

Boundary-Fit 法による任意海底形状の碎波変形解析

滝川 清*・山田文彦**・松本健作***

1. はじめに

碎波変形のように渦を伴った乱れの激しい現象を数值的に解析するためには、粘性流体を対象とした解析が必要であるが、そのような解析例は数例にすぎない(酒井ら, 1987; 滝川ら, 1991; 宮田ら, 1993; 柴山ら, 1994)

筆者ら(1991)は, FEM と SMAC 法を用いて N-S 方程式に基づいた数値解析手法を開発し, 室内実験との比較よりその有効性を示している。しかし,

(1) 直交座標を使用しているため, 複雑な海底形状に完全には対応していない。

(2) 3次元の拡張では, 記憶容量が莫大となる。

等の問題点は未解決のままである。

柴山ら(1994)は, 変換の測度等を解析的に求め一般曲線座標上での碎波帯内波浪場の解析を行っている。しかし, より複雑な境界形状に対応するためには, この変換の測度等を数值的に評価する必要がある。そこで本研究は, 格子生成法(Grid Generation)と境界適合座標(Boundary fitted coordinate)を用い, 任意海底形状における碎波変形の数値解析手法の開発を目的としている。

2. 境界適合座標

実空間上の解析領域 D を直交格子からなる長方形領域 D^* に座標変換し, 写像空間で物理現象を支配する偏微分方程式を解くことを考える(図-1参照)。

2.1 座標変換

実空間の座標系 (x, y) に対して写像空間の座標系 (ξ, η) を定義して次のような変換を行う。

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \quad \dots\dots\dots (1)$$

次にヤコビアンを式(2)で定義すると, 変換の測度は式(3)のようになる。

$$J = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) = (\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x)^{-1} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\xi_x = y_\eta / J, \quad \xi_y = -x_\eta / J, \quad \eta_x = -y_\xi / J, \quad \eta_y = x_\xi / J \quad \dots\dots\dots (3)$$

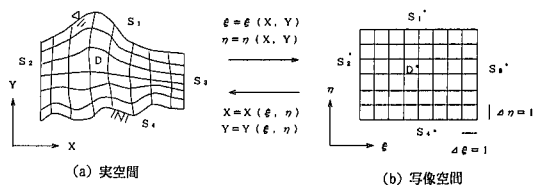


図-1 座標変換

なお, 下付き添字は偏微分であることを意味する。 f_x, f_y のような偏微分は差分化した際の保存性を保証するため(4), (5)式を用いる。

$$\begin{aligned} f_x &= \xi_x f_\xi + \eta_x f_\eta = \{J_\xi f_\xi + J_\eta f_\eta\} / J \\ &= \{y_\eta f_\xi - y_\xi f_\eta\} / J \\ &= \{y_\eta f_\xi + y_{\eta\eta} f - y_{\eta\xi} f - y_\xi f_\eta\} / J \\ &= \{(y_\eta f)_\xi - (y_\xi f)_\eta\} / J \quad \dots\dots\dots (4) \\ f_y &= \xi_y f_\xi + \eta_y f_\eta = \{J_\xi f_\eta + J_\eta f_\eta\} / J \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

2.2 格子生成法

図-1において, 境界 $S_1 \sim S_4$ は写像空間の境界 $S_1^* \sim S_4^*$ にそれぞれ対応している。写像空間の正方格子点 (ξ, η) はポアソン方程式(6)により, 実空間の格子点 (x, y) に1対1に対応づけることができる。(Thompsonら, 1985)

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = P(\xi, \eta), \quad \eta_{xx} + \eta_{yy} = Q(\xi, \eta) \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで, P, Q は格子間隔やねじれを制御する関数である。物理現象を支配する偏微分方程式は, 正方格子からなる写像空間上で解くため, 上記のポアソン方程式の独立変数 (x, y) と従属変数 (ξ, η) を入れ換えると, 下記の楕円型偏微分方程式(7)が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} &= -J^2 [x_\xi P(\xi, \eta) + x_\eta Q(\xi, \eta)] \\ \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} &= -J^2 [y_\xi P(\xi, \eta) + y_\eta Q(\xi, \eta)] \\ \alpha &= x_\eta^2 + y_\eta^2, \quad \beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta, \quad \gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

式(7)は, ポアソン方程式(6)に比べて複雑になるが, 境界条件を直線 $S_1^* \sim S_4^*$ 上で設定することができる。写像平面上の格子点 (ξ, η) に対する実平面上の格子点 (x, y) は, 境界 $S_1^* \sim S_4^*$ 上の座標値を Dirichlet 境界

