

# σ一座標系による 3次元の潮流計算

村上 和男\*・清水 勝義\*\*

## 1. ま え が き

湾内の流れは3次元の現象である。しかし、湾内の潮流を考える場合、湾の水平スケールに比べて鉛直スケールが一般に非常に小さいこと、潮汐は周期が長いので長波とみなせること、更にこれまでは計算機の能力の問題があること等から、鉛直方向に平均化された平面2次元モデルでの取り扱いが多かった。しかし、吹送流や密度流によって起こされる鉛直循環流の水質や海水交換に及ぼす効果や土砂や栄養塩の海水と海底との物質のやりとりの効果を考慮する場合には、流れの鉛直構造を考慮した3次元モデルでの検討が必要となる。

近年の計算機の目覚ましい発展により、計算機の計算速度も飛躍的に改善されたため、流れの3次元性を考慮した計算モデルの論文も数多く発表されるようになった(例えば、堀口他, 1977)。しかし、これらの3次元の流れの計算はレベルモデルによるものが殆どである。レベルモデルによる鉛直方向の層分割は水平面と平行な面で行われるので、水深の違いによって層数が異なること、あるいは最下層の層厚が大きく変化することのために、最下層での物質の移動や濃度の計算に不自然な現象が生じるという問題点がある。

本研究では、これらの点を改善する方法として、鉛直方向に曲線座標系を導入し、水深によっては層数が変化しないσ一座標系による3次元の潮流計算を実施した。まず、モデルの基本特性を把握するものとして矩形湾による計算を実施し、底面摩擦と鉛直粘性係数が流れの鉛直分布に与える影響を調べた。また、このモデルを東京湾に適用し、筆者らが行った実測データによる検証を行うとともに、河川からの淡水流入の影響、海上風の恒流に及ぼす影響等の検討を行った。

## 2. σ一座標系

### (1) 3次元流れの基礎方程式

3次元流れの基礎方程式は以下のように表される。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - fv \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left( N_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + F_x \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + fu \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left( N_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) + F_y \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} + w \frac{\partial s}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial s}{\partial z} \right) + F_s \\ \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

$$\rho = \rho_0(1 + as) \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに、ρ:海水の密度、ρ<sub>0</sub>:淡水の密度、ρ̄:海水の平均密度、s:塩分濃度、a:比例係数、u、v、w:それぞれx、y、z方向の流速、t:時間、f:コリオリ係数、N<sub>z</sub>:鉛直粘性係数、K<sub>z</sub>:鉛直拡散係数、P:圧力、g:重力加速度である。また、F<sub>x</sub>、F<sub>y</sub>は水平粘性項、F<sub>s</sub>は水平拡散項を表す。

### (2) σ一座標系

図-1にσ一座標系の概念図(Sheng and Butler, 1982)を示す。この図に示すようにσ一座標系とは、曲線座標系を用いて鉛直方向の層分割を水深に拘わらず同数で分割するものである。図-1の左の座標系から右の座標系に変換するために、式(7)を用いた座標変換を行う。

$$\sigma = 1 - 2 \left( \frac{\xi - z}{h + z} \right) \quad \dots\dots\dots (7)$$

式(1)~式(6)の流れの基礎方程式を、式(7)のσ一座標を用いて座標変換を行う。このとき、各々の微分係数も

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\sigma} + \gamma_x \frac{\partial}{\partial \sigma} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\sigma} + \gamma_y \frac{\partial}{\partial \sigma} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\sigma} - \frac{1}{D} \left\{ (1 + \sigma) \frac{\partial \xi}{\partial t} \right\} \frac{\partial}{\partial \sigma} \quad \dots\dots\dots (10)$$

\* 正会員 工修 港湾技術研究所海洋水理部海域環境研究室長  
 \*\* 正会員 港湾技術研究所海洋水理部主任研究官

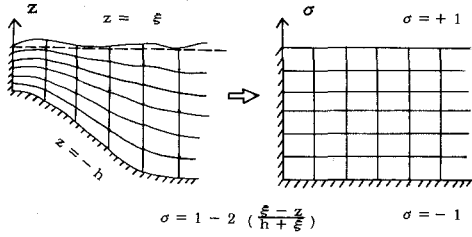


図-1  $\sigma$ -座標系

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{2}{D} \frac{\partial}{\partial \sigma} \dots\dots\dots (11)$$

