

# 弾性平板下の波動の三次近似解とこれに基づく氷板破壊条件

堺 茂樹\*・劉 暁東\*\*・平山健一\*\*\*

## 1. 緒 言

波浪による氷板の変形及び破壊機構を解明することは結氷海域での海洋構造物の耐氷設計に当たって重要である。Wadhams (1973), Carter ら (1981) は弾性平板下での波動の線形解を用い、波浪が氷板下に進入する際の波高変化あるいは波浪による氷板破壊の条件等を検討している。また、著者ら (1992) も類似の解析を行い、プラスチック板を用いた実験結果との比較により、線形解の適用性について検討した。

しかし、これまでの理論解析はいずれも線形理論に基づくものであり、浅水域に於ける波浪の非線形性や波浪と氷板の非線形干渉の効果などに関しては検討されてこなかった。氷板下の波高が増大すると氷板が破壊するため、連続氷板下で存在し得る波形勾配はあまり大きくはないため、波形勾配の増加に伴って顕著となる波動の非線形性の影響も限られたものであると予想されるが、それがどの程度であるのかを定量的に評価しておくことは、今後の解析にとって必要であろう。

以上のような観点から、本研究では弾性平板下での波動の3次近似解を誘導し、波速、波形、氷板下に進入する際の波高変化及び氷板の破壊条件を計算し、線形解に基づく結果と比較することにより非線形解析の必要性を検討した。

## 2. 氷板下での波動の三次近似解

図-1 に示すような連続氷板下での波動の三次近似解を、以下の仮定に基づき誘導する。1) 流体は非圧縮性、非粘性の完全流体とする、2) 運動は常に渦無しである、3) 氷板と流体の境界面では、Bernoulli の式と弾性平板の曲げ変形方程式の両者を満足する。仮定(2)より、速度ポテンシャル  $\Phi$  が存在し、 $u, w$  をそれぞれ  $x$  軸、 $z$  軸方向の速度成分とすると、次式の関係がある。

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (1)$$

氷板下の波動は以下に示す Laplace の式、境界面での力学的条件及び運動学的条件、底面境界条件を満足する。

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (-d < z < \zeta) \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta + \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2 + \frac{1}{\rho} \left[ M \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \right] = W \quad (z = \zeta) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (z = \zeta) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (z = -d) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ただし、

- |                                  |                                 |
|----------------------------------|---------------------------------|
| $t$ : 時間                         | $\zeta$ : 流体と氷板の境界面             |
| $d$ : 水深                         | $W$ : Bernoulli の式の常数項          |
| $\rho$ : 水の密度                    | $g$ : 重力加速度                     |
| $M$ : 曲げ剛性                       | $m$ : 氷の質量 ( $m = \rho_i h_i$ ) |
| $M = \frac{Eh_i^3}{12(1-\nu^2)}$ | $E$ : 氷の弾性係数                    |
| $\nu$ : ポアソン比                    | $\rho_i$ : 氷の密度                 |
|                                  | $h_i$ : 氷厚                      |

$\Phi, \zeta, C_i$  (氷板下での波速) 及び  $W$  を次のように三次まで摂動展開する。

$$\Phi = (\varepsilon A_{11} + \varepsilon^3 A_{13}) \cosh k(z+d) \sin \theta + \varepsilon^2 A_{22} \cosh 2k(z+d) \sin 2\theta + \varepsilon^3 A_{33} \cosh 3k(z+d) \sin 3\theta \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\zeta = \varepsilon B_1 \cos \theta + \varepsilon^2 B_2 \cos 2\theta + \varepsilon^3 B_3 \cos 3\theta \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$C_i = C_{i1} + \varepsilon C_{i2} + \varepsilon^2 C_{i3} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$W = \varepsilon W_1 + \varepsilon^2 W_2 + \varepsilon^3 W_3 \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 $\varepsilon$  は摂動パラメータ、 $\theta = k(x - C_i t)$ 、 $k$  は波数。境界面での値はテイラー展開で表現し、例えば  $\Phi$  は次のようになる。