* 正会員 工博 熊本大学教授 工学部土木環境工学科

** 正会員 工修 熊本大学助手 工学部土木環境工学科

*** 学生会員 工修 熊本大学大学院 自然科学研究科

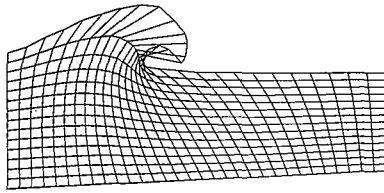
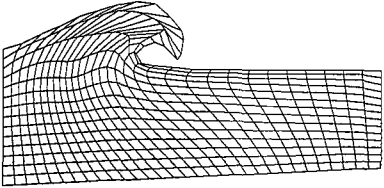
(a) $P=Q=0$ (b) $P(a=15, b=1, c=-1.5, d=0.5)$
 $Q(a=0, b=0, c=-1.5, d=0.5)$

図-2 格子分割状況

条件として、式(7)を数値的に解くことにより求めることができる。

この方法は Boundary-Fit 法とも呼ばれている。なお、境界適合座標を用いると境界条件等を厳密に取り扱える反面、移動境界問題となるため各時間ステップで計算格子を生成する必要が生じる。

2.3 制御関数 (P, Q)

本研究では等角写像とは異なり、変換の測度(metric)を数値的に評価しているが、砕波のように自由表面が多価関数となる場合には、通常境界適合格子の生成を行うことは困難である。そこで制御関数 P, Q を Thompson ら (1985) に従い、式(8)のように与えた。(関数 P についても同様)

$$Q(\xi, \eta) = -\sum_{i=1}^n a_i \cdot \text{sgn}(\eta - \eta_i) \exp(-c_i |\eta - \eta_i|) - \sum_{j=1}^m b_j \cdot \text{sgn}(\eta - \eta_j) \cdot \exp(-d_j \sqrt{(\xi - \xi_j)^2 + (\eta - \eta_j)^2}) \quad (8)$$

ここで、係数 (a_i, c_i) , (b_j, d_j) が正の場合、右辺第1項は $\eta = \eta_i$ の格子線に、第2項は (ξ_j, η_j) の格子点に周囲の格子を引き寄せる作用をし、係数によってその度合いを調整することができる。なお、 $\text{sgn}(x)$ は x の符号を意味する。係数を調整することで、巻き込み後も適合格子を生成できることを確認した(図-2参照)。

3. 基礎方程式の変換

直交座標 (x, y) での連続の式と N・S 方程式(9)~(11)を、境界適合座標 (ξ, η) に変換すると式(12)~(14)となる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F_x \quad (10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + F_y \quad (11)$$

$$\frac{1}{J} \frac{\partial(JU)}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial(JV)}{\partial \eta} = 0 \quad (12)$$

$$Ju_t + (JUu)_\xi + (JVu)_\eta = JF_x - \frac{1}{\rho} (J\xi_x P)_\xi - \frac{1}{\rho} (J\eta_x P)_\eta + [J\nu \{ (2\xi_x^2 + \xi_y^2)u_\xi + (2\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y)u_\eta + \xi_x\xi_y u_\xi + \xi_y\eta_x u_\eta \}]_\xi + [J\nu \{ (2\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y)u_\xi + (2\eta_x^2 + \eta_y^2)u_\eta + \xi_x\eta_y u_\xi + \eta_y\eta_x u_\eta \}]_\eta \quad (13)$$

$$Jv_t + (JVu)_\xi + (JVv)_\eta = JF_y - \frac{1}{\rho} (J\xi_y P)_\xi - \frac{1}{\rho} (J\eta_y P)_\eta + [J\nu \{ (\xi_x^2 + 2\xi_y^2)v_\xi + (\xi_x\eta_x + 2\xi_y\eta_y)v_\eta + \xi_x\xi_y u_\xi + \xi_y\eta_x u_\eta \}]_\xi + [J\nu \{ (\xi_x\eta_x + 2\xi_y\eta_y)v_\xi + (\eta_x^2 + 2\eta_y^2)v_\eta + \xi_y\eta_x u_\xi + \eta_y\eta_x u_\eta \}]_\eta \quad (14)$$

