

任意地形上の不規則波に対する新しい連成振動方程式

後 野 正 雄*

1. ま え が き

海の波の変形を求める方程式には様々なものがある。流体力学的には3次元の流体運動を解かなければ波の変形を求められないが、実海域を対象としてこれを実行する事は非常に困難である。このため方程式を鉛直方向に積分し、平面2次元の方程式に変換する方法がよく用いられる。この鉛直積分を行うためには変数（あるいは物理量）の鉛直方向の分布形が必要である。

例えば、Berkhoff (1972) の緩勾配方程式には鉛直方向の分布形を定めるために、海底勾配は十分に緩やかであり、このため一定水深上の微小振幅波理論による鉛直方向分布形が適用できるという緩勾配の仮定が用いられている。この緩勾配方程式やここから派生する方物型方程式を初め、ブーシネスク方程式、不規則波に対する灘岡ら (1993)、後野 (1993)、磯部 (1994) の提案している方程式もすべて鉛直方向の分布形を定めるために同様な仮定を含んでいる。

これらの方程式は一定水深上での水底の境界条件を満たすような鉛直方向の分布形を用いている。このことから、これらの方程式で求められた水底における流速は水平方向成分しか持たず、斜面上においては水粒子が水底を出入りするような解を与え、水底の境界条件を満たさない。また、緩勾配であっても斜面上における底面流速を精度良く求めているのか疑問が残る。

実際の海底にはリーフ地形のように緩勾配とは見えない海底もある。また漂砂関連では波による底面流速を精度良く求めたいという要求も強い。このためにはまず斜面上の水底の境界条件をきちんと満たす（斜面上の法線方向流速が0で接線方向流速のみが存在する）ような流速を求める必要がある。

本研究の目的は、後野 (1993) による不規則波に対する連成振動方程式と同様な手法により、線形理論の範囲において、このような“急勾配”地形に対しても波の変形が求められ、任意地形上の水底での境界条件をきちんと満たすような新しい連成振動方程式を開発し、提案しようとするものである。

2. 理 論

2.1 基礎式と境界条件

静水面上に原点を置き、鉛直上向きに z 、水平面上に x, y 軸を取り、流速を $v=(u, v, w)$ で表す。後野 (1993) の線形波動場に対する連成振動方程式と同様に変動圧力 $\bar{p}=p/\rho+gz$ を用いると完全流体に対する運動方程式は次の様に表せる。

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \text{grad } \bar{p} = 0 \quad (1)$$

ここで、 p は圧力、 ρ は流体の密度、 g は重力の加速度である。この式 (1) の発散を求めると変動圧力 $\bar{p}$ に対するラプラス方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

また水面の力学的境界条件、運動学的境界条件は水位変動を $\eta=\eta(x, y, t)$ としてそれぞれ次のように表される。

$$\bar{p}=g\eta \quad \text{at } z=0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \quad \text{at } z=0 \quad (4)$$

式 (4) は水面の運動学的境界条件式と鉛直方向の運動方程式を用いて水面における鉛直方向流速 w を消去することによって得られる。水底 ($z=-h(x, y)$) における境界条件は水底での法線方向流速を v_n として、

$$v_n=0 \quad (5)$$

で表される。この条件式を時間で微分し、式 (1) を用いて書き換えると次のようになる。

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{1+(\nabla h)^2}} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nabla \bar{p} \cdot \nabla h \right) = 0 \quad \text{at } z=-h \quad (6)$$

ここで $\nabla=(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ は水平方向の微分演算子である。通常はこれを次式のように簡潔に表している。

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nabla \bar{p} \cdot \nabla h = 0 \quad \text{at } z=-h \quad (7)$$

