

# 掃流飛砂の二相流モデル

土屋義人\*・三島豊秋\*\*

## 1. 緒言

気流および水流中において砂表面から移動を開始した個々の砂粒は、流体力の作用を受け跳躍運動を繰返し、砂表面を通じて輸送されている砂と砂層間で絶えず砂粒を交換しながら輸送される。このような現象は、飛砂および流砂における砂の掃流現象として知られており、一様流中における代表的な砂の輸送現象の一つである。

近年, Anderson・Haff (1991), Werner (1989) および中川・辻本・後藤・渡辺 (1993) によるコンピュータを用いた砂粒の saltation 軌道の詳細な数値解析に基づく研究などが行われている。しかしながら, これらの研究は, 個々の砂粒の軌道と流体運動の数値解析に基づく飛砂および流砂の内部機構の解析を目的とするものであり, 非平衡状態における飛砂・流砂量則として大局的に捉えたものではない。この観点からの研究は, 力学的には河村 (1951) による砂の掃流現象における砂の輸送量に対する束縛条件としての砂と流体の運動量の保存則の拡張として, 土屋・河田 (たとえば河田, 1976) によってわずかに試みられているのみである。

本研究では, まず, 近年発展してきた固液・固気二相流理論における運動論的取扱いに基づくことにより, 砂と流体の運動量の保存則の拡張としての飛砂および流砂における砂の掃流現象に対する二相流モデルを導く。ついで, stationary saltation としての砂粒の軌道の解析解に基づいて, その砂の掃流現象の二相流モデルから導かれる平衡状態および非平衡状態における飛砂および流砂の特性を検討する。

## 2. 基礎方程式の誘導

### 2.1 砂の掃流現象の運動論的記述

ここでは, まずは自由水面を持つ流砂を対象とする砂の掃流現象の運動論的記述を行う。このとき, 流砂に対する自由水面での境界条件を境界層外縁での圧力勾配としての境界条件に置換えることにより, 飛砂における砂の掃流現象の記述へと書換えることができるため, 基礎

方程式の一般性が失われることはない。

自由水面を  $z=\eta(t, x)$  および砂表面を  $z=z_0(t, x)$  で表すと, 砂相および流体相に対する運動方程式および境界条件は, それぞれ以下のように表される。

(a) 砂相の運動方程式および境界条件

砂粒同士の相互作用が無視できるとき, 流体中における砂粒の運動方程式に対する運動論的な基礎方程式は, 次式の Liouville 方程式で表すことができる。

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}_s n) + \nabla_u \cdot \left( \left( \frac{6}{\pi \sigma D^3} \mathbf{f}_s - \frac{1}{\sigma} \nabla p - \nabla \Omega \right) n \right) = 0 \quad \dots (1)$$

ここに,  $D$  は砂粒の粒径,  $\sigma$  は砂粒の密度,  $p$  は流体の圧力,  $\Omega$  は重力ポテンシャル,  $\mathbf{f}_s$  は抗力, 揚力および仮想質量力を含む流体力,  $\nabla$  は勾配を表すベクトル微分演算子,  $\mathbf{u}_s$  は砂粒の速度ベクトル,  $\nabla_u$  は速度空間上での勾配を表すベクトル微分演算子であり, また  $n$  は位相空間上の体積素片  $x \sim x + dx$  および  $\mathbf{u}_s \sim \mathbf{u}_s + d\mathbf{u}_s$  における砂粒の個数の分布関数である。

式 (1) で表される Liouville 方程式の砂表面上での境界条件は, 砂表面上の単位面積当りから単位時間に跳び出す砂粒の個数と砂の質量保存則で与えられ,  $z=z_0$  において次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} & |\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n}_b| n = |\mathbf{u}_{sr} \cdot \mathbf{n}_b| n_r(t, x, \mathbf{u}_{sr}) \\ & \quad + |\mathbf{u}_{si} \cdot \mathbf{n}_b| n_i(t, x, \mathbf{u}_{si}) \\ & \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n}_b) n d\mathbf{u}_s = \int_{-\infty}^{\infty} n d\mathbf{u}_s (\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_b) \\ & - \frac{6}{\pi \sigma D^3} (1 - \lambda_s) (\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_b) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