ここで (u, v) は (x, y) 方向の速度成分、 ρ は密度、 p は圧力、 (F_x, F_y) は (x, y) 方向の物体力成分である。また、 U, V は反変速度 (contravariant velocity) であり以下のよう定義する。

$$U = \xi_x u + \xi_y v, \quad V = \eta_x u + \eta_y v \quad (15)$$

式(15)から分かるように、 U はベクトル (ξ_x, ξ_y) とベクトル (u, v) の内積である。ここで、 ξ = 一定の曲線上における ξ の全微分をとると、

$$d\xi = \xi_x dx + \xi_y dy = 0 \quad (16)$$

となる。ここで (dx, dy) は ξ = 一定の曲線の接線ベクトルであるから、ベクトル (ξ_x, ξ_y) は ξ = 一定の曲線に垂直である。よって、反変ベクトル U は実空間における速度 (u, v) の ξ = 一定の曲線と直交する方向成分に比例する。同様に V は速度 (u, v) の η = 一定の曲線と直交する方向成分に比例している。

このように、反変流速 U, V は ξ, η 方向の流速成分に比例した量となるため、風上差分使用時の風向きの判定に使用する。

4. 境界適合座標における N・S 方程式の数値解法

4.1 離散化

前述のように境界適合座標における N・S 方程式の従属変数には、デカルト座標系の物理速度と反変速度を選び変数配置は速度と圧力を同一点で定義するレギュラー・グリッドを用いる。図-3に示すように、写像空間での格子点の間を通る界面に囲まれたコントロール・ボ

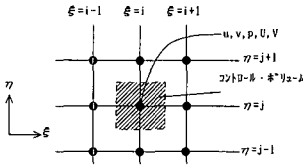


図-3 変数配置

リウムにおいて基礎式を (17) 式のように積分し、離散化方程式を導く。

$$\int_{\xi_{i-1/2}}^{\xi_{i+1/2}} \int_{\eta_{j-1/2}}^{\eta_{j+1/2}} d\eta d\xi \dots\dots\dots (17)$$

格子点 (i, j) において局所的座標系 (γ, δ) を式 (18) のように用いる。

$$\gamma = \xi - \xi_i, \quad \delta = \eta - \eta_j \dots\dots\dots (18)$$

x 方向について、運動方程式の積分形は (19) 式となる。

$$\begin{aligned} & \int_{-\delta\epsilon/2}^{\delta\epsilon/2} \int_{-\delta\eta/2}^{\delta\eta/2} (Ju_t)_{i,j} d\delta d\gamma \\ &= - \int_{-\delta\epsilon/2}^{\delta\epsilon/2} \{ (JUu)_{i+1/2,j} - (JUu)_{i-1/2,j} \} d\delta \\ & \quad - \int_{-\delta\eta/2}^{\delta\eta/2} \{ (JVu)_{i,j+1/2} - (JVu)_{i,j-1/2} \} d\gamma \\ & \quad + \int_{-\delta\eta/2}^{\delta\eta/2} \int_{-\delta\epsilon/2}^{\delta\epsilon/2} (JF_x)_{i,j} d\delta d\gamma \\ & \quad - \frac{1}{\rho} \int_{-\delta\eta/2}^{\delta\eta/2} \{ (J\xi_x p)_{i+1/2,j} - (J\xi_x p)_{i-1/2,j} \} d\delta \\ & \quad - \frac{1}{\rho} \int_{-\delta\epsilon/2}^{\delta\epsilon/2} \{ (J\eta_x p)_{i,j+1/2} - (J\eta_x p)_{i,j-1/2} \} d\gamma \\ & \quad + \int_{-\delta\eta/2}^{\delta\eta/2} [J \{ (2\xi_x^2 + \xi_y^2) u_\xi + (2\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) u_\eta \\ & \quad + \xi_x \xi_y v_\xi + \eta_y \eta_x v_\eta \}_{i,j+1/2} - J \{ (2\xi_x^2 + \xi_y^2) u_\xi \\ & \quad + (2\xi_x \eta_x + \eta_y \xi_y) u_\eta + \xi_x \xi_y v_\xi + \xi_y \eta_x v_\eta \}_{i-1/2,j}] d\delta \\ & \quad + \int_{-\delta\epsilon/2}^{\delta\epsilon/2} [J \{ (2\eta_x \xi_x + \eta_y \xi_y) u_\xi + (2\eta_x^2 + \eta_y^2) u_\eta \\ & \quad + \eta_y \xi_x v_\xi + \eta_x \eta_y v_\eta \}_{i,j+1/2} - J \{ (2\eta_x \xi_x + \eta_y \xi_y) u_\xi \\ & \quad + (2\eta_x^2 + \eta_y^2) u_\eta + \eta_y \xi_x v_\xi + \eta_x \eta_y v_\eta \}_{i,j-1/2}] d\gamma \\ & \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