2.2 変動圧力の鉛直方向分布

a) 緩勾配地形に対する鉛直分布

従来の理論において物理量の鉛直方向分布関数は、水底においてその鉛直方向微係数が0となるような関数形

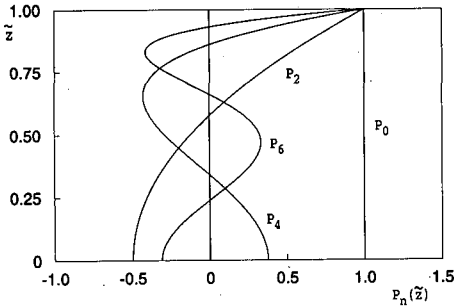


図-1 緩勾配におけるルジャンドル多項式の鉛直分布

が用いられている。これは一様水深では海底の境界条件を自然に満たすが、斜面上では満たすことはできない。このために緩勾配の仮定が必要となる。後野 (1993) の理論もこの点については同様で、変動圧力 $\bar{p}$ を偶数次のルジャンドルの多項式を用いて次のように級数展開している。

$$\bar{p} = \sum_{m=1}^M q_m(x, y, t) P_{2(m-1)}(\bar{z}) \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 $\bar{z} = 1 + z/h$, q_m は級数展開の係数、 $P_m(\bar{z})$ は m 次のルジャンドル多項式である。図-1 は式 (8) で用いられているルジャンドルの多項式を鉛直分布の形式で表したものであり、縦軸には $\bar{z}$ を用いている。 $\bar{z}$ は静水面で 1、水底で 0 を取る。この図より式 (8) のように表示した変動圧力 $\bar{p}$ は水底において

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = -h \dots\dots\dots (9)$$

となり、一定水深の場合を除いて式 (7) を満たさない。したがって、このような鉛直方向分布を用いて水深変化を含めた方程式を組み立てようとする、緩勾配の仮定が必要となる。

b) 任意地形に対する鉛直分布

本理論では任意地形を対象とするため、鉛直方向分布関数として自然数次のルジャンドルの多項式を用いる。自然数次のルジャンドルの多項式 $P_m(\bar{z})$ は区間 $[-1, 1]$ で直交性を持つことから、この直交性を利用するために、鉛直座標 z を式 (10) のように変換する。

$$z^* = 1 + 2\frac{z}{h} \dots\dots\dots (10)$$

また変動圧力 $\bar{p}$ は式 (11) のように級数展開する。

$$\bar{p} = \sum_{m=1}^M q_m(x, y, t) P_{n-1}(z^*) \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 $q_m(x, y, t)$ は級数展開の係数であり、この時点で未知量は水位変動 η と変動圧力の級数展開の係数 q_m ($m=1, 2, \dots, M$) の $M+1$ 個となる。図-2 はこの式で用いられているルジャンドルの多項式を図-1 と同様に示したものである。式 (10) より、 z^* は水面で 1、水底で -1

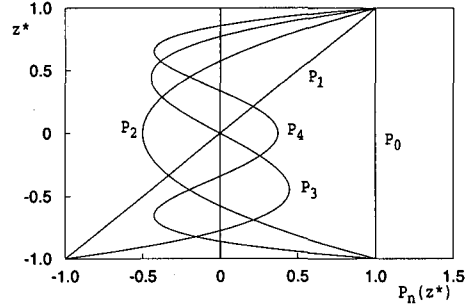


図-2 本理論におけるルジャンドル多項式の鉛直分布

の値を取る。図-2 より分るように、式 (11) のように級数展開した変動圧力は水底での鉛直方向微分値が $\neq 0$ となる。すなわち一定水深の場合においても水底の境界条件式 (7) を自然に満たすことはない。このことが逆に、任意地形、任意勾配の水底における境界条件式 (7) を満たすような係数を決定できる理由となる。

3. 支配方程式の導出

緩勾配地形の連成振動方程式と同様に、任意地形に対する連成振動方程式は水面の運動学的境界条件と水底の境界条件を考慮したガラーキン法とにより求められる。

3.1 振動方程式

水面の境界条件式 (3), (4) は式 (11) を用いて表すとそれぞれ次のようになる。

$$q\eta = \sum_{m=1}^M q_m \dots\dots\dots (12)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{1}{h} M(M-1) q\eta + \frac{1}{h} \sum_{m=1}^{M-1} \{M(M-1) - m(m-1)\} q_m \dots\dots\dots (13)$$

式 (12) は代数方程式であるので、これを用いると微分方程式における未知量の一つ消去できる。ここでは q_m を消去することにする。よって、未知量の数は水位変動 η と変動圧力の級数展開の係数 q_m ($m=1, 2, \dots, M-1$) の M 個となる。式 (13) はすでに q_M を消去して示している。また式 (13) は水位変動 η に関する微分方程式であるので、変動圧力の級数展開の係数 q_m ($m=1, 2, \dots, M-1$) に関する $M-1$ 本の方程式が必要となる。