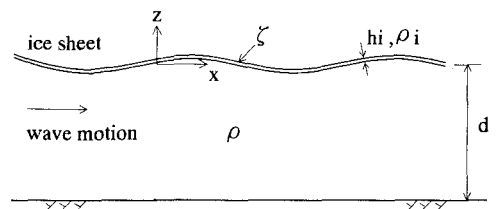


図-1 記号の説明

\* 正会員 工博 岩手大学助教授 工学部建設環境工学科  
 \*\* 岩手大学大学院 工学研究科土木工学専攻  
 \*\*\* 正会員 Ph.D. 岩手大学教授 工学部建設環境工学科

$$\Phi|_{z=\zeta} = \Phi|_{z=0} + \zeta \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{\zeta^2}{2!} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + \dots \quad (10)$$

式(10)を用い、式(6)、(7)、(8)、(9)を式(2)、(3)、(4)、(5)に代入すると、 $\Phi$ 、 $\zeta$ 、 $C_i$ 及び $W$ の全ての係数が以下のように求まる。

$$A_{11} = \frac{C_{i1}}{k \operatorname{sh} kd} \quad (11)$$

$$A_{13} = \frac{C_{i1}}{16k \operatorname{sh}^5 kd} \frac{[(2 \operatorname{sh}^4 kd + 14 \operatorname{sh}^2 kd + 3) - 3R_1 \operatorname{sh} 2kd \operatorname{sh}^2 kd + Q_1]}{(1 + R_1 \operatorname{cth} kd) \left(1 + \frac{mk}{\rho} \operatorname{th} kd\right)} \quad (12)$$

$$A_{22} = \frac{3C_{i1}}{8k \operatorname{sh}^4 kd} \frac{\left(1 - \frac{1}{3} R_1 \operatorname{sh} 2kd\right)}{(1 + R_1 \operatorname{cth} kd)} \quad (13)$$

$$A_{33} = \frac{C_{i1}}{64k \operatorname{sh}^7 kd} \frac{[(4 \operatorname{sh}^2 kd - 9) + 2R_1 \operatorname{sh} 2kd(1 - \operatorname{sh}^2 kd)R_2 Q_2]}{(1 + R_1 \operatorname{cth} kd) \left[1 + R_2 \frac{(6 + 8 \operatorname{sh}^2 kd)}{\operatorname{sh} 2kd}\right]} \quad (14)$$

$$B_1 = \frac{1}{k}, \quad B_2 = \frac{1}{4k \operatorname{sh}^3 kd} \frac{\operatorname{ch} kd(2 + \operatorname{ch} 2kd)}{(1 + R_1 \operatorname{cth} kd)} \quad (15), (16)$$

$$B_3 = \frac{3}{64k \operatorname{sh}^6 kd} \frac{\left[(8 \operatorname{sh}^6 kd + 24 \operatorname{sh}^4 kd + 24 \operatorname{sh}^2 kd + 9) - \frac{2}{3} R_1 \operatorname{sh} 2kd(2 \operatorname{sh}^4 kd + 5 \operatorname{sh}^2 kd + 3)\right]}{(1 + R_1 \operatorname{cth} kd) \left[1 + R_2 \frac{(6 + 8 \operatorname{sh}^2 kd)}{\operatorname{sh} 2kd}\right]} \quad (17)$$

$$C_{i1} = \left[\frac{\rho g + Mk^4}{k(\rho \operatorname{cth} kd + mk)}\right]^{1/2}, \quad C_{i2} = 0 \quad (18), (19)$$

$$C_{i3} = \frac{C_{i1}}{16 \operatorname{sh}^4 kd} \frac{[(8 \operatorname{sh}^4 kd + 8 \operatorname{sh}^2 kd + 9) + 2R_1 \operatorname{sh} 2kd(\operatorname{sh}^2 kd - 1)]}{(1 + R_1 \operatorname{cth} kd) \left(1 + \frac{mk}{\rho} \operatorname{th} kd\right)} \quad (20)$$

$$W_1 = 0, \quad W_2 = \frac{C_{i1}^2}{4 \operatorname{sh}^2 kd}, \quad W_3 = 0 \quad (21), (22), (23)$$