4.2 移流項の3次精度上流差分スキーム

砕波のように乱れの激しい現象を数値的に精度よく解析するには、移流項の取り扱いが非常に大切である。武本ら (1986a, 1986b) は、Leonard (1983) が提唱した QUICK 法を一般座標に拡張し、任意形状の物体回りの計算を行っている。本研究も同様の手法を用い、直接シミュレーションを行う。例えば運動方程式 (19) の ξ 方向の移流成分 $(JUu)_{i-1/2,j}$ は、次式となる。

$$\begin{aligned} (JUu)_{i-1/2,j} &= [\{ (JU)_{i-1,j} + (JU)_{i,j} \} / 2 \\ & \quad \cdot \{ (u_{i-1,j} + u_{i,j}) / 2 - \text{CURVN} / 8 \\ & \quad + \text{CURVT} / 24 \}] \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

ここで CURV 項は、反変速度 U の風向きに従って以下の

ようにする。

$U_{i-1/2,j} > 0$ の場合は、

$$\text{CURVN} = u_{i,j} - 2u_{i-1,j} + u_{i-2,j} \dots\dots\dots (21)$$

$$\text{CURVT} = u_{i-1,j-1} - 2u_{i-1,j} + u_{i-1,j+1} \dots\dots\dots (22)$$

$U_{i-1/2,j} < 0$ の場合は、

$$\text{CURVN} = u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} \dots\dots\dots (23)$$

$$\text{CURVT} = u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1} \dots\dots\dots (24)$$

となる。

4.3 数値積分方法

境界条件については後述するが、以上のようにして得られた差分近似式を時間に関して数値積分する場合、積分の過程を2ステップに分割 (Fractional step 法) した方法を用いる。(武本ら, 1986a, 1986b; 村上ら, 1988)

第1ステップでは、移流項と粘性項の半分を考慮し explicit スキームのうちの時間2次精度の Adams-bashforth 法を適用する。そして、第2ステップで粘性項の残り半分と圧力項を扱い、流速に関して implicit なスキームで安定性の向上をはかる。

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= u^n + \Delta t \left\{ -\frac{1}{\rho} p_x^{n+1/2} + HX^{n+1/2} \right. \\ & \quad \left. + (1-\delta)FX^n + \delta FX^{n+1} \right\} \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^{n+1} &= v^n + \Delta t \left\{ -\frac{1}{\rho} p_y^{n+1/2} + HY^{n+1/2} \right. \\ & \quad \left. + (1-\delta)FY^n + \delta FY^{n+1} \right\} \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

$$HX^{n+1/2} = -(3/2)hx^n + (1/2)hx^{n-1} \dots\dots\dots (27)$$

$$HY^{n+1/2} = -(3/2)hy^n + (1/2)hy^{n-1} \dots\dots\dots (28)$$

$$hx = (uu)_x + (uv)_y \dots\dots\dots (29)$$

$$hy = (uv)_x + (vv)_y \dots\dots\dots (30)$$

$$FX = \{ 2\nu u_x \}_x + \{ \nu (u_y + v_x) \}_y \dots\dots\dots (31)$$

$$FY = \{ \nu (u_y + v_x) \}_x + \{ 2\nu v_y \}_y \dots\dots\dots (32)$$

hx, hy は移流項であり式 (13), (14) に示す変換された式を用い、式 (20) の QUICK スキームを組み込む。

HX, HY は移流項に対し Adams-Bashforth 法による数値積分を適用したものである。 FX, FY は拡散項であり、同様に式 (13), (14) に示す変換された式を用いる。 Δt は時間ステップ、 δ は semi-implicit スキームを与える定数で $0 \leq \delta \leq 1$ の範囲をとる。 $\delta \geq 1/2$ では計算の安定性が高まり、大きな時間ステップの使用が可能となる。今回の計算では、 $\delta = 1/2$ としている。

式 (25), (26) の中の既知量をまとめて以下のようにおく、

$$\tilde{u} = u^n + \Delta t \{ HX^{n+1/2} + (1-\delta)FX^n \} \dots\dots\dots (33)$$

$$\tilde{v} = v^n + \Delta t \{ HY^{n+1/2} + (1-\delta)FY^n \} \dots\dots\dots (34)$$

