

浅海域における周期波のマッハ反射について

森屋陽一*・菊地正行**・松立博樹***・水口 優****

1. はじめに

防波堤に波が斜めに入射する場合の反射現象において、入射角が小さい（波向が防波堤に平行な場合を入射角 0° とする）場合、防波堤に直な方向に波峰が伸び、防波堤に沿った方向にその波（ステム波）が進行することは、以前から知られており（Wiegel, 1964）、そのような反射をマッハ反射と呼んでいる。孤立波についてのマッハ反射の研究は、共鳴干渉による了解析的扱い（Miles, 1977）や実験（Melville, 1980）、強非線形な方程式による数値計算（Tanaka, 1993）などにより、定量的評価も可能である。しかしながら、周期波に関しては、ブシネスク方程式の放物型近似（Yoon and Liu, 1990）やブシネスク方程式（喜岡・長嶋, 1993）の数値計算によりマッハ反射が起こることは知られているが、入射角の違いによるステム波の波高の違いや、ステム波の波峰が発達し続けるのかどうかなど定性的にもまだ解明されていない。Miles (1977) によれば、孤立波のマッハ反射では条件によってはステム波の波高は入射波の波高の4倍にもなり、マッハ反射は工学的に非常に重要な問題になる。

本研究では、マッハ反射は非線形性があることによつて起こるものと考え、非線形性を含み浅海域における回折現象を表せるブシネスク方程式の数値計算によりマッハ反射について検討した。まず、平面水槽における実験との比較により、反射に及ぼす鉛直壁端部ありとなしの違いとブシネスク方程式の数値計算の適用性を調べた。次に、実験では水槽長さの制約でステム波の伝播距離が取れないため、ブシネスク方程式の数値計算により長距離伝播した場合の計算を行い、孤立波の場合は Miles の理論、周期波の場合は KdV 方程式を弱二次元に拡張した方程式である KP 方程式の対称な二方向周期解（森屋・水口, 1993）と比較することにより、発達中及び発達後のステム波について検討した。

2. 基礎方程式と数値計算方法

オイラーの運動方程式を波高水深比 $\alpha(=H/h)$ 、相対水深 $\sigma(=h/L)$ がともに小さく、さらにアーセル数 $U_r(=a/\sigma^2)$ が1のオーダーと仮定し展開する。2次の項を考慮し、境界条件を用いて鉛直積分することにより以下の基礎方程式が得られる（Peregrine, 1967）。

連続式

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q_x^2}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Q_x Q_y}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ = \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 Q_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q_y}{\partial x \partial y} \right) \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q_x Q_y}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Q_y^2}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ = \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 Q_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q_y}{\partial y^2} \right) \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

ここで、 η は水面変動、 Q_x 、 Q_y はそれぞれ x 、 y 方向の線流量、 h は静水深、 $D(=h+\eta)$ は全水深、 g は重力加速度である。(1)～(3)式の計算は、時間、空間双方に中心差分を用いる陰解法を使用する。計算点の配置は、リーブフロッグ法と同じように水面変動と流量を交互に配置した。手順として、(2)及び(3)式を計算して流量 Q_x 、 Q_y を求め、次に(1)式から水面変動を求める、というように流量と水面変動を交互に計算していく方法を採用する。分散項を含めた数値計算では通常、離散化に伴う誤差と分散項のオーダーが同程度であるため、格子間隔が大きな時には3次の補正項を加える必要がある（今村・後藤, 1986）。本研究では、格子幅を出来るだけ小さくすることとし、3次の補正項は加えなかった。計算に用いた格子幅は、波長の1/30程度、時間ステップは周期の1/35程度とした。沖側境界条件として流量のみを与え、反射波成分を自由透過させるといった処理は行っていない。これは水理実験における造波板に対応している。また計算領域は、十分広く設定し、側方、岸側境界は完全反射とした。

* 学生会員 工修 中央大学大学院 土木工学科
 ** 工修 中央大学大学院 土木工学科（現 青木建設）
 *** 中央大学大学院 土木工学科
 **** 正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科

