

乱流波動境界層に対する閉形式の解

Magnus Larson*

1. 緒 言

海底上に波が伝播する際に発生する振動流境界層は沿岸域での多くの水理現象と重要な関係を持つ。例えば海底摩擦による波エネルギーの減衰や底質移動の開始条件と漂砂量などが挙げられる (Grand・Madsen, 1986)。波動境界層内では流速は鉛直方向に急速に変化し、これによって、大きな剪断応力、高いエネルギー減衰率、強い乱れなどが生じる。振動流は一方向流の場合に比してはるかに小さな特性厚を持つ境界層を生じさせる。したがって底面近傍での流速勾配やそれに伴う剪断応力は振動流の下では一方向流下よりも極めて大きく、多くの場合に底面付近では波の作用が流れの作用より卓越する。しかしながら波による振動流自身はしばしば底質のネットの輸送は生じさせず、主に擾乱効果をもつだけで、それに重なった流れがたとえそれ自身としては底質を移動・輸送するには弱過ぎても、ネットの輸送には顕著な影響を及ぼすことが多い。本研究は波による振動流の下で生じる境界層を主たる対象とするが、本論文で提示される境界層内の流速分布に対する一般的な解は任意の時間変化をする主流場に対して有効である。

現地海岸では、波動境界層はほぼ常に粗面乱流であろう (Nielsen, 1992)。波動境界層内の流速を計算するための既存の簡単な方法の大部分では乱流をモデル化するために渦動粘性の概念を用いており、渦動粘性係数は底面からの高さの関数として扱われている (Kajiura, 1968; Grant・Madsen, 1979; Brevik, 1981; Myrhaug, 1982)。これらのモデルは主に渦動粘性係数 ν_e が高さ z に対してどのように変化するかを定式化の点で相互に異なっている。最も簡単なモデルは ν_e が z に対し線形的に変化すると仮定するものであり (Grand・Madsen, 1979)、もっと複雑なモデルでは境界層をいくつかの層に分けて、各層ごとに ν_e と z を別個の式で関係づけている (Kajiura, 1968)。実際には ν_e は時間 (位相) にも依存するはずであり、Trowbridge・Madsen (1984) は時間によっても変

化する渦動粘性係数を仮定したモデルを開発した。しかしながら、ほとんどのモデルでは波動境界層内の流速の算定値は ν_e の定式化にはそれほど極端に敏感ではなく、Grand・Madsen (1979) によって提案されたような単純なモデルでも満足な結果が得られることが少なくない。このことは、特に漂砂量を算定するために境界層内流速場の計算を行う際に当てはまる。というのも、既存の漂砂量算定式はそれ自身かなりの不確かさを有しているので、流速場の計算をあまり緻密にやっても意味が薄いためである (Madsen・Wikramanayake, 1991)。

本研究の主目的は、主流の流速が正弦波でない場合にも使えるような粗面乱流の条件下での振動流境界層内流速の簡潔な解析解を導くことである。そのような流速場は、波動流速の非対称性により底質のネットの輸送を生じさせるような非線形の浅海波によって生じる。解析的なモデルの導入にあたっては、運動量方程式中の非線形項の効果が無視でき、したがって線形の境界層方程式が適用できると仮定する。乱流応力をモデル化するために Grant・Madsen (1979) にならった簡単な渦動粘性係数の記述式を用いる。提案されたモデルは正弦振動流については Jonsson (1980) のデータ、クノイド波タイプの非対称流速場については灘岡ら (1994) のデータにより検証する。

2. 理論的検討

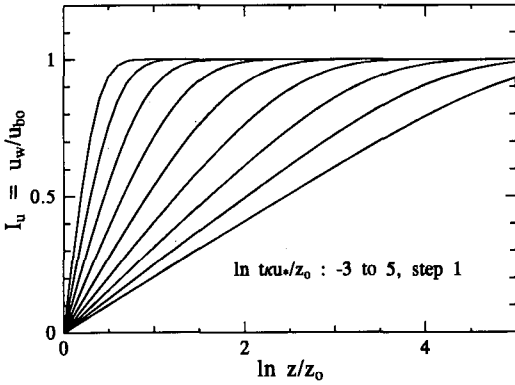
(1) 一般的な解

Grant・Madsen (1979) による簡単な渦動粘性モデルを用いることにより、線形化された乱流境界層方程式は次式で与えられる (Nielsen, 1992)。