ここで、

$$R_1 = \frac{3mkC_{i1}^2 - 15Mk^3}{\rho C_{i1}^2}, \quad R_2 = \frac{mkC_{i1}^2 - 10Mk^3}{\rho C_{i1}^2} \quad (24)$$

$$Q_1 = \left[(5 \operatorname{sh}^4 kd + 11 \operatorname{sh}^2 kd + 6) - \frac{1}{2} R_1 \operatorname{sh} 2kd(2 + \operatorname{sh}^2 kd)\right] \frac{2mk \operatorname{th} kd}{\rho}$$

$$Q_2 = \left[(3 \operatorname{sh}^4 kd + 11 \operatorname{sh}^2 kd + 6) - \frac{1}{2} R_1 \operatorname{sh} 2kd(2 + 3 \operatorname{sh}^2 kd)\right] \operatorname{th} kd \quad (25)$$

微小展開パラメータ  $\varepsilon$  と氷板下での波形勾配の関係は次式で表わせる。

$$\varepsilon + \varepsilon^3 \frac{3 \left[(8 \operatorname{ch}^6 kd + 1) - \frac{2}{3} R_1 \operatorname{sh} 2kd(2 \operatorname{ch}^4 kd + \operatorname{ch}^2 kd)\right]}{64 \operatorname{sh}^6 kd(1 + R_1 \operatorname{cth} kd) \left[1 + R_2 \frac{(6 + 8 \operatorname{sh}^2 kd)}{\operatorname{sh} 2kd}\right]} = \pi \frac{H_i}{L_i} \quad (26)$$

ここで、 $\operatorname{sh} kd = \sinh kd$ 、 $\operatorname{ch} kd = \cosh kd$ 、 $\operatorname{th} kd = \tanh kd$ 、 $\operatorname{cth} kd = \coth kd$ 。

### 3. 氷板下の波動の非線形性

前章に示した三次近似解に基づき、氷板下での波速、波形及びエネルギーフラックス法により計算される波高変化に対する非線形性の影響について検討する。なお、実際の結氷域での氷の状態及び海象の範囲に対応し、次のような計算条件での結果を用いて検討する。つまり、水深  $d = 20 \sim 100$  m、周期  $T = 5 \sim 20$  s、弾性係数  $E = 10^9 \sim 10^{10}$  MPa、弾性係数と曲げ強度の比  $E/\sigma_f = 2000 \sim 4000$ 、ポアソン比  $\nu = 0.3$ 、氷厚  $h_i = 0.25 \sim 2.0$  m

である。

#### 3.1 波速

氷板下での波速は相対水深  $d/L_i$  と氷板下での波形勾配  $H_i/L_i$  の他に、無次元化された氷板の弾性係数  $(Ek/\rho g)$  と氷厚  $(h_i)$  によって決まる。図-2に示すように、非線形効果を示す三次近似解と線形解との比  $(C_i/C_{i1})$  は、深水域でほぼ一定の値となるが、 $d/L_i$  の減少とともに増加し、増加しはじめる  $d/L_i$  の値は波形勾配によって異なっている。