ここに,  $\mathbf{u}_{sr}$  および  $n_r$  は反発によって跳び出す砂粒の速度および個数の分布関数,  $\mathbf{u}_{si}$  および  $n_i$  は初期移動によって跳び出す砂粒の速度および個数の分布関数,  $\lambda_s$  は砂表面を構成する砂層の空隙率であり, また  $\mathbf{n}_b$  および  $\mathbf{v}_b$  は砂表面での外向きの法線ベクトルおよび境界面の移動速度である。

(b) 流体相の運動方程式および境界条件

砂粒が saltation をしながら輸送される砂の掃流現象における流体の乱流構造は, 砂粒の軌道の離散的な特性

\* 正会員 工博 名城大学教授 新学部準備室

\*\* 正会員 工博 徳島大学助手 工学部建設工学科

を反映したかなりスケールの大きな渦構造を持っており、砂相と流体相の間での乱れの相関は弱いと考えられる。そのため、流体相における構成関係には砂の体積濃度などの変動と流体の乱れの相関を考慮した修正は必要ないと考えられるため、流体運動の基礎方程式は連続式および Reynolds 方程式の形で与える。

2.2 砂の輸送現象の1次元二相流モデル

(a) 砂相の連続式および運動量方程式

Liouville 方程式 (1) に  $\pi\sigma D^3/6$  および  $\pi\sigma D^3 \mathbf{u}_s/6$  を乗じ、 $\mathbf{u}_s = -\infty \sim \infty$  および全水深にわたって積分すると、それぞれに対して次式が導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{q_s}{U_{sm}} \right) + \frac{\partial q_s}{\partial x} + (1 - \lambda_s) \frac{\partial z_0}{\partial t} &= 0 \dots\dots\dots (3) \\ \frac{\partial q_s}{\partial t} + \frac{\partial a_e U_{sm} q_s}{\partial x} &= - \frac{q_s}{U_{sm}} \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{\rho}{\sigma} \frac{q_s}{U_{sm}} \frac{\partial (\eta - z_0)}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial z} \\ &\quad - \frac{\rho}{\sigma} \frac{(\eta - z_0) q_s}{\delta_s U_{sm}} \frac{\partial \Omega}{\partial z} \frac{\partial z_0}{\partial x} - \frac{1}{\sigma} \tau_{sb} \\ &\quad + \frac{1}{\sigma} \frac{q_s}{U_{sm}} F_{Im} \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

ここに、 $\rho$  は流体の密度、 $q_s$  は砂の輸送量、 $U_{sm}$  は砂の平均輸送速度、 $\delta_s$  は saltation layer の層厚、 $a_e$  は砂相における運動量補正係数、 $F_{Im}$  は平均相互作用力、また、 $\tau_{sb}$  は砂の底面せん断応力であり、砂粒の個数の分布関数による速度空間上での平均  $\langle \rangle$  およびその平均値まわりの分散  $\langle \rangle'$  を用いて次式のように表される。

$$\begin{aligned} \tau_{sb} &= - [c_v \langle u'_s \mathbf{u}'_s \cdot \mathbf{n}_b \rangle]_{z=z_0} \\ &\quad - [(1 - \lambda_s) \langle u_s \rangle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_b]_{z=z_0} \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

(b) 流体相の連続式および運動量方程式

同様に、流体の連続式および  $x$  方向に対する運動方程式を境界条件を考慮して全水深にわたって積分すると、次式が導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\eta - z_0)}{\partial t} + \frac{\partial (\eta - z_0) U_m}{\partial x} + \lambda_s \frac{\partial z_0}{\partial t} &= 0 \dots\dots\dots (6) \\ \frac{\partial (\eta - z_0) U_m}{\partial t} + \frac{\partial \beta_e (\eta - z_0) U_m^2}{\partial x} &= - (\eta - z_0) \frac{\partial \Omega}{\partial x} - (\eta - z_0) \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial z} \\ &\quad - (\eta - z_0) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q_s}{U_{sm}} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial z} \\ &\quad + \frac{(\eta - z_0) q_s}{\delta_s U_{sm}} \frac{\partial \Omega}{\partial z} \frac{\partial z_0}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \tau_b \\ &\quad - \frac{1}{\rho} \frac{q_s}{U_{sm}} F_{Im} \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