3.2 連成方程式

連成方程式は変動圧力 $\bar{p}$ のラプラス方程式 (2) に対してガラーキン法を適用することにより得られる。

$$\int_{-h}^0 P_{n-1}(z^*) \Delta \bar{p} dz + \left(\nabla h \cdot \nabla \bar{p} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) P_{n-1}(z^*) \Big|_{z=-h} = 0 \quad \text{for } n=1, 2, 3, \dots, M-1 \dots\dots\dots (14)$$

ここで Δ は 3 次元のラプラシアンを示す。また、左辺第 2 項は水底の境界条件式 (7) を束縛条件として考慮し

ていることを意味する。これにより、水底の境界条件を満たすような未定係数 q_m を定める連成方程式が得られる。このガラーキン法を適用した鉛直方向積分により3次元の基礎方程式(式(2))が平面2次元の方程式に変換できる。この式の積分を実行し、式(12)を用いて q_M を消去すると次の式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{h}{2n-1} \nabla^2 q_n + \nabla h \sum_{m=1}^{M-1} a_{nm} \nabla q_m + \nabla^2 h \sum_{m=1}^{M-1} b_{nm} q_m \\ & + \frac{(\nabla h)^2}{h} \sum_{m=1}^{M-1} c_{nm} q_m + \frac{1}{h} \sum_{m=1}^{M-1} d_{nm} q_m \\ & = (-1)^{M+n} g \nabla \cdot (\eta \nabla h) \\ & + n(n-1) (-1)^{M+n} \frac{g \eta}{h} (\nabla h)^2 - \frac{g \eta}{h} \Theta \\ & \text{for } n=1, 2, \dots, M-1 \dots (15) \end{aligned}$$

緩勾配理論では $|\nabla h|^2$ と $\nabla^2 h$ に比例する項は無視されているが、本理論においては任意地形を対象とすることから上式におけるこれらの項は無視出来ない。なお式中の記号は以下の通りである。

$$\Theta = M(M-1) - \{1 - (-1)^{M+n+1}\} n(n-1) \dots (16)$$

$$a_{nm} = \begin{cases} (-1)^{m+n} + (-1)^{M+n} & \text{for } 1 \leq m \leq n-1 \\ \frac{1}{2n-1} + (-1)^{M+n} & \text{for } m=n \\ (-1)^{m+n+1} + (-1)^{M+n} & \text{for } n+1 \leq m \leq M-1 \end{cases} \dots (17)$$

$$b_{nm} = \begin{cases} (-1)^{M+n} & \text{for } 1 \leq m \leq n-1 \\ \frac{1-n}{2n-1} + (-1)^{M+n} & \text{for } m=n \\ (-1)^{m+n+1} + (-1)^{M+n} & \text{for } n+1 \leq m \leq M-1 \end{cases} \dots (18)$$

$$c_{nm} = \begin{cases} (-1)^{m+n} m(m-1) + (-1)^{M+n} n(n-1) & \text{for } 1 \leq m \leq n-1 \\ \frac{2n(n-1)^2}{2n-1} + (-1)^{M+n} n(n-1) & \text{for } m=n \\ \{(-1)^{m+n+1} + (-1)^{M+n}\} n(n-1) & \text{for } n+1 \leq m \leq M-1 \end{cases} \dots (19)$$

$$d_{nm} = \begin{cases} (-1)^{m+n+1} m(m-1) - \Theta & \text{for } 1 \leq m \leq n+1 \\ m(m-1) - \{1 - (-1)^{m+n+1}\} n(n-1) - \Theta & \text{for } n+2 \leq m \leq M-1 \end{cases} \dots (20)$$

本理論における変動圧力の鉛直方向の分布形は一定水深の場合においても水底の境界条件を満たさないことか

ら、一定水深を含めた斜面上での水底の境界条件をどの程度満たしているのかを調べなければならない。また、緩勾配の連成振動方程式と同じく不規則な波動場に本理論を適用した時にどの程度分散関係を満たしているのかも確認する必要がある。

