

不規則継続跳躍モデルと $k-\epsilon$ 乱流モデルを用いた 飛砂の運動と風の解析

辻本 哲郎*・赤城 里至**

1. 序 論

砂浜環境の整備が進められて来るにつれ飛砂の制御が再度クローズアップされてきた。飛砂量予測そのものについては、Bagnold式(1941)、河村式(1951)やそれらを改良したいくつかの公式で工学的には間に合っているようだが、飛砂防止柵や灌木群などで飛砂の制御をすることなどを検討するに当たっては、飛砂の運動と風の構造の相互関係についての知見を充分整えておく必要がある。こういった観点から著者らは前論文(辻本・赤城, 1993)で、saltation運動で代表される飛砂の運動の解析と風速分布の解析を融合させ、両者を混相流としてバランスの取れた形で同時に求める方法を提案した。すなわち、砂面との衝突で頻繁に運動量を失う砂粒がその度に風から運動量を供給されて加速される過程と、砂に運動量を奪われて風速分布が歪まされる過程をモデルに構成した。これによって、従来実験的に知られていた飛砂層内の風速分布の対数則からのひずみやそれを特徴づける focal point の出現(Zingg, 1953)及び飛砂粒子の運動特性(saltation 飛高, saltation 長など)などとともに飛砂量式が誘導された。その研究では、飛砂層は不規則な saltation の集合体で、個々の saltation は砂面との衝突ごとに流下方向の運動量を失い、飛砂層内での粒子運動を加速する分だけ、言い換えれば粒子と風との相対速度による抗力分だけ、風の Reynolds 応力が欠損することなど現象の本質的特徴をモデルに組み込んではいないが、次のような仮定でモデルを簡略化している。(i) 個々の saltation は砂面との衝突・反発によってランダムな上向き初速度を得る、(ii) 飛砂層内においても混合距離モデルが成立し、混合距離は飛砂を含まない場合に比べて変化しない。(i) の仮定は飛砂の運動にかかわるもので、実際には個々の saltation は砂面での衝突事象を介して継続し、いわゆる不規則継続跳躍を呈しているのであるが、衝突・反発モデルを省略し、独立な不規則跳躍の集合体としてモデル化された。そのため、個々の saltation の初速度を力学的に評価できず平均の鉛直上向き初速度

について河村(1941)による実験式を仮定、ここに一つの実験定数を導入した。本論文では飛砂の運動に、河川の掃流砂に対して展開された砂面での反発を考慮した不規則継続跳躍モデル(辻本・中川, 1984)を導入する。一方、(ii)は乱流モデルにかかわるもので、混合距離あるいは渦動粘性係数の変化まで検討するには高次モデルの導入が望まれる。本論文では、 $k-\epsilon$ 乱流モデルを適用する。飛砂層を伴う流れは飛砂層内に相対速度をもつ離散的な障害物を有する流れと見なせ、その意味で植生層を伴う流れと共通点を持っている。清水・辻本・中川(1992)は植生層を伴う流れに対し、植生層内では空間平均された支配方程式を想定し、形状抵抗に関わる付加項を導入し、 $k-\epsilon$ 乱流モデルを適用した解析から時間平均乱流構造の記述を行っている。本研究ではこの枠組を飛砂層を伴う風の解析に導入する。

2. 混相流としての飛砂と風の解析の枠組

混相流としての飛砂層の取り扱い、次の4つのサブシステムの融合という枠組である。

(1) 個々の saltation の解析：風速分布と砂粒子の初速度が与えられれば個々の飛砂粒子の運動が saltation の運動方程式によって追跡できる。運動方程式の解は飛砂粒子の軌跡群、砂面からの高さ y ごとの粒子の存在確率密度 $f_b(y)$ 、粒子速度 (u_p, v_p) 、個々の saltation の飛高 $\{H\}$ 及び飛距離 $\{L\}$ などが求められる。