ここに、 $\tau_b$  は流体の底面せん断応力、 $U_m$  は平均流速であり、また  $\beta_e$  は流体相における運動量補正係数である。

3. 砂の境界条件および底面せん断応力

3.1 砂の境界条件

砂粒の運動に関する Liouville 方程式の境界条件 (2) を定式化するためには、反発によって跳び出す砂粒の個数の分布関数  $n_r$  および初期移動によって跳び出す砂粒の個数の分布関数  $n_i$  を定めなければならない。反発によって砂表面上の単位面積当たりから単位時間に跳び出す砂粒の個数の分布関数は、砂表面上にある粗度砂粒によって生じる砂表面に落下してきた砂粒の個数の分布関数の散乱特性により、次式のように定められる。

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_{sr} \cdot \mathbf{n}_b| n_r(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_{sr}) &= \int_{u_{si} \cdot \mathbf{n}_b > 0} R(\mathbf{u}_{s1} \rightarrow \mathbf{u}_{sr}; t, \mathbf{x}) \\ &\quad \times n(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_{s1}) |\mathbf{u}_{s1} \cdot \mathbf{n}_b| d\mathbf{u}_{s1} \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

ただし、遷移確率  $R$  の積分値は砂粒の移動確率に対応しており、ここではこの積分値を  $P_{st}$  で与える。

一方、初期移動は局所的な現象であることから、それによって跳び出す砂粒の特性はその地点における局所的な流体力に強く依存すると推察される。このとき、砂表面上にある移動開始直前の単一の砂粒の力の釣合いより、流体力による初期移動時の砂粒の個数の分布関数は次式のように導かれる。

$$\begin{aligned} n_i &= \frac{6af_i}{\pi\sigma D^3} \\ &\quad \times \left[ \frac{(\mathbf{T}_b \cdot \mathbf{n}_b) \cdot \mathbf{t}_b + \tau_c}{\int_{u_{si} \cdot \mathbf{n}_b > 0} |\mathbf{u}_{si} \cdot \mathbf{n}_b| (\mathbf{u}_{si} \cdot \mathbf{t}_b) f_i d\mathbf{u}_{si}} \right] \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

ここに、 $f_i$  は初期移動時の砂粒の条件付き速度分布関数、 $\mathbf{T}_b$  は砂表面での流体の応力テンソル、 $\mathbf{t}_b$  は砂表面での接線方向の単位ベクトル、また  $a$  は比例係数であり、 $a=1$  のとき理想状態に対応する。

式 (5) で表される砂の底面せん断応力は、式 (2)、(8) および (9) を用いることにより、次式のように書換えられる。

$$\tau_{sb} = \sigma \Delta U_{sb} q_s - a(\tau_b - \tau_c) \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 $\Delta U_{sb}$  は次式で定義される平均量である。

$$\begin{aligned} \Delta U_{sb} &= - \frac{\pi D^3}{6q_s} \left[ \int_{u_r \cdot \mathbf{n}_b < 0} \int_{u_s \cdot \mathbf{n}_b > 0} u_s R \right. \\ &\quad \times |\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n}_b| n d\mathbf{u}_{s1} d\mathbf{u}_s \\ &\quad \left. - \int_{u_r \cdot \mathbf{n}_b > 0} u_s |\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n}_b| n d\mathbf{u}_s \right]_{z=z_0} \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

4. 二相流モデルに基づく飛砂・流砂量則

4.1 非平衡状態における飛砂・流砂量則

砂粒の代表的な saltation 軌道としては stationary saltation を仮定する。また、砂粒の軌道の表示には

Sørensen (1991) による抗力項を線形表示したときの流体中における砂粒の運動方程式の解析解を仮定する。このとき、砂粒の個数の分布関数を定義することができるため、砂の平均輸送速度  $U_{sm}$ 、流体と砂の平均相互作用力  $F_{lm}$  および輸送されている砂と砂層間の運動量の交換に関する平均量  $\Delta U_{sb}$  は定量化される。

流体運動は等流に近い状態であり、かつ砂表面はほぼ水平で砂の流送による砂表面の地形変化の影響は無視できると仮定する。境界条件として  $x^*=x/D=0$  で  $q_s^*=q_s/(u_*D)=0$  を仮定すると、次式の非平衡状態における飛砂および流砂量  $q_{sn}^*$  および流体の底面せん断応力  $\tau_b^*$  が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{q_{sn}^*}{q_s^*} &= 1 - \exp\left(-\frac{x^*}{A^*}\right) \\ \frac{\tau_b^*}{\tau_*^*} &= 1 - A^* \left(1 - \frac{\tau_b^*}{\tau_*^*}\right) \frac{q_{sn}^*}{q_s^*} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 $\tau^*$  は Shields 数、 $\tau_b^*$  は限界 Shields 数、