3. 波高分布に及ぼす鉛直壁端部ありとなしの違い

座標は造波板を x 軸、鉛直壁を y 軸とし、波向は y 軸から反時計回りを正にとった。計算法の妥当性の検討及び、反射波の発達に対する鉛直壁端部の影響について計算結果と実験による測定結果の比較を行った。実験は、連続型多方向造波装置（幅 30 cm × 28 枚）を備えた平面水槽（幅 10.3 m, 長さ 7.0 m）を用い、鉛直壁を造波板から 50 cm 離し、造波板端部から 200 cm 内側のところに設置したケースと、鉛直壁を造波板端部につけたケース（図-1）の 2 種類設定した。水深 10 cm, 入射波として波高 1 cm, 周期 2 s の一次のクノイド波を造波し、波向を $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ と変化させた。測定は、造波板から 20 cm のところから鉛直壁沿いに 10 cm 間隔で 310 cm まで行い、計測には新容量式水位計を用いサンプリング周波数 50 Hz でデジタル記録した。実験、計算とも一般的な波の場を得るために、造波には端部制御方式（筧田ら, 1994）を用い、得られたデータからゼロダウンクロス法によって波別解析し、波高分布を求めた。

図-2 は鉛直壁端部がある場合、図-3 は鉛直壁端部がない場合の計算結果と実験結果の比較である。実線はブシネスク方程式の計算結果である。図-2 には破線で線形な回折現象を表すヘルムホルツ方程式の解析解（Berger and Kohlhasse, 1976）の計算結果もプロットした。鉛直壁端部あり、なし、いずれのケースも実験結果とブシネスク方程式の計算結果はよく一致し、この条件で実際の現象を再現することに、ブシネスク方程式は十分適用可能であることがわかる。また、端部ありとなしの結果の比較から、入射角が小さい場合（ $15^\circ, 30^\circ$ ）は波高分布に及ぼす端部ありとなしの差はほとんどないが、入射角が大きい場合（ 45° ）は端部ありとなしでは波高分布が異

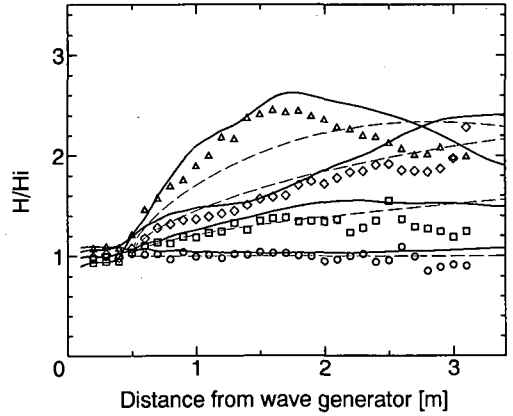


図-2 鉛直壁端部ありの場合の波高分布
(条件は $h=10$ cm, $T=2$ s, $H_i=1$ cm, —: ブシネスク方程式の数値計算, ---: ヘルムホルツ方程式の解の計算結果, ○: 入射角 $\theta_i=0^\circ$ の実験結果, □: 15° , ◇: 30° , △: 45°)

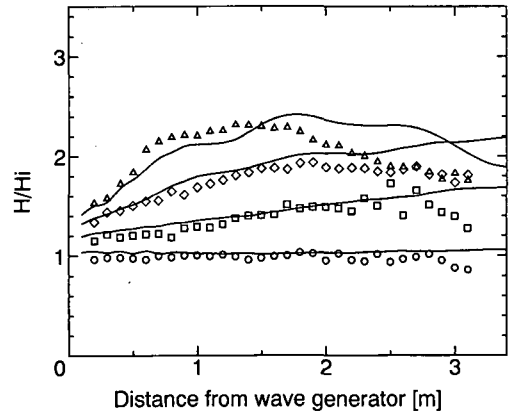


図-3 鉛直壁端部なしの場合の波高分布
(条件, 凡例は図-2 と同じ)

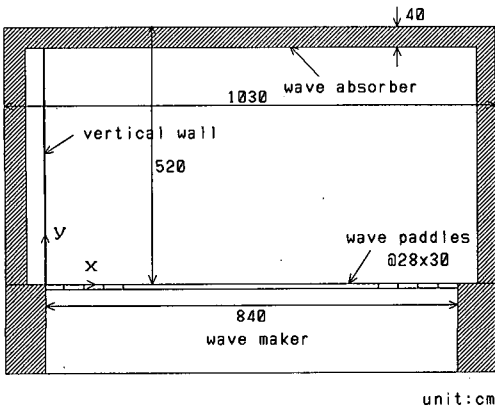


図-1 実験水槽の模式図（鉛直壁端部なしの場合）

なる結果になる。また、端部あり、なし、いずれの場合も入射角 30° までの波高分布は伝播と共に増加しているが、入射角 45° は一旦増加した後減少している。また、 0° 以外は鉛直壁端部あり、なし、いずれの場合もステム波の波高は伝播と共に発達し続けており、発達後の状態を調べるためには、さらに伝播距離が必要である。

