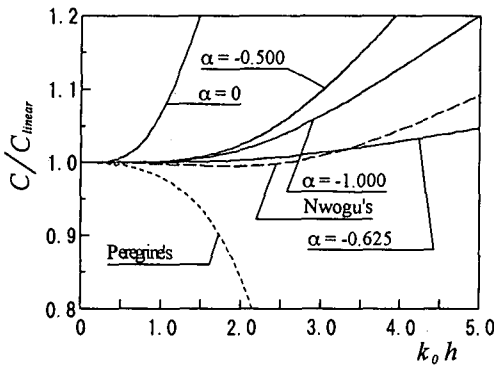


図-2 高次 Boussinesq 方程式の分散特性

ら $O(\mu^4)$ の項を省略した方程式については Kirby (1994) によっても誘導が行われている。また、当然のことながら、式 (14), (15) から $O(\varepsilon\mu^2)$, $O(\mu^4)$ の項を省略した方程式は Nwogu (1993) の方程式に一致する。

3. 高次 Boussinesq 方程式の分散特性

式 (14), (15) より非線形項を削除し一様水深を仮定すると、高次 Boussinesq 方程式に対する次の分散関係式 (16) が得られる。なお、以下の式は次元量で表示しているが、物理量を示す添字 * は省略する。

$$C^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = gh \frac{1 - \gamma_1(kh)^2 + \gamma_2(kh)^4}{1 - \gamma_3(kh)^2 + \gamma_4(kh)^4} \dots\dots\dots (16)$$

ここに、 k は波数であり、 $\alpha \equiv z_a/h$ として、 $\gamma_1 \sim \gamma_4$ はそれぞれ次式のように与えられる。

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}\alpha^2 + \alpha + \frac{1}{3}$$

$$\gamma^2 = \frac{5}{24}\alpha^4 + \frac{5}{6}\alpha^3 + \frac{7}{6}\alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{15}$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{2}\alpha^2 + \alpha$$

$$\gamma_4 = \frac{5}{24}\alpha^4 + \frac{5}{6}\alpha^3 + \alpha^2 + \frac{1}{3}\alpha$$

α は $-1 \leq \alpha \leq 0$ の範囲で任意の値を選ぶことができるが、その値によって高次 Boussinesq 方程式の分散特性も変化する。図-2 に式 (16) において α を変化させた場合の相対水深と位相速度の関係を示す。図中の C_{linear} は微小振幅波理論の分散関係式から得られる波速を表す。また、比較のために Nwogu の方程式および従来の Boussinesq 方程式 (Peregrine, 1967) から得られる分散関係も示してある。なお、Nwogu の方程式における α については、Nwogu (1993) の推奨する $\alpha = -0.531$ を採用している。 $\alpha = 0$ から $\alpha = -1$ のどの値を選んでも位相速度は過大に評価される傾向があるが、 α が -0.625 のとき最も直線 $C/C_{linear} = 1$ に漸近し、Nwogu の方程式よりさらに相対水深が大きい領域まで分散性が改善されている。

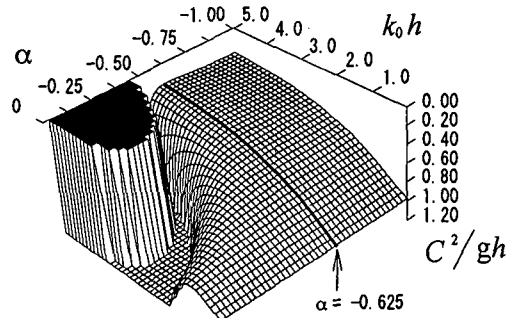


図-3 高次 Boussinesq 方程式の安定領域

図-3 は式 (16) から C^2/gh を α と $k_0 h$ の関数としてプロットしたものである。 C^2/gh の値が負になる領域では波速が虚数になることから、この領域 (図中で黒く塗りつぶした部分) では擾乱が時間とともに増幅されて数値計算上不安定となる。図より、高次 Boussinesq 方程式に対しては、 $\alpha < -0.5$ の値を選ぶ限り相対水深 $k_0 h$ によらず安定条件を満たすことがわかる。