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_w - u_b) = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \kappa u_{*m} z \frac{\partial}{\partial z} (u_w - u_b) \right\} \cdots \cdots (1)$$

ここで、 $u_w(z, t)$ は乱流境界層内の流速、 $u_b(t)$ は主流 (波動) 流速、 t は時間、 z は底面に原点をもつ鉛直座標、 κ は Karman 定数 ($=0.40$)、 u_{*m} は一定値をとる代表的な底面摩擦速度である。 z_0 を底面粗度高さとする、 $z = z_0$ で $u_w = 0$ 、および $z \rightarrow \infty$ で $u_w = u_b$ なる境界条件の下で、式 (1) は次のような一般解をもつ。

* 正会員 東京大学工学部土木工学科外国人研究員
(Assoc. Prof., Dept. of Water Resources Eng., Univ. of Lund, Sweden)

図-1 無次元高さと時間の関数としての積分 I_u

$$u_w = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} [u_b(t-\xi)] I_u(\xi, z) d\xi + u_{b0} I_u(t, z) \cdots (2)$$

ただし、 u_{b0} は $t=0$ における u_b であり、

$$I_u(t, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{4} y^2 \kappa u_{*m} t\right) \cdot \frac{J_0(y\sqrt{z_0}) Y_0(y\sqrt{z}) - J_0(y\sqrt{z}) Y_0(y\sqrt{z_0})}{J_0^2(y\sqrt{z_0}) + Y_0^2(y\sqrt{z_0})} \frac{dy}{y} \cdots (3)$$

ここで、 J_0 と Y_0 はそれぞれ 0 次の第 1 種および第 2 種のベッセル関数、 y は積分変数である。式 (3) は $t=0$ における時間に独立な主流流速 ($u_b(t)=u_{b0}=\text{const.}$) に対する解に相当する。したがって、任意の主流流速 $u_b(t)$ に対する解は、式 (2) 中の重畳積分で表現されるように無数の u_b の時間変化への応答を重ね合わせるにより得られる。図-1 は I_u と t および z との関係を無次元表示したものであり、図中の曲線は異なる時刻の流速分布に相当し、底面付近での乱流境界層の発達過程を示している。

任意の高さ z での剪断応力は次式から求められる。

$$\frac{\tau}{\rho} = \kappa u_{*m} z \frac{\partial u_w}{\partial z} = \kappa u_{*m} z \left\{ \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} [u_b(t-\xi)] I_s(\xi, z) d\xi + u_{b0} I_s(t, z) \right\} \cdots (4)$$

ここで、

$$I_s(t, z) = \frac{1}{\pi \sqrt{z}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{4} y^2 \kappa u_{*m} t\right) \cdot \frac{-J_0(y\sqrt{z_0}) Y_1(y\sqrt{z}) + J_1(y\sqrt{z}) Y_0(y\sqrt{z_0})}{J_0^2(y\sqrt{z_0}) + Y_0^2(y\sqrt{z_0})} dy \cdots (5)$$

であり、 J_1 と Y_1 はそれぞれ 1 次の第 1 種および第 2 種のベッセル関数である。 $t \rightarrow 0$ では $I_s \rightarrow \infty$ となるが、無限大への近づき方は緩やかであり、式 (4) の重畳積分中の特異点処理は容易である。しかしながら、もし $u_b \neq 0$ な

らば、底面上微小高さで $u_w = u_{b0}$ となるのと同時に $z = z_0$ では $u_w = 0$ となるので、その場合には時刻 $t=0$ で剪断応力が無限大になってしまう。なお、式 (3) と (5) 中の積分は計算に時間がかかるので、式 (2) および (4) による u_w と τ の計算時間を節約するためには、 I_u と I_s に対する照合表を予め求めておくのが便利である。