4. マッハ反射における孤立波と周期波の違い

水槽長さの制約により、実験では約 3 m 以上伝播距離をとることができない。そこで、鉛直壁が造波板に付いている状態とし、ブシネスク方程式の数値計算により長距離伝播する計算を行いマッハ反射について検討を行った。計算条件としては、孤立波の場合は水深 10 cm, 入射波高 1 cm, 周期波の場合は水深 10 cm, 入射波高 1 cm, 周期 2 s, の一次のクノイド波とした。

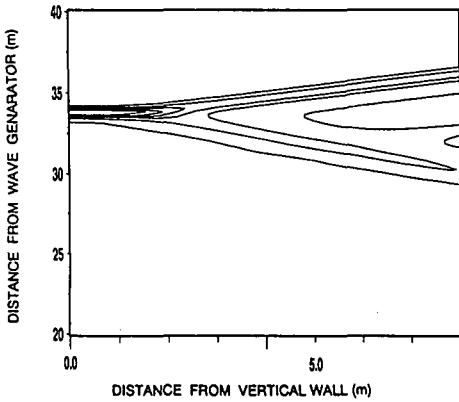


図-4 孤立波が入射した場合の水面波形
($h=10$ cm, $H_i=1$ cm, $\theta_i=20^\circ$, コンタの間隔は 0.4 cm)

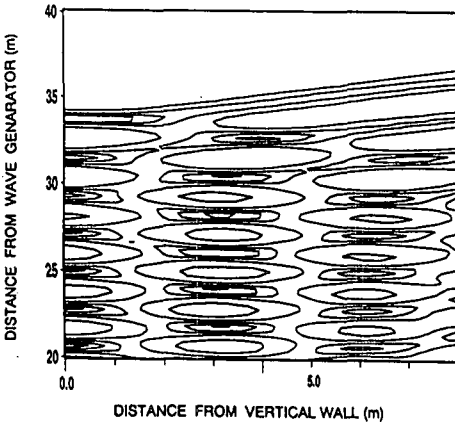


図-5 周期波が入射した場合の水面波形
($h=10$ cm, $T=2$ s, $H_i=1$ cm, $\theta_i=20^\circ$, コンタの間隔は 0.4 cm)

図-4 は入射角 20° の孤立波の水面波形であり、ステム波が形成され、入射波と反射波の波高及び波向が異なっていることがわかる。図-5 は入射角 20° の周期波の水面波形であり、孤立波と同様にステム波が形成されている。さらに、先頭の部分は入射波と反射波の波高及び波向が異なるが、2 波目以降では、ステム波の波峰長は一波目より短くほぼ一定な状態になっており、入射波と反射波の波高及び波向はほぼ等しくなっており、対称な二方向波浪場が形成されていることがわかる。このことから、周期波のマッハ反射においてステム波の波峰長が一定になるのは、前の波の反射波の存在に原因があることがわかる。

5. ステム波の波峰高, 及び波峰長

孤立波のマッハ反射において、Miles (1977) は入射角と波高水深比が小さいと仮定し、マッハ反射は入射波、

反射波、ステム波間の共鳴干渉であるとして理論を導いた。Miles の理論によると、ステム波の波高は、

$$\frac{\alpha_s}{\alpha_i} = (1 + \theta_i / \sqrt{3\alpha_i})^2 \quad (\theta_i^2 < 3\alpha_i) \quad \cdots \cdots (4)$$

$$\frac{\alpha_s}{\alpha_i} = \frac{4}{1 + \sqrt{1 - (3\alpha_i/\theta_i^2)}} \quad (\theta_i^2 > 3\alpha_i) \quad \cdots \cdots (5)$$