4. 数値計算法

高次 Boussinesq 方程式 (14), (15) の離散化には差分法を用いた。空間方向の計算格子はスタッガードに配し、7 ないし 6 格子点での中央差分を行っている。これは、式 (14) が空間に対して最高 5 階の導関数を有することと、4 階以下の導関数について差分による打ち切り誤差項に 5 階以下の導関数が含まれるのを防止する目的からである。同様の理由から、最高 3 階の導関数を含む Nwogu の方程式およびそれに対し非線形項のみ高次項 ($O(\varepsilon\mu^2)$ の項) を導入した高次 Boussinesq 方程式では、5 ないし 4 格子点で離散化を行っている。

時間積分には Crank-Nicolson 法に基づく予測修正計算を用いた。ただし、非線形項に対しては、非線形項を構成している 2 つの未知量もしくはその空間導関数を用いて、 p , q として、以下に示すような取り扱いをしている。すなわち、時間ステップ $n+1/2$ における pq , pq_t である $(pq)_{n+1/2}$, $(pq_t)_{n+1/2}$ を時間ステップ n の既知量 p_n , q_n と時間ステップ $n+1$ の未知量 p_{n+1} , q_{n+1} で表すこととし、それぞれ次式のように与える。

$$(pq)_{n+1/2} = \frac{1}{2}(p_n q_{n+1} + p_{n+1} q_n) + \frac{1}{4}(p_{n+1} - p_n)(q_{n+1} - q_n) \dots\dots\dots (17)$$

$$(pq_t)_{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t}(p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n) + \frac{1}{2\Delta t}(p_{n+1} - p_n)(q_{n+1} - q_n) \dots\dots\dots (18)$$

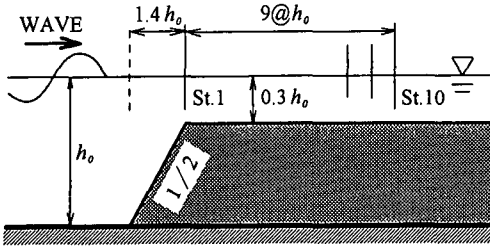


図-4 実験模型諸元および水面変動の測定点

表-1 入射波諸元

Case No.	H_0 [m]	T [s]	H_0/h_0	$4\pi^2 h_0/gT^2$
1	0.05	1.34	0.1	1.121
2	0.05	2.01	0.1	0.498
3	0.05	2.68	0.1	0.280

(19) を用いて長周期成分については自由透過させた。

5. 計算結果および実験結果との比較

ここで、 Δt は計算上の時間増分である。各々の時間ステップにおいて、まず第 1 段階で式 (17), (18) の第 1 項のみを用いて非線形項の予測計算を行い、続く第 2 段階以降では前段階で得られた p_{n+1}, q_{n+1} から式 (17), (18) の第 2 項を求め、非線形項を補正しつつ修正子を計算する。この操作により時間積分に対して非線形項は線形化され、式 (14), (15) の係数行列は帯行列となる。

計算にあたっては、沖側境界で水面変動 ζ_n が与えられるものとし、流速 u_{an} は次式により求めた。

$$u_{an}(t) = \frac{\omega}{kh[1 - \gamma_1(kh)^2 + \gamma_2(kh)^4]} \zeta_n \dots\dots\dots (19)$$