物理的観点からすれば上記の解は式 (1) の背後にある仮定が適用可能な波動境界層に対してのみ意味を持つが、式 (2) は任意の主流流速に対する式 (1) の一般解であるといえる。この解は唯一の任意パラメータとして粗度長さ z_0 を含んでおり、 z_0 は平坦床上の粗面乱流の場合には一般に Nikuradse の相当粗度 (底質粒径) k_n を用いて $z_0 = k_n/30$ と置かれる (Grant・Madsen, 1979)。 z_0 を設定すれば代表摩擦速度 u_{*m} は解から陰的に求められる。Grant・Madsen (1979) は正弦振動流の下での乱流境界層についての研究において、代表摩擦速度を 1 周期間の最大底面剪断応力 $\tau_{b\max}$ を用いて $u_{*m} = (\tau_{b\max}/\rho)^{1/2}$ (ρ は水の密度) で与えている。主流流速の時間変化がもっと複雑な場合には、1 周期間の底面剪断応力の絶対値の平均値 τ_{bav} などを使って u_{*m} を定義した方がより妥当な可能性がある。

(2) 正弦振動流

式 (2) はラプラス変換を用いて導いたものであるが、主流流速 $u_b(t)$ が簡単な場合には式 (2) よりももっと便利な形式で解を与える。もし主流が正弦的で、流速振幅 u_0 と角速度 ω により $u_b = u_0 \cos(\omega t)$ と記述できるならば、次式の解が式 (1) および境界条件を満足する。

$$u_w = u_0 \cos(\omega t) - u_0 \cdot \frac{N_0\left(2\sqrt{f\frac{z}{z_0}}\right)}{N_0(2\sqrt{f})} \cdot \cos\left\{\omega t + \Phi_0\left(2\sqrt{f\frac{z}{z_0}}\right) - \Phi_0(2\sqrt{f})\right\} - \frac{2u_0}{\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{\omega t}{f} y^2\right) \cdot \frac{y^3}{y^4 + (4f)^2} \cdot \frac{J_0\left(y\sqrt{\frac{z}{z_0}}\right) Y_0(y) - Y_0\left(y\sqrt{\frac{z}{z_0}}\right) J_0(y)}{J_0^2(y) + Y_0^2(y)} dy \cdots (6)$$

ここで、 N_0 と Φ_0 はそれぞれ 0 次のケルヴィン関数 $\text{ker}_0(x) + i \text{kei}_0(x)$ の係数と位相であり、 $f = \omega z_0 / \kappa u_{*m}$ 。式 (6) の第 2 項は f の小さな値に対して急速に減衰・消滅する遷移項であり、ほとんどの場合に 1 周期後には無視できるほどのになる。定常状態での剪断応力は次式で与えられる (式 (4) の前半参照)。

$$\frac{\tau}{\rho} = -\kappa u_0 u_{*m} \sqrt{f \frac{z}{z_0}} \cdot \frac{N_1\left(2\sqrt{f\frac{z}{z_0}}\right)}{N_0(2\sqrt{f})} \cdot \cos\left\{\omega t - \frac{\pi}{4} + \Phi_1\left(2\sqrt{f\frac{z}{z_0}}\right) - \Phi_0(2\sqrt{f})\right\} \cdots (7)$$

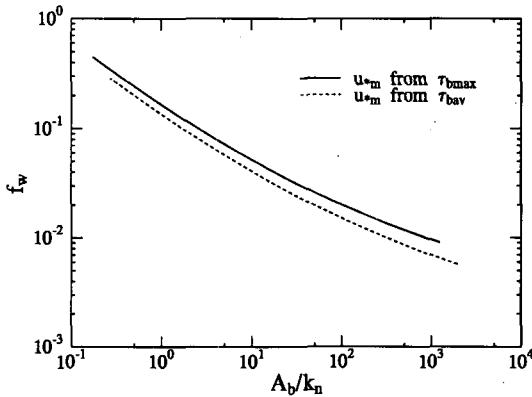


図-2 正弦振動流に対する摩擦係数

ここで、 N_1 と Φ_1 はそれぞれ 1 次のケルヴィン関数の係数と位相である。正弦振動流に対する解の定常項は以前に Grant・Madsen (1979) により導かれている (Kajiura, 1968 も参照のこと)。