となり、入射角が、

$$\theta_i = \sqrt{3\alpha_i} \quad \cdots \cdots (6)$$

のときステム波の波高は最大になり、入射波高の 4 倍にもなる。ここで、 α は波高水深比、 θ は波向で単位はラジアンであり、添字の i, s はそれぞれ入射波、ステム波を意味する。また、入射角が小さいという仮定をしないと、

$$\frac{\alpha_s}{\alpha_i} = 2 + \left\{ \frac{3}{2 \sin^2 \theta_i} - 3 + 2 \sin^2 \theta_i \right\} \alpha_i \quad \cdots \cdots (7)$$

となる (Tanaka, 1993)。

浅海域における二方向波浪場は、KdV 方程式を弱二次元に拡張した方程式である KP 方程式の二方向周期解 (以下 KP2 とする) によって表すことができる。KP2 で二方向波浪場を計算すると図-6 の様に亀甲形の水面波形になる。

また、図-7 は、図-5 のブシネスク方程式の数値計算をさらに 45 m 以上伝播させ、 x 方向には壁から、 y 方向には 34.4 m からそれぞれ約一波長分の水面波形である。KP2 は重ね合わさる元の波の波速を微小振幅長波の波速 ($\sqrt{gh}$) であるとして計算している (森屋・水口, 1993) ので、図-6 と 7 を比較すると x, y 方向共に波長がやや

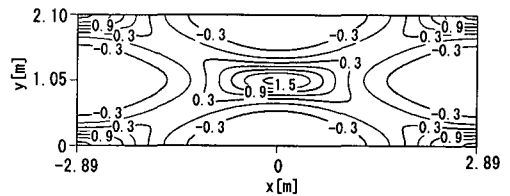


図-6 KP 方程式の解による対称な二方向波の水面波形
($h=10$ cm, $T_1=T_2=2$ s, $H_1=H_2=1$ cm, $\theta_{1,2}=\pm 20^\circ$, コンタの間隔は 0.3 cm)

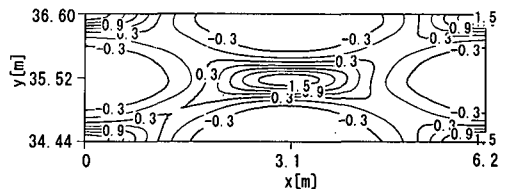
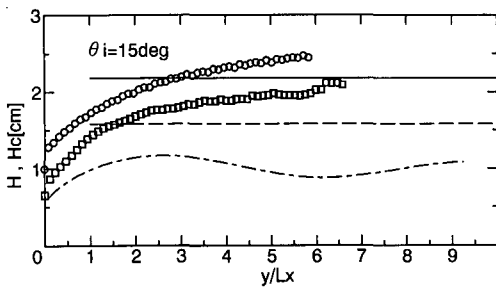


図-7 ブシネスク方程式の数値計算による水面波形
(条件は図-5 (図-6) と同じで、造波後 54 s 経過した時点の水面波形, コンタの間隔は 0.3 cm)

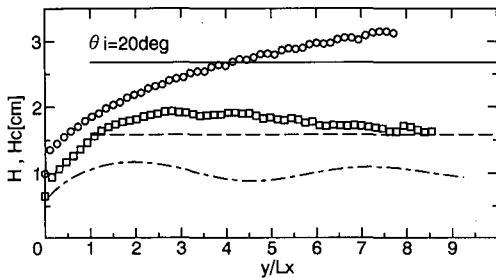
短くなるが、水面波形としてはほぼ同様なパターンになっていることがわかる。

そこで、ブシネスク方程式の数値計算によるステム波の波峰高及び波峰長（孤立波については波高のみ）について、孤立波は Miles の理論と、周期波は KP2 との比較検討を行った。波峰高に着目したのは、防波堤での越波を考えると、越波するかしないかは波峰高（静水位からの峰高）により決まるためである。

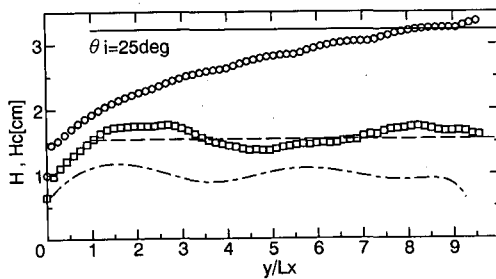
図-8(a) は入射角 15° 、(b) は入射角 20° 、(c) は入射角 25° の場合の周期波の波峰高 ($\square$) と孤立波の波高 ($\circ$) の伝播による変化である。横軸は伝播距離であるが、反射波の成長ということを考え、入射波の x 方向の波長