$$\gamma_x = \frac{1}{D} \left\{ (1-\sigma) \frac{\partial h}{\partial x} - (1+\sigma) \frac{\partial \xi}{\partial x} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

$$\gamma_y = \frac{1}{D} \left\{ (1-\sigma) \frac{\partial h}{\partial y} - (1+\sigma) \frac{\partial \xi}{\partial y} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

$$D = (h + \xi) \dots\dots\dots (14)$$

と変化する. 式(8)~式(11)の座標変換式を式(1)~式(6)の基礎方程式に代入すると,  $\sigma$ -座標系による3次元の流れの基礎方程式は, 運動方程式を  $x$  方向に限定すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial \sigma} - f v \\ = -g \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{g}{2(1+a\bar{s})} D \frac{\partial}{\partial x} \left( a \int_{\sigma}^1 s d\sigma \right) \\ + \frac{4}{D^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( N_z \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right) + F_x \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Du) + \frac{\partial}{\partial y} (Dv) + D \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} = 0 \dots\dots\dots (16)$$

となる. ここに,  $\omega$  は式(17)によって表される,

$$\omega(x, y, \sigma, t) = \left\{ u\gamma_x + v\gamma_y - \frac{(1+\sigma)}{D} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{2}{D} w \right\} \dots\dots\dots (17)$$

また, 物質保存の拡散方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} + \omega \frac{\partial s}{\partial \sigma} \\ = \frac{4}{D^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( K_z \frac{\partial s}{\partial \sigma} \right) + F_s \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

となる. 水深方向に平均化された流れの基礎方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - f \bar{v} \\ = -g \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{1}{D} \frac{\partial (D\bar{u}^2)}{\partial x} - \frac{1}{D} \frac{\partial (D\bar{u}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\tau_{wx}}{\rho D} - \frac{\tau_{bx}}{\rho D} \\ - \frac{ga}{4(1+a\bar{s})} \left\{ \frac{\partial D}{\partial x} \left[ \int_{-1}^1 \left( \int_{\sigma}^1 s d\sigma' + \sigma s \right) d\sigma \right] \right. \\ \left. + D \int_{-1}^1 \left( \int_{\sigma}^1 \frac{\partial s}{\partial \sigma x} d\sigma' \right) d\sigma \right\} + \bar{F}_x \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

となる.

(2) Mode Splitting 法

湾内の潮流を計算する際に, 長期間の時間積分が必要となる. 特に, 広範囲の領域の流れを3次元で計算する場合には, 超高速の計算機をもってしても多くの困難がある. そこで, 平面2次元の計算と3次元の計算を組み合わせた Mode Splitting 法による時間積分を行う. 3次元の  $x$  方向の運動方程式 (15) を

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{4}{D^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( N_z \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right) + A_x \dots\dots\dots (20)$$

また, 2次元の  $x$ -方向の運動方程式(19)を

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -g \frac{\partial \xi}{\partial x} + B_x \dots\dots\dots (21)$$

とおく. ここで,  $A_x, B_x$  は式(15)と式(19)の圧力勾配と鉛直粘性項を除いたものである. ここで, 流速  $u$  と流速の水深方向の平均値  $\bar{u}$  との偏差を  $u' = u - \bar{u}$  とおくと,

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = \frac{4}{D^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( N_z \frac{\partial u'}{\partial \sigma} + N_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial \sigma} \right) + A_x - B_x \dots\dots\dots (22)$$

となる. 偏差流速に関する式(22)は圧力勾配項  $g \partial \xi / \partial x$  を含まない. したがって, 時間差分に関する安定条件は Courant-Friedrich-Lewy (CFL) の条件式に抛らず, 大きくとることが可能となる. そこで, 平均流速  $\bar{u}$  を CFL 条件式にしたがって細かい時間ステップで求め, 数十ステップ毎に偏差流速  $u'$  を求めるという Mode Splitting 法を採用した. その計算手順を図-2に示す.

式(22)を解くうえで, 海面, 海底の境界条件はそれぞれ次式で与えられる.

$$N_z \frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{D}{2\rho} \tau_{wx}, \quad \tau_{wx} = \rho_a C_D W_x \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \dots\dots\dots (23)$$

$$N_z \frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{D}{2\rho} \tau_{bx}, \quad \tau_{bx} = \rho C_D u_b v \sqrt{u_b^2 + v_b^2} \dots\dots\dots (24)$$

ここに,  $\rho$ : 海水の密度,  $\rho_a$ : 空気密度,  $C_D$ : 抗力係数,  $\tau_w$ : 海面剪断力,  $\tau_b$ : 底面剪断力,  $W_x, W_y$ : 風速,  $u_b, v_b$ : 最下層の流速である.