(2) 砂面との衝突・反発過程：一つの saltation の終末速度(砂面への衝突直前速度)が与えられると、反発面の不規則さにより不規則な反発が生じ、反発後速度として次の saltation の初速度が与えられる。

(3) 飛砂層を伴う風の解析：飛砂層で各高さでの飛砂濃度(飛砂数密度と存在確率密度の積、 $v_b f_b(y)$)と相対速度(粒子速度と風速の差)によって決まる形状抵抗が付加される。このため Reynolds 応力分布の欠損(及び乱流構造の変化)が生じ、風速分布が歪まされる。

(4) 平衡条件：飛砂の場合反発による saltation の継続は無制限回と近似され、平衡飛砂状態では新たな砂の移動開始がない。すなわち砂面での摩擦速度 $u_{*b} (= \sqrt{\tau_b/\rho})$ 、 τ_b ：砂面での掃流力(Reynolds 応力分布の砂面へ

* 正会員 工博 金沢大学助教授 工学部土木建設工学科

** 学生会員 金沢大学大学院学生 土木建設工学専攻

の外挿値), ρ : 流体の密度) が移動限界摩擦速度 u_{*c} に等しい。

以上の各サブシステムを解析する際与えられるべき量は下線で示したもので, これらは他のサブシステムからアウトプットされる。相互に関係した系を直接解くことは難しいが, まず風速分布を飛砂を含まない (対数則) と仮定して計算をスタートさせ, 解が安定するまで繰り返し計算を行うという方法が使われる。

本論文では以下のような条件で議論を進める。(1) 球状で均一な粒径の充分乾いた砂粒からなる平坦砂面で, (2) その上の風は粗面乱流で, (3) 跳躍中の粒子間の相互干渉は無視でき, さらに (4) 飛砂の運動形態は saltation で代表でき, (5) 飛砂量は平衡状態にある。このとき既知のパラメータは砂の径 d , 密度 σ (さらにその 2, 3 次元形状係数 A_2, A_3), 空気密度 ρ 及び砂面に働く全せん断応力 τ_0 であるとする。

3. 個々の saltation の解析

個々の saltation の支配方程式は,

$$\rho \left(\frac{\sigma}{\rho} + C_M \right) A_3 d^3 \frac{du_p}{dt} = D_x \dots\dots\dots (1)$$

$$\rho \left(\frac{\sigma}{\rho} + C_M \right) A_3 d^3 \frac{dv_p}{dt} = D_y - \rho \left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) A_3 d^3 g \dots\dots\dots (2)$$

$$D_x(y) = \frac{1}{2} \rho C_D A_2 d^2 (U - u_p) \sqrt{(U - u_p)^2 + (V - v_p)^2} \dots\dots\dots (3)$$

$$D_y(y) = \frac{1}{2} \rho C_D A_2 d^2 (V - v_p) \sqrt{(U - u_p)^2 + (V - v_p)^2} \dots\dots\dots (4)$$

と書け, ここに (u_p, v_p) : 粒子速度の流下方向 (x) 及び鉛直方向 (y) 成分, (D_x, D_y) : 粒子 1 個当たり作用する抗力の x 方向及び y 方向成分, C_D : 抵抗力係数, C_M : 付加質量係数, U : 風速, g : 重力加速度である。粒子の位置を (x_p, y_p) と表すと $(u_p, v_p) = (dx_p/dt, dy_p/dt)$ である。風速分布と粒子の初速度を与えると式 (1), (2) は数値的に解くことができ, ひとつの saltation 運動を追跡できる。 y 座標の原点は砂面とし初期条件は $t=0$ で $x_p=0, y_p=0.5d, u_p=u_{pout}, v_p=v_{pout}$ とした。ひとつの saltation は y_p が再び $0.5d$ となる (粒子が砂面に衝突する) ところで終了するが, 実際には反発し次の saltation 運動にはいる。