最大底面剪断応力を速やかに評価するためには、いわゆる波動摩擦係数 f_w を $\tau_{b\max} = (1/2)\rho f_w u_0^2$ によって定義しておくのが便利である (Jonsson, 1966, 1980)。 $\tau_{b\max}$ を用いて u_{*m} を定義した Grant・Madsen (1979) に従えば、式 (7) より求まる $\tau_{b\max}$ の表示式から f_w が得られる。これに代わる方法として前述のように u_{*m} を τ_{bav} によって定義する方法がある。ただし f_w の計算はやや複雑になる。また、 τ_{bav} を用いた場合には乱流拡散が小さくなるので、 $\tau_{b\max}$ ひいては f_w も $\tau_{b\max}$ を用いた場合より小さくなるであろう。図-2 は、 u_{*m} の定義に $\tau_{b\max}$ と τ_{bav} を用いた場合のそれぞれに対して、粗度 k_n の粗面上の波動摩擦係数 f_w を底面近傍軌道振幅 $A_b (= u_0/\omega)$ の関数として示したものである。

(3) 流れ関数法で与えられる主流流速

流れ関数法 (Dean, 1965) は深海から砕波近傍までの波に有効なので、非線形波の特性を記述するのに便利である。流れ関数法で記述される波の底面近傍軌道流速は次式のように表される。

$$u_b = -\frac{2\pi}{L} \sum_{n=1}^N nX(n) \cdot \cos(n\omega t) \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 L は波長、 $X(n)$ は流れ関数の係数、 N は用いる理論の次数である。式 (8) で与えられる流速 u_b は余弦成分波の和であり、この u_b に対応する式 (1) の定常解は次式で与えられる。

$$u_w = \sum_{n=1}^N u_n \cdot \frac{N_0 \left(2\sqrt{nf \frac{z}{z_0}} \right)}{N_0 (2\sqrt{nf})} \cdot \cos \left[n\omega t + \Phi_0 \left(2\sqrt{nf \frac{z}{z_0}} \right) - \Phi_0 (2\sqrt{nf}) \right] - u_n \cos(n\omega t) \quad \dots\dots\dots (9)$$

ただし、 $u_n = 2\pi n X(n)/L$ 。また、対応する剪断応力は、

$$\frac{\tau}{\rho} = Ku_{*m} \sqrt{f \frac{z}{z_0}} \sum_{n=1}^N u_n \sqrt{n} \cdot \frac{N_1 \left(2\sqrt{nf \frac{z}{z_0}} \right)}{N_0 (2\sqrt{nf})} \cdot \cos \left[n\omega t - \frac{\pi}{4} + \Phi_1 \left(2\sqrt{nf \frac{z}{z_0}} \right) - \Phi_0 (2\sqrt{nf}) \right] \quad \dots\dots\dots (10)$$

で与えられる。

流れ関数法で記述される波は、2 つの無次元パラメータ h/L_0 と H/L_0 によりユニークに定義される (Dean, 1990) (h は水深、 H は波高であり、添え字 0 は深海条件を意味する。 h/L_0 と H/L_0 のそれぞれが等しい波は同一の無次元流速 $u_b/(H/T)$ を生じる。したがって、波高と周期の比 H/T は正規化のための 1 種の基準「流速」と考えうる。流れ関数法で与えられる波に対する摩擦係数は無次元粗度 k_n/H のみならず h/L_0 と H/L_0 にも依存する。この場合の摩擦速度は、剪断応力の絶対値の 1 周期間の積分値から求まる τ_{bav} を用いて算定される。

3. 結果と考察

乱流境界層の記述についての式 (1) の妥当性を検証する最初のステップとして、振幅が u_0 で正弦的に変化する主流流速 u_b に対する境界層内流速 u_w に関する振動流装置での Jonsson (1980) の実測値を用いた。先ず式 (2) が式 (6) と同一の結果を与えることを確かめ、そして実測データとの比較のためには解のうちの定常状態に相当する部分のみを使った。Jonsson (1980) は次の 2 つのケースに対するデータを示している：1) $u_0 = 2.11$ m/s, $T = 8.39$ s, $k_n = 2.3$ cm, 2) $u_0 = 1.53$ m/s, $T = 7.20$ s, $k_n = 6.3$ cm。主流の流速振幅 u_0 と軌道振幅 A_b を用いて定義されるレイノルズ数は、ケース 1 と 2 に対してそれぞれ 6.0×10^6 と 2.7×10^6 である。解析解と実測値の比較は 5 つの位相すなわち $t/T = 1/2, 5/8, 3/4, 7/8, 1$ に対して行った。粗度の値は Jonsson が与えている値をそのまま用いたので ($z_0 = k_n/30$)、いわゆるキャリブレーション・パラメータは 1 つもない。比較においては、 u_{*m} に対する 2 つの定義、 $u_{*m} = (\tau_{b\max}/\rho)^{1/2}$ と $u_{*m} = (\tau_{bav}/\rho)^{1/2}$ の両者を用いた。