4. 数値計算結果とその検討

4.1 数値計算方法

ここでは先の任意地形に対する連成振動方程式(式(13), (15))を一樣斜面上の定常規則波に適用し、水底における法線方向流速と波高分布について調べる。

計算に際しては式(13), (15)を後野ら(1994)と同様の手法により定常規則波に対する連成振動方程式に変換し、スプライン関数を応用した手法により計算した。

入射波境界における変動圧力の係数 q_{m1} はルジャンドル多項式の直交性より次式で求められる。

$$q_{m1} = \frac{2m-1}{h} \int_{-h}^0 P_{m-1}(z^*) g \eta \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} dz \dots (21)$$

ここで k は Airy 波理論の分散関係式による波数である。

沖波の波長を L_0 とした時、斜面は $h/L_0 = 0.5$ から $h/L_0 = 0.01$ まで一樣勾配 $S = |\nabla h|$ とし、斜面の両端には一定水深部を設けた。なお、斜面と一定水深部の接続部については滑らかに接続するように水深に対して数値的なスムージングを施した。このような一樣勾配の地形においては $\nabla^2 h$ に比例する項は斜面の両端部分にのみ有意な値を持つ。本計算においては $\nabla^2 h$ を無視した場合と考慮した場合の結果はほとんど差はなかった。ここでは $\nabla^2 h$ を考慮した計算結果を示す。

4.2 水底での法線方向流速

一樣勾配斜面上における水底での法線方向流速の振幅を水面での鉛直方向流速の振幅との比 V_n^* で表したものが図-3である。横軸には h/L_0 を用い、4種類の勾配について調べた結果を示している。級数展開の項数は $M=5$ とした。また、水底の法線方向流速は式(6)を時間で積分することにより求められる。この法線方向流速は0となるべきであるが、ここでは変動圧力を式(11)のように有限項で表示した近似解であるので誤差が生じる。図中の縦軸 V_n^* はその誤差を表している。図より、その誤差は十分に小さく、特に海底勾配 $S=0.05$ の緩勾配の結果(図中実線)では比水深が小さくなる程水底での法線方向流速は小さくなっている。また、 $S=1.0$ (45°) の急勾配においても(図中点線)、斜面の全域において水底での法線方向流速は水面の鉛直方向流速に比べてたかだか数%以下となっており、このような急勾配斜面上でも本理論による数値解は水底の境界条件を十分に満たしているといえる。ステップに近い $S=3.0$ (72°) の場合には、

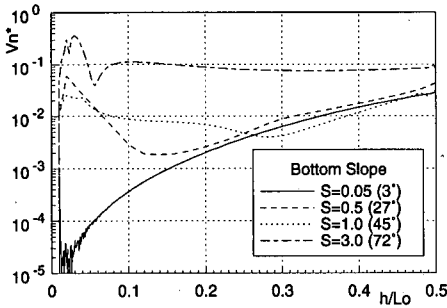
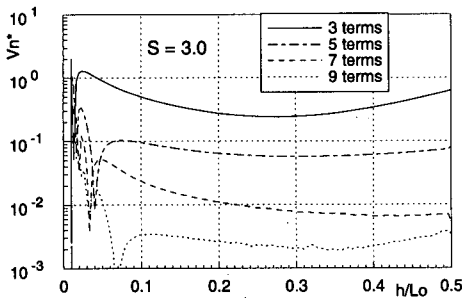
図-3 勾配による法線方向加速度の変化 ($M=5$)

図-4 項数による法線方向加速度の変化

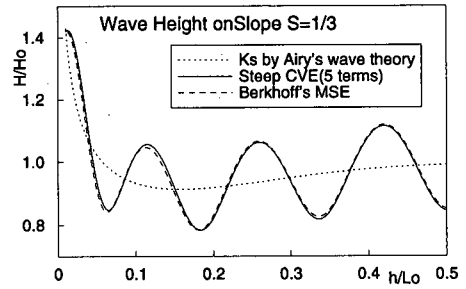


図-5 緩勾配方程式との比較 (波高分布)

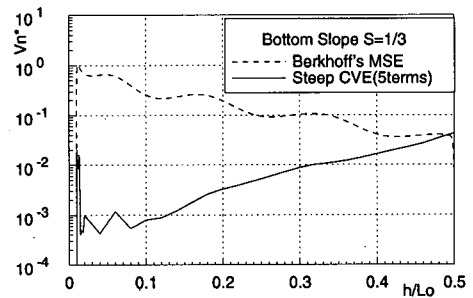


図-6 緩勾配方程式との比較 (水底条件)