4. 不規則継続跳躍モデル

ここでは仮想反発面の不規則性を考慮した辻本・中川 (1984) の砂面衝突・反発モデルを適用する。図-1 に示すような仮想反発面の角度を $\{\alpha\}$ とするとき, この衝突前後の粒子速度 $(u_{pin}, v_{pin}), (u_{pout}, v_{pout})$ は次の関係

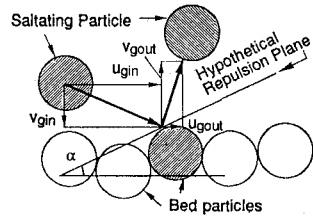


図-1 砂面での衝突・反発現象の模式図

式で結ばれる。

$$\begin{bmatrix} u_{pout} \\ v_{pout} \end{bmatrix} = \Xi_0 \begin{bmatrix} u_{pin} \\ v_{pin} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (5)$$

$$\Xi_0 = \begin{bmatrix} e \cos^2 \alpha - f \sin^2 \alpha & (e+f) \cos \alpha \sin \alpha \\ (e+f) \cos \alpha \sin \alpha & e \sin^2 \alpha - f \cos^2 \alpha \end{bmatrix} \dots\dots\dots (6)$$

ここに, e, f : 砂面での衝突時の反発係数である。仮想反発面については, 入射角 $\theta_n = \arctan(v_{pin}/u_{pin})$ が与えられると, 衝突粒子の相対的位置についての簡単な考察から次式で与えられる。

$$\alpha = \begin{cases} \arctan\{(1 - \xi_0) \sin \theta_n - 1\} - \theta_n + \frac{\pi}{2} & (\theta_n < \frac{\pi}{6}) \\ \arctan\left\{\left(\frac{1}{2} - \xi_0\right) \sin \theta_n - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta_n\right\} \\ - \theta_n + \frac{\pi}{2} & (\theta_n > \frac{\pi}{6}) \end{cases} \dots\dots\dots (7)$$

ここに ξ_0 は (0, 1) の一様乱数である。

5. $k-\varepsilon$ モデルによる飛砂層を伴う風の解析

飛砂層での風の解析では粒子の周辺の充分大きな空間で平均された支配方程式を用い, 粒子の存在は実体でなく形状抵抗に置き換えて考慮する。付加項を導入した流れの基礎方程式は次のとおりである (連続式は省略)。

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ 2(\nu_t + \nu) \frac{\partial U}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (\nu_t + \nu) \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right\} + \nu_{rfB} D_x \dots (8)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -g - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (\nu_t + \nu) \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ 2(\nu_t + \nu) \frac{\partial V}{\partial y} \right\} + \nu_{rfB} D_y \dots (9)$$

$$U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right\} + P_k - \varepsilon + C_{fk} \nu_{rfB} (D_x U + D_y V) \dots (10)$$

$$U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right\} + \frac{\varepsilon}{k} [C_1 \{ P_k + C_{fk} \nu_B f_B \} - (D_x U + D_y V)] - C_2 \varepsilon \dots \dots \dots (11)$$

ここに、 P ：圧力偏差、 k ：乱れエネルギー、 P_k, ε ：乱れエネルギーの生成率及び散逸率、 ν ：動粘性係数、 $\nu_t = C_\mu k^2 / \varepsilon$ ：渦動粘性係数である。また、モデル定数については、 C_{fk}, C_{fe} 以外については次のように Launder・Spalding (1974) の標準推奨値を用いた。 C_{fk}, C_{fe} については植生を伴う流れの計算と水路実験の比較から $C_{fk} = 1.0, C_{fe} = 1.3$ と決めた。

上記の基礎式系は Patanker (1980) のコントロールボリューム法によって離散化され、Gosman・Ideriah (1976) の TEACH コードに準拠した数値計算を行なった。計算領域の上縁では対象条件(後述)、砂面には粗面対数則を課し、また上・下流端で周期境界条件を与えた。