図-3 と図-4 はそれぞれケース 1 と 2 に対する解析解と実測値の比較を示したものである。一般に、 τ_{bav} を用いた場合の方が実測値との一致度が概ね良好であるようにみえるものの、 u_{*m} に対する上記の 2 つの定義の違いによる差は小さい。実測データにおけるいわゆるオーバーシュート効果は解析解によっては完全には再現できておらず、それは特にケース 2 の場合に著しい。ケース 1 と 2 に対する波動摩擦係数 f_w の計算値はそれぞれ、 $\tau_{b\max}$ を用いた場合には 0.0186 と 0.033、 τ_{bav} を用いた場合に

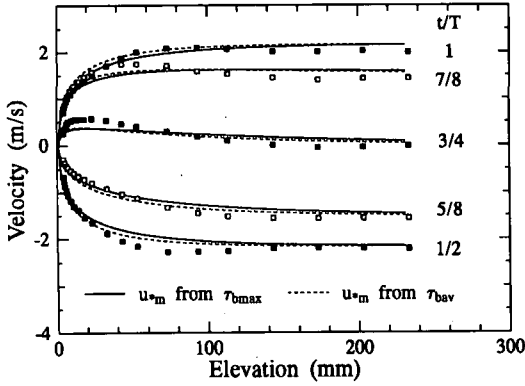


図-3 Jonsson (1980) のケース 1 に対する乱流境界層内流速分布の計算値と実測値

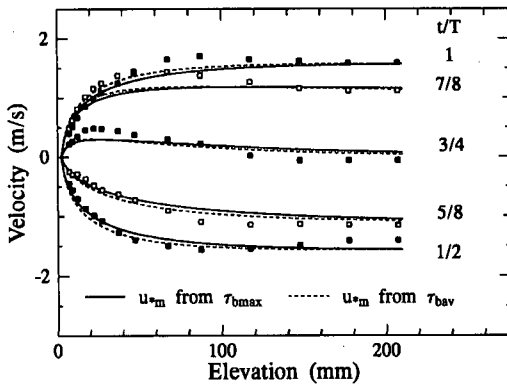


図-4 Jonsson (1980) のケース 2 に対する乱流境界層内流速分布の計算値と実測値

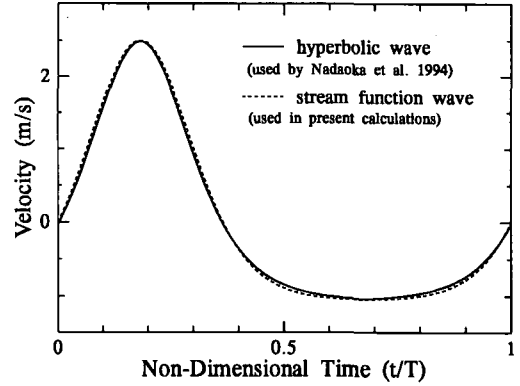


図-5 灘岡ら (1994) の実験におけるクノイド波タイプの主流流速

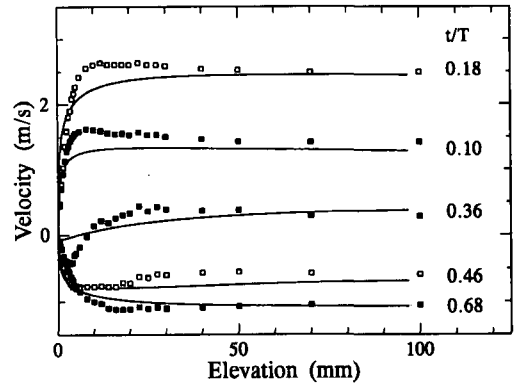


図-6 灘岡ら (1994) の非対称流速場に対する乱流境界層内流速分布の計算値と実測値

は 0.0139 と 0.0254 となった。 u_{*m} の定義の違いが u_w の計算値に及ぼす影響は、剪断応力に対するほどには大きくない。

灘岡ら (1994) は主流が非対称振動の場合に対して空気をを使った振動流装置の中での u_w を実測している。ここでモデルの検証に用いる実測データは、主流流速 u_b の正の最大値が 2.50 m/s、負の最大値が 1.05 m/s、周期が 5 s のクノイド波タイプのものである。このような u_b の時間変化を生じさせるクノイド波に対するアーセル数は $U_r = 57.8$ である (ただし、実験ではハイパボリック波によって生じる流速波形と合うような u_b が用いられた)。このような強非線形波への適用は線形の乱流境界層方程式にとってはその妥当性に対する厳しいテストとなる。というのは、基礎方程式中の非線形項を無視することは水粒子速度が波速に比してはるかに小さいことを前提としており (Madsen・Wikramanayake, 1991)、これは強非線形波に対しては当てはまらないからである。もっとも、振動流装置を用いた実験における境界層内では、非線形移流項は原理的にはゼロになる。

本研究では、式 (2) で与えられる解の中の u_b を表す