法線方向流速は比水深の極小さな領域を除いて水面での鉛直方向流速の 10% 程度の値である。

なお、一定水深の部分における法線方向流速の振幅はほぼ一定で図の両端の値と同じ程度の大きさを示す。水深の深い側 ($h/L_0=0.5$) ではその値は約 0.03 程度であり、水面での鉛直方向流速の 3% 程度の水底での法線方向流速 (この場合は鉛直方向流速に等しい) を生じている。一方、比水深の小さな側 ($h/L_0=0.01$) ではその誤差は非常に小さい。すなわち、一定水深上の比水深の大きな波に対して本理論を用いることは適切ではない。

図-4 は先の勾配 $S=3.0$ (72°) に対して級数展開の項数を変化させた場合の水底の法線方向流速の振幅を図-3 と同様に示したものである。図中には $M=3, 5, 7, 9$ の場合の結果が示しており、級数展開の項数が増えるとともに水底の法線方向流速は急激に減少している。展開項数 M を 9 とすると (図中点線)、 $S=3.0$ (72°) に対する水底の法線方向流速は一定水深部との接続部近傍を除いて水面の鉛直方向流速の 1% 以下の値となり、精度が向上していることが分る。

4.3 緩勾配方程式との比較

ここでは最も代表的な Berkhoff (1978) の緩勾配方程式を用いて、緩勾配方程式との比較を行う。

緩勾配方程式の適用限界といわれる $S=1/3$ (Booij, 1983) における斜面上の波高分布 (沖波の波高 H_0 との比で表示) を本計算結果と比べたものが図-5 であり、両者

の波高分布は良く一致している。なお、図中には Airy 波理論による浅水係数 K_s も参考のために示してある。計算結果が浅水係数と異なるのは斜面による反射によって部分重複波が形成されていることによる。

この場合 ($S=1/3$) の緩勾配方程式と本理論における水底の法線方向流速を水面での鉛直方向流速で無次元化したものを比べてみると、図-6 に示すように本理論の方が優れた精度で水底の境界条件を満たしている。勾配を大きくすると緩勾配方程式による水底の法線方向流速はますます大きくなるが、本理論においては図-3, 4 に示すように、高い精度で水底の境界条件を満たしている。

図-7 は透過波高 ($h/L_0=0.01$ の一様水深部における波高) と入射波高 ($h/L_0=0.5$ の一様水深部における波高) との比、すなわち透過率 K_T の水底勾配 S による変化を比較したものである。勾配 S が $1/3$ より小さな場合は両者の透過率 K_T に差はない。しかし、勾配が $1/3$ より大きくなると、透過率 K_T には明らかな差異が生じる。このことより、Berkhoff の緩勾配方程式の波高分布に対する適用限界 (水底勾配 $1/3$ 程度) を再確認できた。しかし、 $S=3.0$ のような急勾配地形に対する本理論の波高分布 (あるいは透過率) に対する適性は実験結果との比較により確認する必要がある。

5. 分散関係に対する収束性

後野 (1994) の緩勾配地形に対する連成振動方程式と

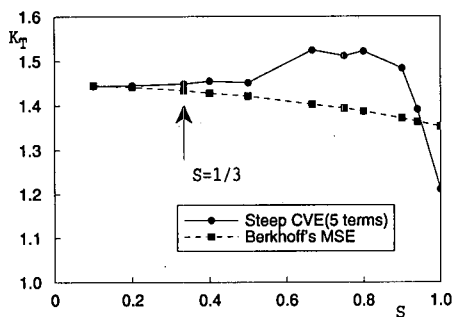


図-7 緩勾配方程式との比較 (透過率)

本理論の差異は変動圧力の鉛直方向分布の形式だけである。後野 (1994) の緩勾配地形に対する連成振動方程式はすでに不規則波への適用が確認されている。したがって、本理論も不規則波に適用できることは間違いない。しかし、その分散特性については確認する必要がある。