6. 飛砂層の平衡条件

飛砂を含まない場合の Reynolds 応力分布を $\tau_{Rclear}(y)$ とするとき、飛砂層では砂粒子に作用する形状抵抗分だけ Reynolds 応力分布に欠損が現われる。すなわち、飛砂を含む風の Reynolds 応力分布は、

$$\tau_R(y) = \tau_{Rclear}(y) - \nu_B \int_y^{y_E} \{ f_B(y) D_x(y) \} dy \dots \dots \dots (12)$$

と書ける。ここに、 y_E ：飛砂層外縁である。なお $f_B(y)$ と $D_x(y)$ は粒子運動の解析と風の解析と与えられる。飛砂の平衡状態ではもはや新たな砂の移動開始がないから、式(12)の砂面への外挿値 ($\tau_0 = \tau_{Rclear}(0)$) が移動限界 $\tau_c = \rho u_{*c}^2$ に等しくなる。この条件から平衡飛砂数密度 ν_B を次式で求めることができる。

$$\nu_B = \frac{\tau_0 - \tau_c}{\int_0^{y_E} \{ f_B(y) D_x(y) \} dy} \dots \dots \dots (13)$$

一方、Bagnold (1941) や河村 (1951) は飛砂の平衡状態では砂面の掃流力はほぼ移動限界掃流力となっており、全掃流力とそれとの差が saltation 中に粒子が流体か

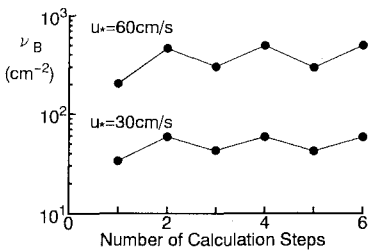


図-2 繰り返し計算による飛砂数密度の収束状況

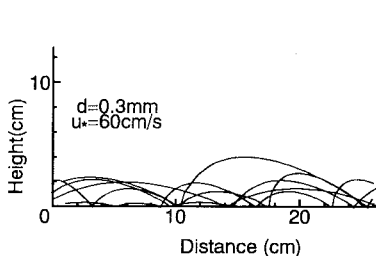


図-3 反発モデルによる successive saltation の計算例

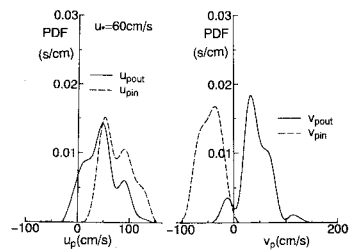


図-4 衝突前後の砂粒速度の確率分布

ら供給される運動量であると考えた。平衡状態では、砂粒子が砂面との衝突 1 回あたりに失う運動量 ΔM が 1 saltation 中に風から供給される運動量の総和に等しい。砂 1 個当たりの平衡衝突頻度は $1/\bar{T}$ (\bar{T} ：平均 saltation 時間) であるから、単位面積・単位時間当たりの衝突によって飛砂群が失う運動量は $(\nu_B \Delta M / \bar{T})$ で近似され、平衡飛砂数密度は次式で求められる。

$$\nu_B = \frac{(\tau_0 - \tau_c) \bar{T}}{\Delta M} \dots \dots \dots (14)$$

ところで、衝突 1 回あたりに失う運動量 ΔM は、

$$\Delta M = \rho \left(\frac{\sigma}{\rho} + C_M \right) A_3 d^3 (\bar{u}_{pin} - \bar{u}_{pout}) \dots \dots \dots (15)$$

で近似される。上式中の平均入射速度 \bar{u}_{pin} と反発速度 \bar{v}_{pout} 及び式(18)中の平均 saltation 時間 \bar{T} は不規則継続跳躍モデルで与えられるもののアンサンプル平均である。

以上のように平衡飛砂数密度が評価されると、不規則継続跳躍モデルの結果に応じて風の解析が行なわれるので、混相流としての融合計算の収束判定に使える。また収束解が得られると、次式で平衡飛砂量が算定される。

$$q_s = \nu_B \sigma A_3 d^3 \int_0^\infty f_B(y) u_{pin}(y) dy \dots \dots \dots (16)$$