図-3は氷板下での三次近似解と線形解及び自由水面

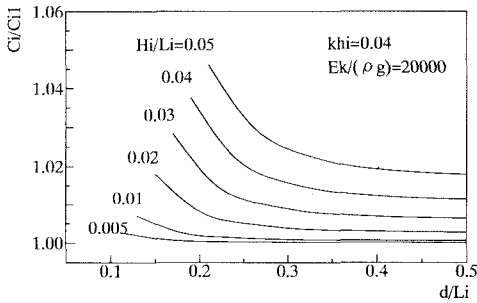


図-2 氷板下での波速の非線形性

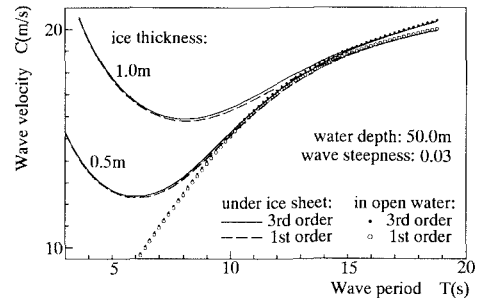


図-3 氷板下及び自由水面での波速の三次近似解と線形解の比較

での三次近似解と線形解の4種類の解を比較した例である。自由水面での波速は周期が短い程遅くなるのに対し、氷板下ではある周期以下では逆に波速が速くなり、その傾向は厚い氷板ほど顕著となる。短周期波では、氷板下での線形解は三次近似解に漸近しており、非線形効果は小さい。長周期波では氷板下での三次近似解と線形解の差が現れ、自由水面での三次近似解に近い値となり、非線形効果が増大する一方で、氷板の影響が相対的に小さくなっている。

以上のことから、周期が短い場合あるいは深海波では、線形解によっても精度良く波速が計算され、また長周期波あるいは浅海域では、弾性係数など氷板の特性に関する情報が無い場合でも自由水面での三次近似解によって近似することができると言える。

3.2 氷板下に進入する際の波高変化

開水域から氷板下へ進入する際の波高変化をエネルギーフラックス法によって計算する。図-4に示す領域では、底面と自由表面でのエネルギーの出入りは常に無く、また氷板との境界でも時間平均値は零となるので、結局鉛直断面を通過するエネルギーフラックスが保存されることになる。三次近似解を用いると、エネルギーフラックスは以下ようになる。

$$F = \frac{\epsilon^2 \rho C k}{8} [(A_{11} + \epsilon^2 A_{13})^2 (\sinh 2kd + 2kd) + 2(\epsilon A_{22})^2 (\sinh 4kd + 4kd) + 3(\epsilon^2 A_{33})^2 (\sinh 6kd + 6kd)] \dots (27)$$

開水域、氷板下とも同一の式で表現されるが、開水域では水に関連する項を全て零とする。図-5中の実線は三次近似解により計算された氷板下での波高と開水域での波高の比であり、周期が短い程波高変化が大きく、その傾向は厚い氷である程顕著となる。また、水深、波形勾配、氷板の弾性係数によっても波高変化率は異なる。図中の破線は線形解による結果であるが、三次近似解に比べ全体的に大きな値であり、非線形性の影響は氷厚が薄い方が僅かに大きい。

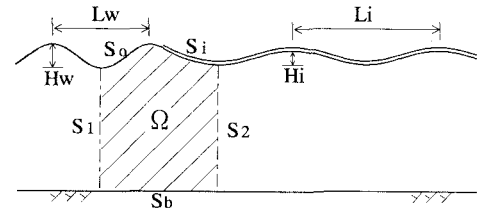


図-4 氷板端を含む領域でのエネルギー収支

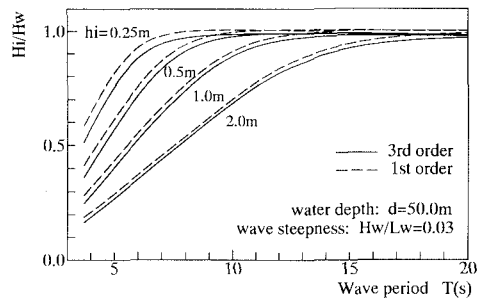


図-5 氷板下へ進行する際の波高変化率 (Hw: 開水域での波高, Hi: 氷板下での波高)