これを式 (25), (26) に代入すると式 (35), (36) となる。

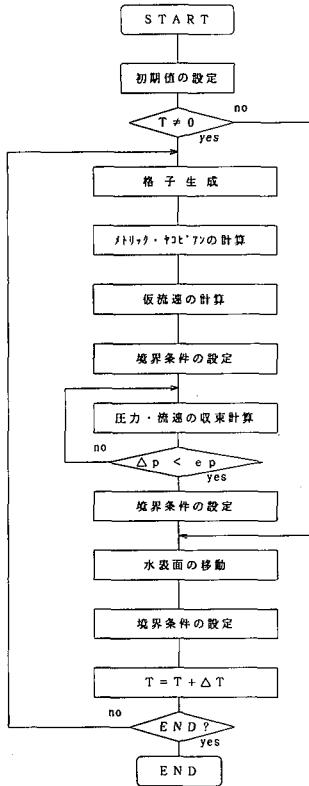


図-4 計算のフローチャート

$$u^{n+1} = \bar{u} + \Delta t \left\{ -\frac{1}{\rho} p_x^{n+1/2} + \delta F X^{n+1} \right\} \quad \dots\dots\dots (35)$$

$$v^{n+1} = \bar{v} + \Delta t \left\{ -\frac{1}{\rho} p_y^{n+1/2} + \delta F Y^{n+1} \right\} \quad \dots\dots\dots (36)$$

連続の式

$$u_x^{n+1} + v_y^{n+1} = 0 \quad \dots\dots\dots (37)$$

に式 (35), (36) を代入すると, 圧力に関するポアソン方程式 (38) が得られる.

$$p_{xx}^{n+1/2} + p_{yy}^{n+1/2} = \{ (\bar{u}_x + \bar{v}_y) / \Delta t + \delta (F X_x^{n+1} + F Y_y^{n+1}) \} \rho \quad \dots\dots\dots (38)$$

ここで $\bar{u}, \bar{v}$ は既知であるが, $F X^{n+1}, F Y^{n+1}$ は未知であるから, 式 (38) は運動方程式 (35), (36) と連成させて解かねばならない.

以上の数値計算のフローチャートを図-4 に示す.

5. 適用計算例

5.1 初期条件

本計算手法 (BFC 法) の適用性を検証するために, 一様斜面上での碎波変形を対象に 2 次元の計算を行い, 室内水槽実験および SMAC 法での結果 (滝川ら, 1991) と比較する. 表-1 に入射波の条件を示す.

なお, 碎波変形計算には, 表-1 の入射条件を用いた滝

表-1 入射波の条件

周期 (s)	入射水深 (cm)	入射波高 (cm)	沖波波形勾配	海底勾配	碎波形態
2.08	48.30	18.50	0.0283	1/20	巻き波



(a) BFC 法



(b) FEM

図-5 初期条件

川ら (1983) の FEM による碎波直前の速度および圧力の計算結果を, 初期条件として用いている.

図-5 に示すように FEM と BFC 法では計算格子が異なるため, BFC 用に計算データを補間して用いるが, この一連の操作はコンピューター上で直接行っている. 解析領域は, x 方向に 250 cm, y 方向が波峰で約 50 cm, 格子分割数は, FEM が x 方向に 56 分割, x 方向に 8 分割で, BFC 法が x 方向 125 分割, y 方向に 20 分割である. また, 時間ステップは FEM は 0.035 (S), BFC 法が 0.001 (S) である.

5.2 境界条件

まず水表面では, 時間的に変動する水表面の位置を計算する必要があるが, ここでは MAC 法にならって水表面の格子点をラグランジュ的に移動させることで運動学的境界条件を表現する. また力学的境界条件は粘性応力と表面張力を無視し, 水表面上で圧力を 0 としている.