ここで $u_{pin}(y)$ ：高さ y での平均飛砂移動速度である。

7. 計算結果とその考察

これら各サブシステムのモデルを組み合わせた繰り返し計算によって、飛砂の運動とそれを含む風の特性を同時に計算することができる。本論文では、各サブシステムの役割をそれぞれ他のサブシステムはなるべく簡略化して扱うことで調べた。なお、計算にあたっては通常よく扱われている飛砂を対象とし、 $d = 0.3 \text{ mm}$ 、 $\sigma = 2.65 \text{ g/cm}^3$ 、 $A_2 = \pi/4$ 、 $A_3 = \pi/6$ 、 $\rho = 0.00123 \text{ g/cm}^3$ 、 $\nu = 0.15 \text{ cm}^2/\text{s}$ とした。

(1) 反発モデルの導入

個々の saltation の初速度決定機構に 4 で説明した反発モデルを用い他の部分は前論文 (1993) のような簡略化したモデルによって飛砂の計算を行なった (以下モデ

ル B と呼ぶ)。飛砂数密度で繰り返し計算の収束状況を示したのが図-2 であるが、衝突・反発モデルの組み込みで繰り返し計算が不安定となり解が振動している（前論文では数回で収束解が得られた）。ここでは諸量の特性の検討から数密度に対する上方収束状態で計算を止め、その状態での飛砂特性とそれを含む風の性質を整理した。この計算で得られる successive saltation の軌跡例を図-3 に、衝突前後の粒子速度の分布例を図-4 に示す。衝突・反発によって流下方向成分が鉛直方向上向きに変換されていることがわかるが、従来の知見や前論文で仮定したほど流下方向速度が衝突によって減少しておらず、水流による掃流砂に対して調整された反発モデルが必ずしも飛砂にそのまま適用出来ないことを示している。図-5 は衝突直後の鉛直速度（次の saltation の初速度）の平均値 $E[v_{p0}]$ と標準偏差 σ_{vp0} の摩擦速度 u_{*0} に対する変化で、前論文のように次式で初速度を表すなら、その比例定数 K_0 は 0.5 程度となり前論文での数値同定が妥当であったことが伺える。

$$E[v_{p0}] = K_0(u_{*0} + u_{*c}) \dots\dots\dots (17)$$

また初速度の変動係数は 0.7 程度であり、前論文で分布の shape parameter を 2.0 程度に仮定したことも妥当であったと判断される。よって $k-\epsilon$ 乱流モデルを導入した

検討では前論文の簡易独立 saltation モデルで反発モデルに代用する（モデル C と呼ぶ）。

図-6 は飛砂層内の粒子存在確率密度と粒子速度の分布についての計算結果（図中太線）を前論文の結果（図中細線）と比較した。このときの風速分布を片対数表示したのが図-7 で、前論文同様、Zingg (1953) が指摘した focal point が説明できるし、図-8 のように飛砂量（無次元化して無次元せん断応力 $\tau_{*0} = u_{*0}^2 / \{(\sigma/\rho - 1)gd\}$ ）との関係で表示）も従来の半経験式（河村 (1951) を併示）や河田 (1976) の実験結果と一致している。

なお、平衡条件について、本論文では原則として飛砂層の各高さでの運動量の収支を考慮した方法（式 (13)）を採用するが、これと砂面での粒子速度の変化のみでこれを評価する式 (14) の方法とを平衡状態での飛砂数密度 ν_B の無次元せん断応力 τ_{*0} に対する変化によって比較したのが図-9 で、両者は良く一致している。

(2) $k-\epsilon$ 乱流モデルの導入

$k-\epsilon$ 乱流モデルを導入した風の数値解析を実行する（モデル C）にあたっては、ダクト流を想定し中立軸で対称条件を課した。以下の計算では中立軸の砂面からの高さ H_N を風洞実験を想定して 80 cm とした。