本理論の持つ分散特性を調べるために、後野 (1993) と同様に一樣水深上の定常規則波に本理論を適用し、分散関係式を求めた。紙面の都合上分散関係式は省略する。図-8はこの分散関係式を示したもので、横軸は kh 、縦軸は沖波の $k_0 h$ を示している。図中には級数展開の項数 M を 3, 4, 5, 6, 7 とした時の分散関係式と微小振幅波理論 (Airy 波) 理論における分散関係式を示している。図中最上段の実線が Airy 波理論による値を示している。

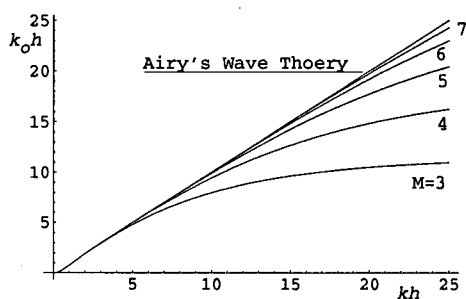
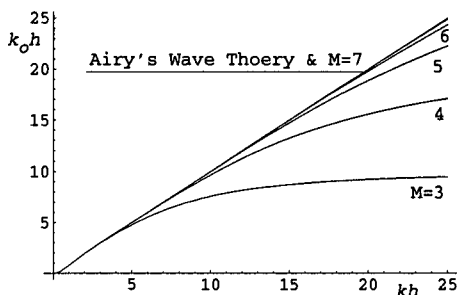
一方、図-9 は後野 (1993) による緩勾配の連成振動方程式による分散関係を示したもので、級数展開の項数 M は 3, 4, 5, 6, 7 である。ただし、 $M=7$ の結果はほとんど Airy 波理論の結果と一致している。この二つの図の級数展開項数の等しいものを比較すると、極僅かであるが、緩勾配連成振動方程式の方が Airy 波理論の分散関係により近いことが分る。これは、Airy 波の鉛直方向分布を精度良く近似するために、緩勾配連成振動方程式に較べて本理論はより多くの項数が必要となることを意味する。

この分散関係ならびに鉛直方向分布の近似精度を調べたところ、緩勾配の連成振動方程式と同程度の精度を得るためには、本理論では級数展開の項数を緩勾配のそれと同じかあるいは 1 項増やす必要があることが分った。

6. 結 論

任意水底地形上の線形不規則波動場の変形を時間領域において求められる新しい連成振動方程式を開発した。

一樣斜面上の波の変形において、5 項での級数展開では水底勾配 $S=1.0$ (45°) 程度まで、9 項までの展開では $S=3.0$ (72°) まで水底の境界条件を十分な精度で満足す

図-8 緩勾配理論の分散関係 ($M=3, 4, 5, 6, 7$)図-9 緩勾配理論の分散関係 ($M=3, 4, 5, 6, 7$)

る解を与える。ただし、一定水深上では水底における境界条件に対する誤差は比水深とともに増加する。従来の緩勾配に対する連成振動方程式と比較すると、本論文で提案した任意地形に対する連成振動方程式は級数展開に対する収束性が少し悪化する。これにより平面 2 次元方程式にもかかわらず、急勾配の地形を含めた任意地形上の波変形解析の可能性を示した。

最後に、本研究を遂行するに当り、当時本学学部生一瀬公宏君・村上勇人君・藤野基君の協力を得た。ここに記して謝意を表する。

参 考 文 献

- 磯部雅彦 (1994): 非線形緩勾配波動方程式の提案, 海岸工学論文集, 第 41 巻, pp. 1-5.
- 灘岡和夫・中川康之 (1993): 不規則波動シミュレーションのための強分散波動方程式の導出とその基本特性の検討, 土木学会論文集, No. 467/II-23, pp. 83-92.
- 後野正雄 (1993): 緩勾配地形上の不規則波動場の支配方程式とその特性, 海岸工学論文集, 第 40 巻, pp. 21-25.
- 後野正雄・平井良昌 (1994): 定常連成振動方程式とそのステップ地形への適用性, 海岸工学論文集, 第 41 巻, pp. 21-25.
- Berkhoff, J. C. W. (1972): Computation of combined refraction-diffraction, Proc. 13th Coastal Eng. Conf., pp. 471-490.
- Booij, N (1983): A note on the accuracy of the mild-slope equation, Coastal Eng., Vol. 7 pp. 191-203.