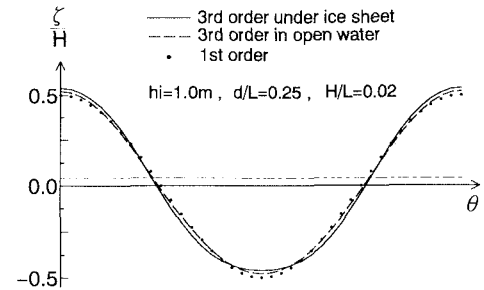


図-6 氷板下及び自由水面での波形の比較

3.3 波 形

図-6は氷板下での波形の線形解と三次近似解及び同一の波形勾配を有する自由水面上での三次近似解を比較

したものである。自由水面上での波形に比べ、氷板下での波形には非線形性が僅かではあるが強く現れている。開水域から氷板下へ進入すると、波長の増大と波高の減少により、非線形性は弱まるが、同一の波形勾配を有する波を比べると、氷板下の方が非線形性が強いことが分かる。

4. 氷板破壊時の波浪条件

弾性曲げ理論によると、氷板に作用する曲げ応力は氷板の変形の曲率から計算できる。氷板は流体と一体となって運動しているとすると、氷板下での波高と氷板の変位は同一と見なせる。氷板の変位として本研究での三次近似解を与えると、氷板に作用する曲げ応力は以下のようになる。

$$\sigma = \frac{2\pi^2 E h_i}{(1-\nu^2)} \frac{\epsilon}{L_i^2} (B_1 + 4\epsilon B_2 + 9\epsilon^2 B_3) \dots\dots\dots (28)$$

曲げ応力が氷の曲げ強度に達した時、氷板の破壊が生じる。従って上式の左辺に曲げ強度  $\sigma_f$  を代入すると、氷板が破壊する最小の波高(以下では単に最小波高と呼ぶ)が得られる。図-7は最小波高と周期の関係を表したものであり、周期が長い程最小波高は大きくなっている。また、氷厚が薄い程最小波高は大きく、これは上式で示されるように曲げ応力が氷厚に比例するためである。また、図中の実線は三次近似解による結果であり、破線は線形解によるものであるが、非線形解は線形解より全体的に小さい値となる。これは曲げ応力が氷板変位の曲率に比例しているため、波形の非線形項 ( $B_2, B_3$ ) が大きな応力を発生させることに起因する。

氷板が破壊する氷板下での最小波高が計算されたが、エネルギーフラックス法による氷板下へ進入する際の波高変化の計算と組み合わせることにより、どの様な波が進入した場合に氷板破壊が生じるか、つまり開水域での最小波高(以下では最小進入波高と呼ぶ)が計算できる。図-8に示すように、最小進入波高は周期が長い程大きく、この傾向は薄い氷板程顕著となる。しかし、長周期の場合には、薄い氷板程最小進入波高は大きくなっているのに対し、短周期の場合には逆である。つまり、長周期波では厚い氷板が、短周期波では薄い氷板が割れ易いことになる。この理由は以下のように考えられる。式(28)で示すように、弾性係数  $E$  とポアソン比  $\nu$  が一定であれば、曲げ応力は氷厚と変位の曲率に比例し、氷板下での波長の2乗に反比例する。長周期波の場合には、図-3と図-5に示したように、波速及び波高変化に対する氷厚の影響はあまり大きくないため、曲げ応力は氷厚にほぼ比例することになり、厚い氷板では大きい曲げ応力が生じ、破壊する。一方、短周期波の場合には、厚い氷板下では波長は長く、かつ波高は小さくなり、この変化は曲

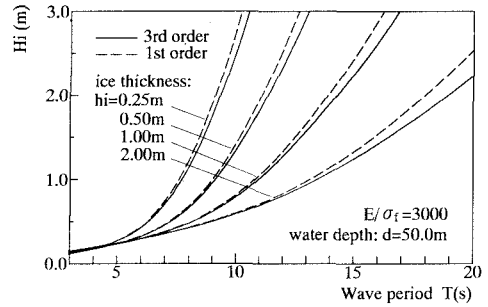


図-7 氷板が破壊する最小波高

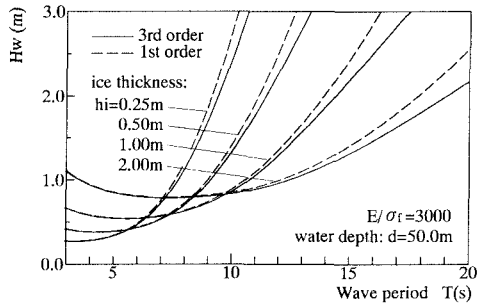


図-8 氷板が破壊する開水域での最小波高

げ応力を小さくする方向に働く。このような減少が氷厚自体の増加より相対的に大きくなり、結果的に厚い氷板に作用する曲げ応力は小さくなり、破壊には大きな波高が必要となる。