図-10, 11 には風速分布と Reynolds 応力分布を示し

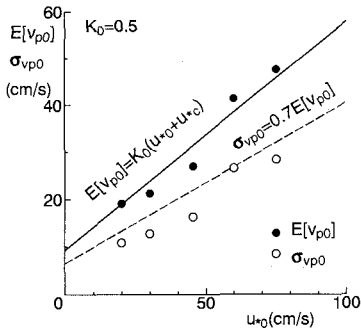


図-5 個々の saltation の初速度の平均値と標準偏差

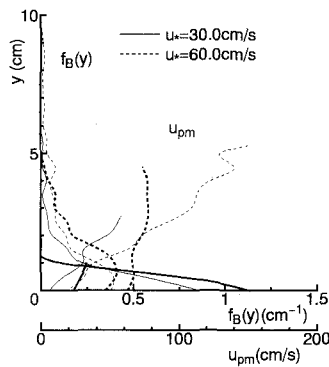


図-6 飛砂粒子の存在確率密度・粒子速度の分布

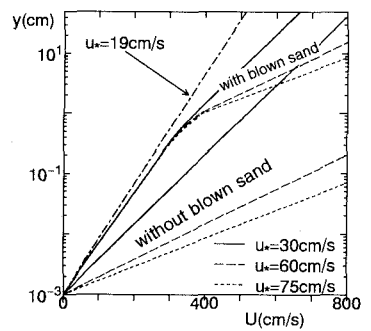


図-7 飛砂層の有無による風速分布の変化

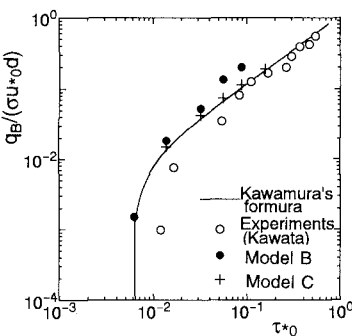


図-8 飛砂量

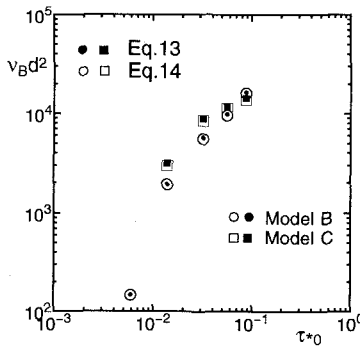


図-9 飛砂数密度と摩擦速度の関係

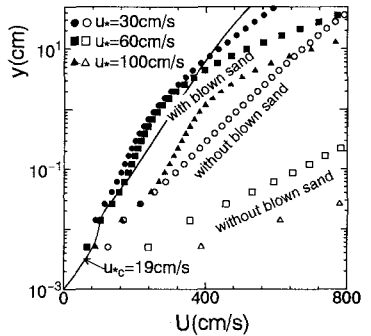


図-10 $k-\epsilon$ モデルによる風速分布の計算結果

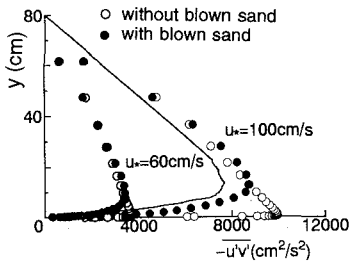


図-11 $k-\epsilon$ モデルによる風の Reynolds 応力分布

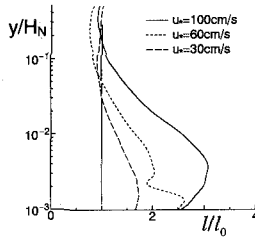


図-12 飛砂層内の混合距離の変化

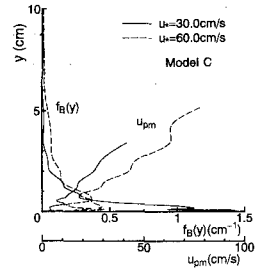


図-13 粒子の存在確率密度と速度分布 ($k-\epsilon$ モデル)