$$\left. \begin{aligned} \tau_b^* &= \frac{\tau_b}{(\sigma - \rho)gD}, \quad A^* = \frac{\rho F_{lm}^* x^*}{\sigma U_{sm}^* \Delta U_{sb}^*} \\ A^* &= \frac{a_e U_{sm}^* L^*}{\Delta U_{sb}^*}, \quad F_{lm}^* = \frac{D}{\rho u_*^2} F_{lm} \\ U_{sm}^* &= \frac{U_{sm}}{u_*}, \quad \Delta U_{sb}^* = \frac{u_*}{(\sigma/\rho - 1)g} \Delta U_{sb} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

であり、また  $q_s^*$  は次式で与えられる平衡状態における飛砂および流砂量である。

$$q_s^* = \frac{\rho}{\sigma \Delta U_{sb}^*} \tau_*^* \left(1 - \frac{\tau_b^*}{\tau_*^*}\right) \dots\dots\dots (14)$$

4.2 飛砂・流砂量則の表示

図-1 は、式(14)で与えられる平衡状態における流砂量則を砂の移動確率をパラメタに示したものである。この図によれば、式(14)で与えられる流砂量は砂粒の移動確率が小さいほど少なくなる傾向にある。これは、移動確率が小さくなるに伴い流砂と砂層間で交換される砂の運動量が流砂量に比べ相対的に大きくなり、流砂の濃度が低くなるためであると考えられる。式(14)で与えられる流砂量の Shields 数に対する変化は、Einstein の式を除く他の3つの流砂量の式と同様の傾向を示しており、また量的にも図中に示されている流砂に対する実験値に十分対応している。

一方、図-2 は、式(14)を平衡状態における飛砂に適用したものである。式(14)で与えられる飛砂量の Shields 数に対する変化は、図-2 に示されている流砂の場合と同様の傾向を示している。この傾向は河村の式および Tsuchiya の式と同様の傾向ではあるが、全体的に式(14)で与えられる飛砂量は実験値および他の飛砂量則に比べ10倍以上の過大な量となっている。一般に、飛砂においては splash による飛砂と砂層間での砂の交換作用を無

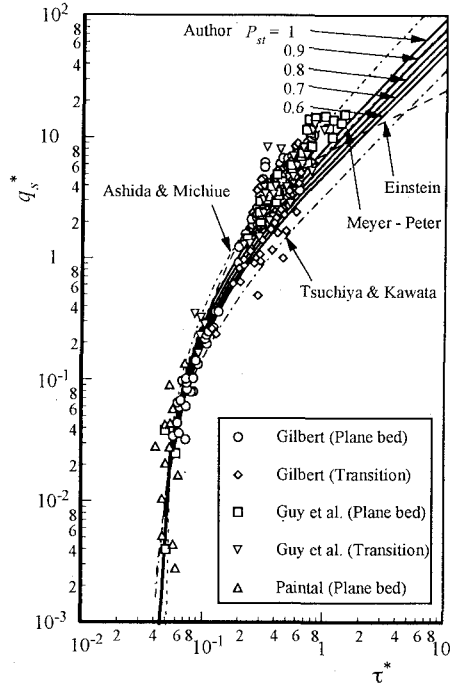


図-1 平衡状態における流砂量測

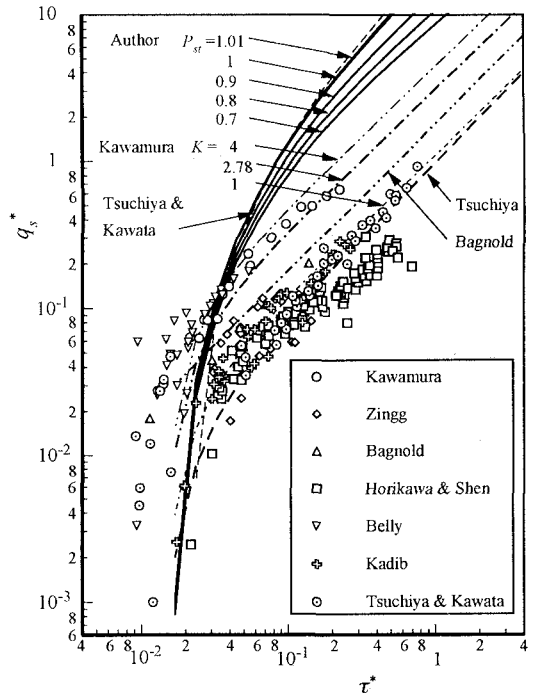


図-2 平衡状態における飛砂量測

視することができない。式 (14) で与えられる飛砂量則では stationary saltation を仮定しており、飛砂において重要な splash 特性は無視されている。図-2 に現れている河村の式および Tsuchiya の式との飛砂量の相違は、stationary saltation を仮定し、splash を無視していることが原因であると考えられる。