図-8中の実線は三次近似解による結果であり、破線は線形解でのものである。線形解に比べ、三次近似解は小さな最小進入波高を与えており、周期が長くなるほどその差は大きい。このような最小進入波高に現れる非線形性を検討するため、線形解に対する三次近似解の比を図-9, 10, 11に示す。これらの図より、以下のようなことが分かる。水深が浅いほど非線形性の影響が大きいのは波動の非線形性自体が水深に依存するためである。また、氷厚が薄い程変形し易く、このため氷板下の波高が大きくなり、非線形性も増大する。  $E/\sigma_f$  が小さい程、破

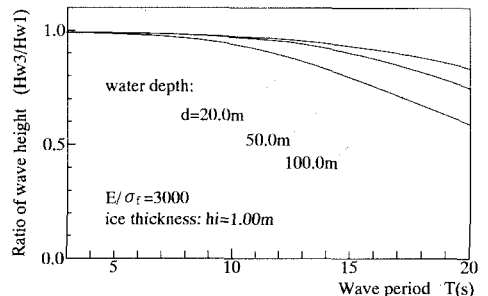


図-9 非線形性に対する水深の影響

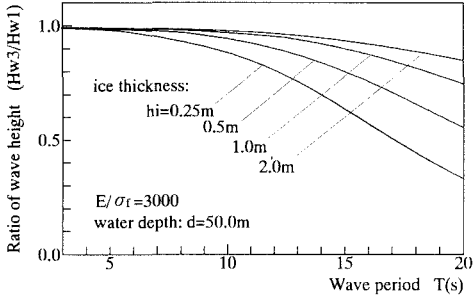


図-10 非線形に対する氷厚の影響

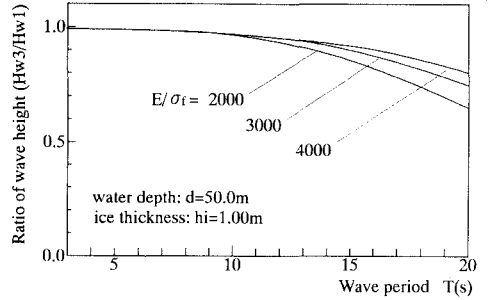


図-11 非線形に対する  $E/\sigma_f$  の影響

壊に必要な波高は大きくなるため、非線形性も大きくなる。

以上述べたように、氷板下での波動の非線形性は、波速あるいは波高変化などには顕著な影響を及ぼさないが、氷板の変位の局所的な曲率に大きく依存する破壊に関しては、非線形性の影響は重要となる。

5. 結 語

本研究では氷板下での波動の三次近似解を誘導し、これに基づき波速、波高、波形及び氷板の破壊条件を計算した。また、線形解との比較により、非線形解析の必要性を検討した結果、氷板の破壊条件を計算する場合に非

線形性の影響が大きく現れることが分かった。これは破壊が氷板変位の局所的な曲率に依存するため、波形に含まれる非線形項が大きく関与するためである。

参 考 文 献

堺 茂樹・堀合孝博・笹本 誠・平山健一・佐伯浩 (1992): 氷板による波浪変形に関する基礎的研究, 海岸論文集, 第39巻, pp. 11-15.  
 Carter, D., Y. Ouellet & P. Pay (1981): Fracture of a solid ice cover by wind-induced or ship-generated waves, Proc. of 6th Int. Conf. on Port and Ocean Eng. under Arctic Conditions, pp. 843-856.  
 Wadhams, P. (1973): Attenuation of swell by sea ice, Journal of Geophysical Research, Vol. 78, No. 18, pp. 3552-3563.