(a) 入射角 $\theta_i = 15^\circ$



(b) 入射角 $\theta_i = 20^\circ$



(c) 入射角 $\theta_i = 25^\circ$

図-8 y 方向の孤立波の波高、周期波の波峰高分布
(計算条件 $h=10$ cm, $T=2$ s, $H_i=1$ cm, ———: Miles の理論 ((4) 式), ———: KP2 による波峰高, ———: ヘルムホルツ方程式の解による波峰高, $\circ$: ブシネスク方程式による孤立波の波高, $\square$: ブシネスク方程式による周期波の波峰高)

$L_x (= L_i / \sin \theta_i, L_i = \sqrt{gh} T)$ で無次元化した。図中の実線は Miles の理論 ((4) 式), 破線は KP2 による波峰高, 一点鎖線はヘルムホルツ方程式の解によるものである。計算は各ケースとも 45 m 以上伝播させた。孤立波については入射角 15° , 20° の場合の波高はほぼ発達 (増加) し終わっているが, 入射角 25° では 45 m 伝播した地点でもまだ増加している。周期波については入射角 15° の波峰高は単調に増加しているが, 入射角 20° では一旦増加するもののさらに伝播すると減少する。入射角 25° の場合の波峰高には変動が見られることから, 入射角 15° , 20° の場合もさらに伝播すると波峰高が変動することが予想される。また, ヘルムホルツ方程式の解による結果も変動することから, この変動は鉛直壁と造波板によるかど (つまり反射が始まる地点) での前の波の散乱波の影響であると予想され, 孤立波の波高分布が変動しないこともこの理由に矛盾しない。

図-9 は入射角に対する孤立波の波高 ($\circ$), 及び周期波の波峰高を表したものである。 $\circ$ は波高がまだ発達段階であることを意味する。破線は Miles の理論による計算結果である。孤立波の波高は入射角 25° 以下では (4) 式による計算結果とほぼ同様の傾向を示し, 入射角 30° , 45° は (5) 式より (7) 式による計算結果に近い値になる。

周期波の波峰高は, KP2 による波峰高を越えてから 45 m までの最大値, 最小値, 平均値 ($\square$) または, 45 m で

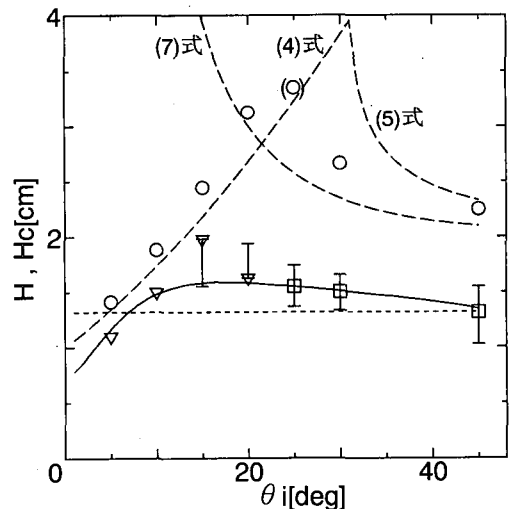


図-9 波向に対する孤立波の波高、周期波の波峰高
(条件は図-8 と同じ, ———: Miles の理論, $\circ$: ブシネスク方程式による孤立波の波高, ———: KP2 による波峰高, 誤差線は KP2 による値を越えてから 45 m までの波峰高の最大値と最小値, $\square$: はその間の平均値, ∇ : 45 m での波峰高, ———: クノイド波の線形重ね合わせによる波峰高)

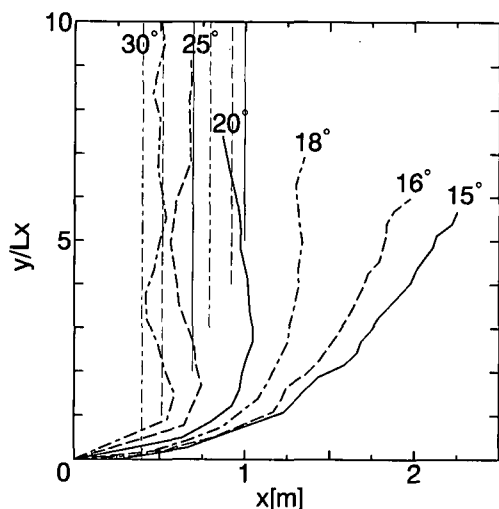


図-10 周期波の伝播による波峰長の変化
(条件は図-8と同じ)