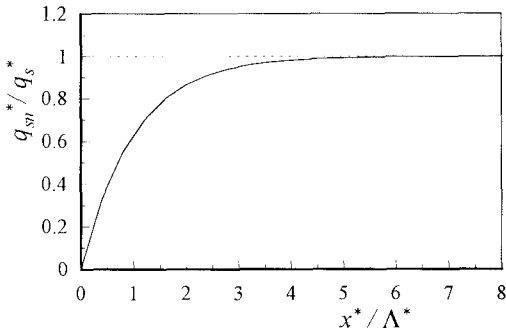
飛砂および流砂における底面せん断応力には、流体の底面せん断応力  $\tau_b^*$ 、反発による砂の底面せん断応力  $\tau_{sr}^*$ 、流体力による砂粒の初期移動によって生じる底面せん断応力  $\tau_c^*$ 、砂の底面せん断応力  $\tau_{sb}^*$ 、および二相流としての

底面せん断応力  $\tau_b^* + \tau_{sb}^*$  の5つがある。これらの5つの底面せん断応力は、平衡状態においては次式のような関係によって結び付けられる。

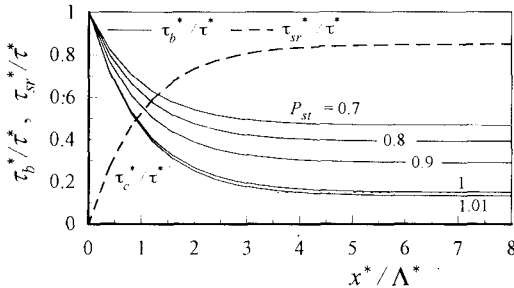
$$\begin{aligned} \tau^* &= \tau_b^* + \tau_{sb}^* \\ &= \tau_b^* + \tau_{sr}^* - \tau_{st}^* \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

図-3 は、非平衡状態における飛砂量と流体と砂の底面せん断応力の空間的な変化を示したものである。このとき、Shields 数および限界 Shields 数はそれぞれ 0.1 および 0.015 で与えられている。図-3(b) より、砂粒の移動確率が 1 のときには飛砂量の増加に伴い流体の底面せん断応力は減少し、限界 Shields 数の値に漸近していくことがわかる。砂粒が停止しない場合には、Shields 数で与えられている二相流としての流砂の全底面せん断応力は、完全にこの流体の底面せん断応力と反発による砂の底面せん断応力で受持たれることが理解される。

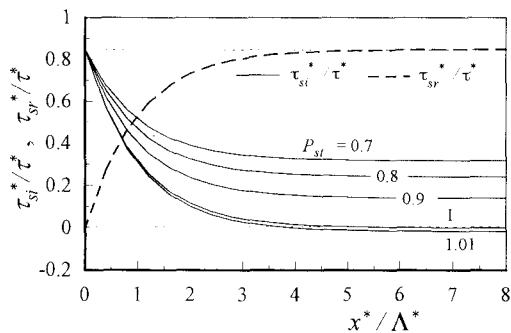
一方、砂粒が停止する移動確率が 1 より小さきときには、流体の底面せん断応力は限界 Shields 数より大きな値に漸近しており、また流体と反発による砂の底面せん断応力の合力は二相流としての全底面せん断応力より大きな値に漸近する。このときには、この過剰な流体の底