また, 水表面上の速度は次式より求める.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (39)$$

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (40)$$

次に, 水底では

$$u = v = 0 \quad \dots\dots\dots (41)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho \left(-g + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad \dots\dots\dots (42)$$

入射側境界では, 逐次 FEM の計算結果を入力している. ただし, 時間ステップが違うため時間勾配を求め, 線形補間を行っている. 次に岸側の通過境界条件であるが, 図-5 に示すように本計算では, 解析領域に減衰領域を接続させているので, 特別な開境界処理は施していない. 減衰領域内の初期条件は $u=v=0$, 圧力は静水圧分布とし, 減衰領域長は解析領域長の半分, 分割数が 5 で

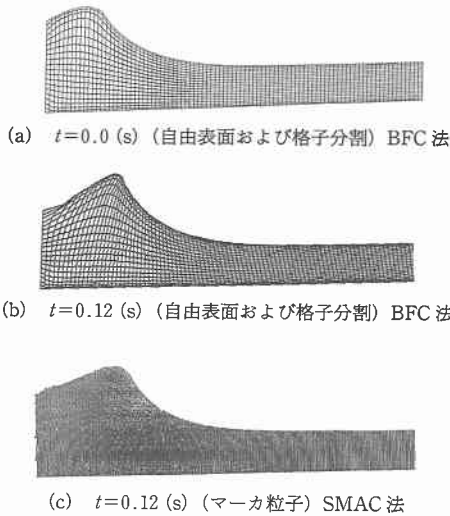


図-6 計算結果

等比数列により格子間隔を決定した。

5.3 計算結果

図-6 に計算結果を示す。(a), (b) は BFC 法による計算結果で、初期状態と 0.12 秒後の自由表面および格子分割を表し、(c) は SMAC 法による 0.12 秒後の計算結果で、マーカーにより自由表面および流体内部を表している。なお、SMAC 法の計算格子は x 方向 2 cm, y 方向 1 cm で、分割数は x 方向 122 分割, y 方向が 70 分割で、時間ステップは 0.003 秒である。

BFC 法の計算結果を見ると、時間の進行に伴って波峰が切り立って行く様子がよく再現されている。波峰高さのビデオ解析との差は約 3 cm であり、時々刻々変化する波では許容できる値と考えられる。また、流速分布についても実験結果および SMAC 法の計算結果とほぼ一致している。今回の計算で、BFC 法は SMAC 法に比べ計算速度で 1 割弱早く、記憶容量も少なく済むことがわかった。特に記憶容量は、3 次元への拡張では重要である。しかし、実験および SMAC 法では 0.2 秒付近で波の巻き込みが生じているが、BFC 法では再現できていない。

これについては境界条件を含め現在検討中である。

6. あとがき

格子生成法と境界適合座標を用いることで、複雑な海底形状での碎波変形の解析がある程度可能であることが確認できた。しかし、空気混入や乱れの 3 次元性など解決すべき問題は、依然として残されている。今後はさらに境界条件や格子生成法等を検討し、計算精度の向上を計るとともに、3 次元の碎波問題へと発展してゆきたい。

謝辞：本研究は、熊本大学による平成 6 年度教育研究学内特別経費の援助を受けて行われており、深甚なる謝意を表します。また、一般座標 QUICK 法の組込みに関して、四日市大学武本行正氏が作成・公開したプログラムを参考にさせていただいている。記して謝意を表する。

参 考 文 献

- 酒井哲朗ら (1987): 斜面上の巻き波型碎波の碎波後の運動の機構の数値解析, 第 34 回海岸工学講演会論文集, pp. 71-75.
- 柴山知也ら (1994): 乱流方程式を用いた碎波帯内波浪場の数値モデル, 海岸工学論文集, 第 41 巻, pp. 151-155.
- 滝川 清ら (1983): 有限要素法による斜面上の波の碎波変形と内部機構の解明, 第 30 回海岸工学講演会論文集, pp. 20-24.
- 滝川 清ら (1991): 斜面上の碎波変形過程の内部特性とその数値解析, 海岸工学論文集, 第 38 巻, pp. 61-65.
- 武本行正ら (1986a): 3 次元非圧縮性粘性流体解析コード, 京都大学大型計算センター第 2 回ベクトル計算機応用シンポジウム論文集, pp. 98-107.
- 武本行正ら (1986b): ライブラリプログラムの紹介 (72), 京都大学大型計算センター広報, Vol. 19, No. 4, pp. 319-333.
- 宮田秀明ら (1993): 有限差分法による 2 次元及び 3 次元波崩れの数値シミュレーション, 造船論文集, 第 175 号, pp. 11-24.
- 村上周三ら (1988): 一般曲線座標系による室内気流数値シミュレーション その 1, 建築学会論文集, pp. 9-17.
- Leonard, B. P. (1980): The Quick Algorithm: A Uniform Third-Order Finite Difference Method For Highly Convective Flows, Computer Methods in Fluids, Pentech Press, pp. 159-195.
- Thompson, J. F. et al. (1985): Numerical Grid Generation, North Holland.