また、岸側の開境界では、非線形干渉により発生する高周波数成分の計算領域への反射を抑えるため数値消波フィルター (大山・灘岡, 1990) を施し、その外縁では式

高次 Boussinesq 方程式の適用性を検討するため、ステップ地形上の規則波の変形について模型実験結果との比較を行った。ステップの模型は 0.5 m の沖側水深 h_0 に対して図-4 に示す断面とした。入射波の波高 H_0 は一定で 5 cm とし、入射波周期 T を変化させた 3 通りのケースについて、図に示した 10 測点において水面変動の時間波形を計測した。各ケースの入射波諸元を表-1 に示す。高次 Boussinesq 方程式の波浪伝播変形計算は次の 2 つのタイプについて行った。1 つ目は、式 (14), (15) において $O(\mu^4)$ の項を省略し、Nwogu の方程式に対する高次項として $O(\varepsilon\mu^2)$ の非線形項のみを考慮した方程式であり、もう 1 つは、式 (14), (15) すなわち $O(\varepsilon\mu^2), O(\mu^4)$ の項を考慮した方程式である。両方程式は対象とする波動場にそれぞれ $Ur \geq 1, Ur \sim 1$ の仮定を設けたことにな

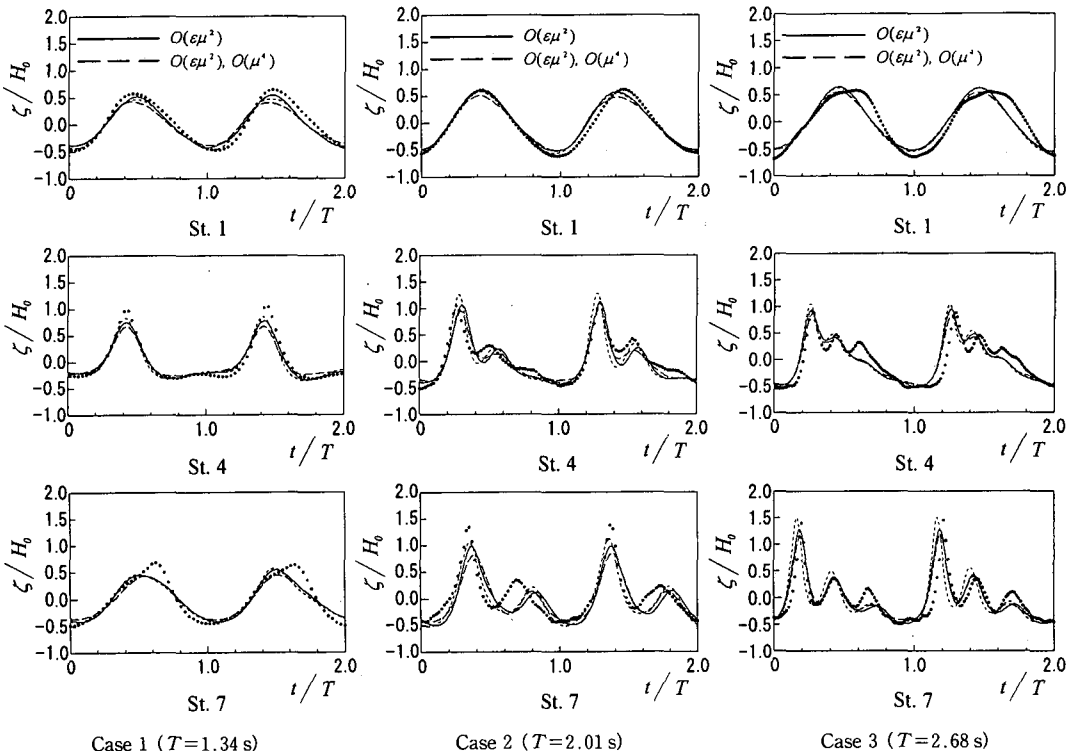


図-5 計算波形と実験波形の比較

る。

図-5に St. 1, 4 および 7 における計算波形と実験波形を示す。図中、黒丸は実験結果、実線、破線はそれぞれ $O(\varepsilon\mu^2)$ の高次 Boussinesq 方程式および $O(\varepsilon\mu^2)$, $O(\mu^4)$ の高次 Boussinesq 方程式の計算波形を示している。また、比較のために最低次数 $O(\varepsilon)$, $O(\mu^2)$ の Nwogu の方程式による計算波形を点線で示している。なお、各測点における実験波形と計算波形は、それぞれ St. 1 における計測波形のゼロアップクロス点に合わせて位相の整合を図っている。