(a) 非平衡状態における飛砂量

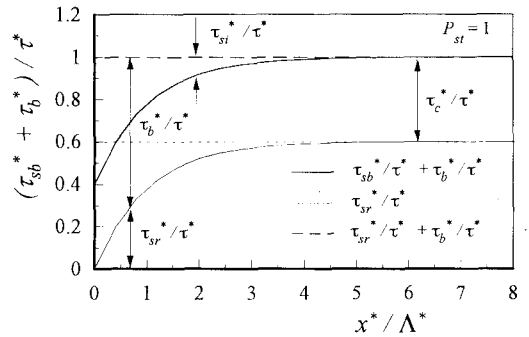


(b) 流体および反発による砂の底面せん断応力

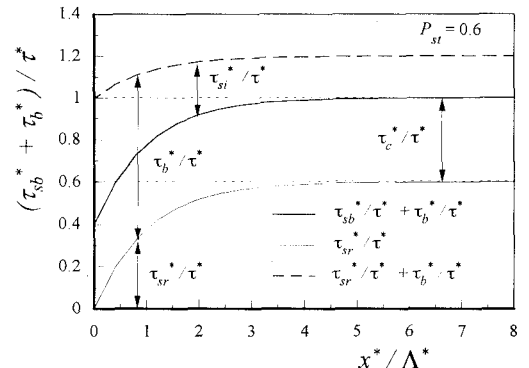


(c) 流体力による砂粒の初期移動によって生じる砂の底面せん断応力

図-3 非平衡状態における飛砂量と流体および砂の底面せん断応力の空間的变化



(a) 流砂における P\_st=1 の場合



(b) 流砂における P\_st=0.6 の場合

図-4 非平衡状態の流砂における全底面せん断応力の空間的变化

面せん断応力は砂表面上の作用していることを表しており、この過剰な応力によって流体力による砂粒の初期移動が生じる。砂粒の移動確率が1より大きな場合には、流体の底面せん断応力は限界 Shields 数に対応する砂粒の移動限界時の底面せん断応力より小さな値に漸近する。同時に、これに伴い流体力による砂の底面せん断応力は負の値となっている。実際にはこのような負の値の底面せん断応力は生じないため、このときには splash による砂粒の初期移動によって生じる砂の底面せん断応力によって砂の底面せん断応力が変化させられると考えられる。

図-4(a) および (b) は、図-3(b) および (c) に示されている各底面せん断応力間の関係を調べるために、砂粒の移動確率が1および0.6の場合の流砂における二相流としての全底面せん断応力を示したものである。(a) に示されている砂粒が砂表面で停止しない移動確率が1であるときの二相流としての全底面せん断応力の変化を見ると、全底面せん断応力は Shields 数に対応する流砂全体に作用している全底面せん断応力の値に漸近していくことがわかる。非平衡状態から平衡状態への移行過程における全底面せん断応力の増加は、平衡状態に近づくことによる砂の慣性力の減少に対応している。この傾向は、(b) に示されている砂粒が停止する移動確率が0.6の場合にも同様である。しかしながら、砂粒が停止する場合には、流体による砂粒の初期移動に流体力が費やされるため、この合力は Shields 数に対応する全底面せん断応力の値よりも大きな値になると理解される。

## 5. 結 語

砂粒の運動の運動論的な基礎方程式および流体運動に関する基礎方程式より、砂の掃流現象における二相流モデルを導出した。ついで、砂表面における初期移動機構などの砂粒の運動機構の運動論的記述を行ない、それらを用いて砂の底面せん断応力を定式化することができた。さらに、砂の掃流現象に対する連続式および運動量方程式に砂粒の軌道の近似解を用いることにより、ここで構築された砂の掃流現象の二相流モデルから導かれる平衡状態および非平衡状態における砂の輸送現象の基本的な特性について明らかにすることができた。

最後に、本研究は文部省科学研究費、奨励研究(A)「二相流理論に基づく飛砂と流砂の運動論的取扱いに関する研究」の補助を受けて実施されたものである。ここに記して謝意を表す。

## 参 考 文 献

- 河村竜馬 (1951): 飛砂の研究, 東京大学理工学研究所報告, 第5巻, pp. 95-112.
- 河田恵昭 (1976): 飛砂・流砂における砂粒の流送機構に関する基礎的研究, 京都大学博士学位論文.
- 中川博次・辻本哲郎・後藤仁志・渡辺幹広 (1993): 粒子間干渉を考慮した掃流層の数値シミュレーション, 水工学論文集, 第37巻, pp. 605-610.
- Anderson, R. S. and P. K. Haff (1991): Wind modification and bed response during saltation of sand in air, *Acta Mech.*, Suppl. 1, pp. 21-51.
- Sørensen, M. (1991): An analytic model of wind-blown sand transport, *Acta Mech.*, Suppl. 1, pp. 67-81.
- Werner, B. T. (1989): A steady-state model of wind-blown sand transport, *Jour. Geology*, Vol. 98, pp. 1-17.