のにクノイド波やハイパボリック波を用いる代わりに、 u_b は 20 次の流れ関数法に基づいて近似した ($H = 5.26$ m, $T = 10.3$ s, $h = 8.22$ m)。ハイパボリック波および流れ関数法に対して求めた流速波形は図-5 に示されている。流れ関数法、クノイド波、ハイパボリック波は u_b に対して本質的には同一の時間波形を与える。しかしながら、流れ関数法を使えば、式 (2) の一般解を用いる際には必要な遷移過程に対する計算の必要なしに、定常状態に対応する式 (9) による直接的な u_w の計算が可能になる。底面はアルミニウム粉がスプレー糊で着けられており、実験条件としては水理学的に滑面と判断される (野本, 1995)。したがって、粗度高さ z_0 は粗度そのものにはよらず、空気の動粘性係数を ν_a として $z_0 = (3.3\nu_a/u_{*m})/30$ で計算される (Madsen・Wikramanayake, 1991)。実験中の気温は約 10 度であり、正と負の流速および軌道半径のそれぞれの平均値に基づくレイノルズ数は 2.8×10^5 である。実験における鉛直座標の原点位置は近似的に z_0 と一致すると仮定されている。

実験では滑面乱流になっているので、 z_0 は ν_a と u_{*m} から求め、底面粗度を評価するためのキャリブレーション

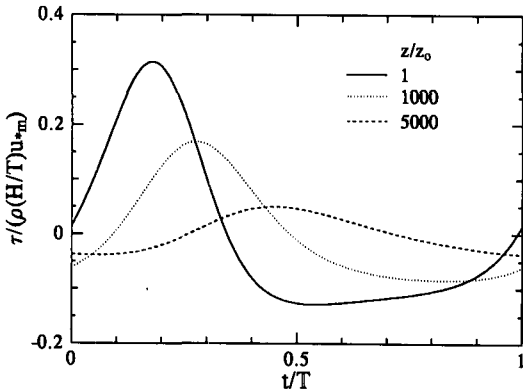


図-7 灘岡ら (1994) の実験条件に対する乱流境界層内の3つの高さにおける剪断応力の時間変化の計算値

ンは必要ない。代表剪断応力としては1周期絶対値平均の τ_{bav} を用いた。こうして求まる値は $u_{*m} = 0.065 \text{ m/s}$ および $z_0 = 0.024 \text{ mm}$ となった。図-6 はいくつかの位相 t/T に対する流速分布の実測値と計算値を示したものである。 u_b の正の最大値は $0.18t/T$ で、負の最大値は $0.68t/T$ で生じ、0 になるのは $0.36t/T$ である。本モデルの計算結果は境界層内の流速変化の全体の様子は扱っているが、オーバシュート効果、特に境界層内流速が正負逆転する位相でのそれは余りよく再現されていない。

z_0 に関する詳細な情報の不足や u_b の計算での流れ関数法の使用等も計算と実測の不一致に寄与していると思われるが、不一致の理由として可能性が最も高いのは、用いた渦動粘性係数の関数形が単純化し過ぎているためであろう。図-7 は無次元化された剪断応力の計算値を3つの高さについて時間の関数として示したものである。剪断応力 τ の時間変化は u_b の時間変化とかなり異なり、完全に（前後にも）非対称になっている。非線形波の下での剪断応力のこのような特性は、例えば漂砂量の計算に刻一刻の剪断応力を用いるような漂砂量算定法において重要であり、それを取り込む必要がある。