の値(∇)をプロットしてある。実線はKP2の計算結果、点線はクノイド波の線形重ね合わせによる波峰高である。入射角が小さい場合は、45 mでも伝播距離が足りず波峰高の変動の幅がつかめないが、入射角25°以上の場合、変動はKP2による値を中心に起こっており、ステム波の波峰高は、平均的にはKP方程式の対称な二方向周期解で表すことができる。

図-10はステム波の波峰長を、鉛直壁と直な方向に入射波の波峰高と同じ水位になるまでの長さで定義した場合の周期波の波峰長の発達の様子である。図-8と同様な理由により、縦軸は入射波の x 方向の波長で無次元化した。図中の直線はKP2による波峰長である。入射角16°以下は伝播距離が足りないために、45 m伝播してもステム波の波峰長は伸び続けているが、入射角20°の場合の波峰長は15 m伝播したあたりで最大値をとり、その後短くなりKP2による値に近づいていく。さらに、入射角25°、30°の場合は伝播始めは入射角20°の場合と同様に波峰長は一旦伸びるが、その後少し短くなり変動しながらほぼ一定になる。

6. おわりに

実験とブシネスク方程式の数値計算により、波高分布に及ぼす鉛直壁端部あり、なし、の違いを調べた結果、

入射角が小さい場合はほとんど同じになること、また、ステム波の発達後の状態を調べるためには、さらに伝播距離が必要であることがわかった。

そこで、浅海域における周期波のマッハ反射について、ブシネスク方程式の数値計算により長距離伝播する計算を行った。その結果、孤立波の場合と違い周期波の場合は、前の波の反射波が存在するためステム波の波峰長はほぼ一定になり、入射波と反射波の波高及び波向もほぼ等しくなることがわかった。

また、壁沿いに発生するステム波は、発達が止まるまでかなりの伝播距離を必要とし、入射角が小さいほど伝播距離が必要である。ステム波の発達が止まった後の波峰高は、本研究では入射角20°以上の場合しか確認できなかったが、鉛直壁と造波板によるかどの影響により変動し、平均的にはKP方程式の対称な二方向周期解の計算結果と一致する。さらに、ステム波の波峰長についても、ステム波の発達が止まった後はほぼ一樣になることがわかった。

参考文献

- 今村文彦・後藤智明 (1986): 差分法による津波計算の打ち切り誤差, 土木学会論文集, 第375号, pp. 241-250.
- 喜岡 渉・長嶋慎泰 (1993): Boussinesq方程式による構造物近傍の非線形平面波の解析, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 596-600.
- 寛田博章・森屋陽一・水口 優 (1994): 多方向造波装置において一様な波の場を作るための端部制御方式, 海岸工学論文集, 第41巻, pp. 106-109.
- 森屋陽一・水口 優 (1993): 浅海域における弱非線形二方向波 (Part. 2), 中大理工紀要, 第36巻, pp. 39-50.
- Berger, V. and Kohlhasse, S. (1976): Mach-reflection as a diffraction problem, Proc. 15th Conf. Coastal Engrg., ASCE, 1, pp. 796-814.
- Melville, W. K. (1980): On the Mach reflexion of a solitary wave, J. Fluid Mech., Vol. 98, pp. 285-297.
- Miles, J. W. (1977): Resonantly interacting of solitary waves, J. Fluid Mech., Vol. 79, pp. 171-179.
- Peregrine, D. H. (1967): Long waves on a beach, J. Fluid Mech., Vol. 27, pp. 815-827.
- Tanaka, M. (1993): Mach reflection of a large-amplitude solitary wave, J. Fluid Mech., Vol. 248, pp. 637-661.
- Wiegel, R. L. (1964): Water wave equivalent of Mach-reflection, Proc. 9th Conf. Coastal Engrg., ASCE, pp. 82-102.
- Yoon, S. B. and Liu, P. L.-F. (1990): Stem waves and hexagonal wave pattern in shallow water, Proc. of U. S.-Japan 2nd Workshop on Tsunami Research, pp. 75-89.