$O(\varepsilon\mu^2)$ の高次 Boussinesq 方程式と Nwogu の方程式による計算結果には、峰の位相あるいは分裂後の峰の個数などの再現性について有意な差は認められない。ただし、 $O(\varepsilon\mu^2)$ の方程式による波形では、スペクトルをとってみると 4 倍周波数以上の成分の増幅が Nwogu の方程式によるものと比べて幾分抑制されており、峰の過大評価が若干改善されている。 $O(\varepsilon\mu^2)$, $O(\mu^4)$ の高次 Boussinesq 方程式による波形は、全ての Case について、すなわち入射波のアーセル数 Ur の大小に関わらず $O(\varepsilon\mu^2)$ の方程式の結果とほぼ一致している。わずかに第 2 波峰の生成が他の数値解より遅くなり (Case 2 の St. 4), この点については実験結果をより説明するものとなっている。 Ur が最も大きい Case 3 においてはどの数値解も第 3 波峰の生成を十分に再現していない。このことは、すでに藤間 (1986) が Peregrine タイプの Boussinesq 方程式に対して指摘しているように、 $Ur \sim 1$ の展開では非線形項のオーダーを上げても分裂波形の再現性については十分な改善にならないことを意味している。ここで検討した高次 Boussinesq 方程式の非線形項はただか $O(\varepsilon\mu^2)$ までのものであり、この領域の計算には $O(\varepsilon^2\mu^2)$ 項など非線形性の高次項も含める必要がある。なお、Kirby (1994) は分散性については $O(\mu^2)$ までとり、非線形性については $\varepsilon \sim 1$ とした高次 Boussinesq 方程式を誘導している。

6. おわりに

Nwogu の Boussinesq 方程式に対し $Ur \sim 1$ の仮定下

で 1 次数高次となる高次 Boussinesq を誘導し、ステップ地形上の波浪伝播変形計算に対する適用性を検討した。入射波の Ur が最も大きいケースでは、ここで誘導した非線形項の近似オーダー程度では分裂波形の再現性について十分な改善が見られず、より高次の非線形項を考慮する必要がある。数値計算において 4. に示したような非線形項の処理方法が適用できるとすると、非線形項を高次項まで追加しても計算労力上の負担はあまり増えない。非線形項に対する精度の向上については今後の課題である。

謝辞：本研究で用いた計算アルゴリズムについては清水建設株式会社技術研究所の大山 巧氏から貴重な助言を頂いた。ここに感謝の意を表します。

参考文献

- 磯部雅彦 (1994): 非線形緩勾配波動方程式の提案, 海岸工学論文集, 第 41 巻, pp. 1-5.
- 大山 巧・灘岡和夫 (1990): 数値波動水槽における開境界処理のための数値消波フィルターの開発, 海岸工学論文集, 第 37 巻, pp. 16-20.
- 後藤智明 (1984): アーセル数が大きい場合の非線形分散波の方程式, 土木学会論文集, 第 351 号/II-2, pp. 193-201.
- 灘岡和夫・中川康之 (1993): 新しい非線形・分散性波動方程式による非線形波動場解析の試み, 海岸工学論文集, 第 40 巻, pp. 6-10.
- 後野正雄 (1994): 強非線形平面不規則波動場に対する連成振動方程式とその基礎的特性, 海岸工学論文集, 第 41 巻, pp. 16-20.
- 藤間功司・後藤智明・首藤伸夫 (1986): 非線形分散波式の精度の検討, 土木学会論文集, 第 369 号/II-5, pp. 223-232.
- Kirby, J. (1994): Derivation and properties of a fully nonlinear model for weakly dispersive waves, Proc. Intl. Symp. Waves-Physical and Numerical Modelling, pp. 386-395.
- Nwogu, O. (1993): Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation, J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng., Vol. 119, No. 6, pp. 618-638.
- Peregrine, D. H. (1967): Long waves on a beach, J. Fluid Mech., Vol. 15, pp. 815-827.