4. 結 語

式 (2) で与えられる解析解は、物理的観点からすれば線形の乱流境界層方程式の前提となる条件が満たされる場合にのみ意味を持つものであるが、一般論としては任意の時間変化をする主流流速に対して正しい。例えば、この解は一方向流の下での乱流境界層の発達過程を記述できる (図-1 参照)。しかしながら一方向流では境界層は無限の大きさにまで発達するので、あるところで境界層厚が水深に比して小さいという仮定が成立しなくなり解は物理的意味を失ってしまう。また、運動量方程式中の移流項が重要な強非線形の波に対しては、線形の乱流境界層方程式は余り信頼度の高くない解しか与えないで

あろう。実際、灘岡ら (1994) のデータで検証したケースについては、線形の方程式に基づく本論文の解は、特に境界層内流速が反転する位相において正確な計算値を与えることができなかった。

Grant・Madsen (1979) の簡単な渦動粘性モデルは、渦動粘性係数 ν_e が底面からの距離と共に制限なく増加するものではあるものの、少なくとも粗面乱流の正弦振動流境界層についてはほぼ満足な結果を与えるようである。ただし、これは主に流速分布について言えることであって、剪断応力は流速勾配に依存することから渦動粘性係数の定式化に対してより敏感である。同様に代表摩擦速度 u_{*m} の定義の差異に対しても、流速分布は剪断応力ほどには敏感でない。本研究では1周期間の剪断応力の絶対値平均に基づく u_{*m} の方が絶対値の最大値に基づくよりも、実測データとの一致度がやや良好であった。

参 考 文 献

- 灘岡和夫・八木 宏・二瓶泰雄・野本康介 (1994): 非対称振動流の乱流構造特性について, 海岸工学論文集, 第41巻, pp. 141-145.
- 野本康介 (1995): 直接通信.
- Brevik, I. (1981): Oscillatory rough turbulent boundary layers, Jour. Waterways, Port, Coastal and Ocean Eng., Vol. 103, pp. 175-188.
- Dean, R. G. (1965): Stream function representation of non-linear ocean waves, Jour. of Geophys. Res., Vol. 70, No. 18, pp. 4561-4572.
- Dean, R. G. (1990): Stream function wave theory and applications, in: Handbook of Coastal and Ocean Engineering, Herbich, J. B. (ed.), Gulf Pub. Co., Vol. 1, pp. 63-94.
- Grant, W. D. and O. S. Madsen (1979): Combined wave and current interaction with a rough bottom, Jour. Geophys. Res., Vol. 84, No. C4, pp. 1797-1808.
- Grant, W. D. and O. S. Madsen (1986): The continental-shelf bottom boundary layer, Annual Review of Fluid Mech., Vol. 18, pp. 265-305.
- Jonsson, I. G. (1966): Wave boundary layers and friction factors, Proc. 10th ICCE, pp. 127-148.
- Jonsson, I. G. (1980): A new approach to oscillatory rough turbulent boundary layers, Ocean Engineering, Vol. 7, pp. 109-152.
- Kajiura, K. (1968): A model of the bottom boundary layer in water waves, Bulletin of the Earthq. Res. Inst., Univ. of Tokyo, Vol. 46, pp. 75-123.
- Madsen, O. S. and P. N. Wikramanayake (1991): Simple models for turbulent wave-current bottom boundary layer flow, DRP-91-1, Coastal Engineering Research Center, US Army Waterways Experiment Station.
- Myrhaug, D. (1982): On a theoretical model of rough turbulent wave boundary layers, Ocean Engineering, Vol. 9, No. 6, pp. 547-565.
- Nielsen, P. (1992): Coastal Bottom Boundary Layers and Sediment Transport, World Scientific Pub. Co., Singapore.
- Trowbridge, J. and O. S. Madsen (1984): Turbulent wave boundary layers, I. Model formulation and first-order solution, Jour. Geophys. Res. Vol. 89, No. C5, pp. 7989-7997.