た(飛砂を含む流れと含まない流れを比較している)。混合距離モデルとの比較(例えば図-11の曲線は混合距離モデルを適用して求めたもの)に当たっては、上方に対称軸を課したため混合距離が上方境界に拘束され、また Reynolds 応力がもはや一定でなく三角形分布を示しながらも飛砂を含まないときの風速分布が対数則で記述されることを考慮し、混合距離モデルの適用に当たっては次のような混合距離 l の分布を仮定した。

$$l = \kappa y \sqrt{1 - y/H_N} \dots \dots \dots (18)$$

ただし、 κ : Kármán 定数である。この計算結果によると、 $k-\epsilon$ 乱流モデルを導入した解析結果も混合距離モデルによる簡易な解析も実用上有意な差はないが、流速分布について上方対象軸の影響が若干見られる。

本論文で $k-\epsilon$ 乱流モデルを導入したのは、乱流特性が飛砂層内で変質することに配慮したもので、乱流構造の変質を混合距離の分布で見ることにした。すなわち飛砂を含む流れの混合距離 l を飛砂を含まない流れのそれ l_0 で規準化して図-12に示した。混合距離は数値解析で得られた風速分布と Reynolds 応力分布から逆算した。図は飛砂層内での乱流構造の変質を示すものであるが、先にも述べたように風速分布の算定に当たって有意な相違をもたらすほどのものではないことがわかった。

なおこの計算による飛砂の数密度についての結果を図-9に併し、また存在確率密度、粒子速度分布についての結果を図-13に示した(図-6と比較)が(1)での計算結果と実質的に差はない。

8. 結 論

飛砂を含む流れでは、飛砂粒子が頻繁に砂面に衝突しそのたびに流下方向運動量を失い飛行中に風から運動量を奪うことが特徴で、飛砂と風の運動の運動量授受を考

慮した解析が必須である。本論文では、両相の本質的特徴としてそれぞれ継続跳躍をもたらす反発機構、飛砂の存在による飛砂層内の乱流構造の変質を取り込んだモデルを検討した。混相流としての計算の枠組みの中で、各サブシステムにそれぞれ不規則継続跳躍モデル、 $k-\epsilon$ 乱流モデルなど精緻なモデルを適用して検討を行なった結果、砂面での衝突・反発による個々の saltation の初期条件が与えられる過程、風と飛砂粒子の間での運動量交換過程、飛砂層での乱流構造の変質性状が明らかになった。

参 考 文 献

河田恵昭 (1976): 飛砂・流砂における砂粒の流送機構に関する基礎的研究, 京都大学学位論文。
 河村竜馬 (1951): 飛砂の研究, 東京大学理工学研究所報告, 第5巻, pp. 95-112。
 清水義彦・辻本哲郎・中川博次 (1992): 直立性植生層を伴う流れ場の数値計算に関する研究, 土木学会論文集, No. 477/II-19 pp. 35-44。
 辻本哲郎・赤城里至 (1993): サルテーションモデルによる飛砂層の解析と飛砂量式, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 276-280。
 辻本哲郎・中川博次 (1984): 掃流粒子の Saltation の確率過程論的解析, 土木学会論文集, No. 345/II-1, pp. 83-90。
 Bagnold, R.A. (1941): *The Physics of Blown Sand and Desert Dunes*, Mathuen, London, 265 p.
 Gosman, A.D. and J.K. Ideriah (1976): *TEACH-T, A General Computer Program for Two-Dimensional, Turbulent, Recirculating Flows*, Dept. Mech. Eng., Imperial College of Tech., London, S. W. 7
 Lauder, B. E. and D. B. Spalding (1974): The numerical computation of turbulent flow, *Computer Method in Applied Mech. & Eng.*, Vol. 3, p. 269。
 Patankar, S. V. (1980): *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences, Hemisphere Pub. Corp.
 Zingg, A. W. (1953): Some characteristics of eolian sand movement by saltation process, *Actions Eoliennes*, Cent. Nat. de Rech. Sci., Coll. Int., Vol. 35, pp. 197-208。