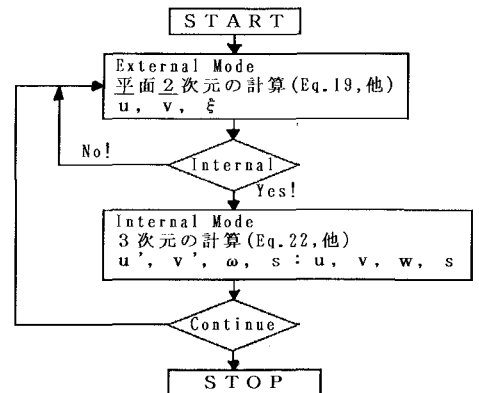


図-2 Mode Splitting 法の計算手順

(3) 底面摩擦係数と鉛直粘性係数

流れの数値モデルにおいて海底面での摩擦の効果は、Chézyの粗度係数(C<sub>r</sub>)やManningの粗度係数(n)が一般に用いられている。これらの係数は次式で表現される。

$$\bar{u} = \frac{1}{n} R^{2/3} I^{1/2}, \bar{u} = C_r \sqrt{RI} \dots\dots\dots (25)$$

ここに、 $\bar{u}$ ：平均流速、R：径深、I：水面勾配である。しかし、これらの粗度係数の値は流れの平均流公式より導かれたものであるため、平面2次元モデルには有効であるが、多層モデルの最下層の流速に対して適用する場合には若干の修正が必要である。これについて、Robert・Ouellet (1987)は、水深方向にm層に等分割した場合に、最下層の流速に対するChézyの摩擦係数として、

$$C = C_r - \frac{\sqrt{g}}{km} \sum_{k=1}^{m-1} \left( \frac{k}{m-k} \right) \dots\dots\dots (26)$$

を与えている。ここに、C<sub>r</sub>：平均流速に対するChézyの粗度係数、C：最下層の流速に対するChézyの粗度係数、k：カルマン定数である。

鉛直方向の粘性係数、拡散係数は、鉛直方向の密度分布を考慮して、Munk and Andersonの式

$$N_z = N_{z0}(1 + R_i)^{-\alpha}; K_z = K_{z0}(1 + R_i)^{-\beta} \dots\dots (27)$$

で与えられる。ここに、N<sub>z0</sub>、K<sub>z0</sub>：それぞれ中立状態での鉛直の粘性係数と拡散係数、R<sub>i</sub>：Richardson数、α、β：定数である。

3. 矩形湾による定常流の計算

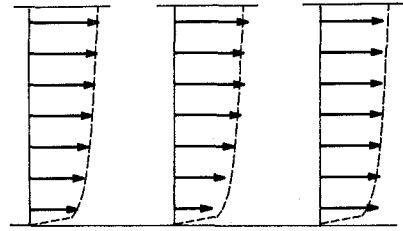
中立状態の定常流における流速の鉛直分布は、境界層が発達した領域においては対数分布則が成立することが知られている。多層モデルの数値計算においても対数分布則が成立するように鉛直粘性係数を与える必要がある。底面が粗の場合の流速分布公式及び平均流速公式は、

$$\frac{u(y)}{u_*} = 8.5 + 5.75 \log_{10} \left( \frac{y}{k_s} \right) \dots\dots\dots (28)$$

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = 6.0 + 5.75 \log_{10} \left( \frac{R}{k_s} \right) \dots\dots\dots (29)$$

で与えられる。ここに、u<sub>\*</sub>(=√gRI)：摩擦速度、k<sub>s</sub>：粗度高さである。いま、水深15m、長さ64kmの矩形湾の両端に水位差が5cmある状態を想定する。この条件から、 $\bar{u} = 20.7 \text{ cm/s}$ 、 $u_* = 1.1 \text{ cm/s}$ 、 $k_s = 8.9 \text{ cm}$ が得られる。これらの値を式(28)に代入すると対数分布則にしたがう流速分布が得られる。

矩形湾の3次元流れの計算を図-2の手順で行った。まずExternal Modeの計算を、従来から筆者らが用いているADI法により行った。この結果を用いて10ステップに1回Internal Modeに入り、u'、v'の計算を行った。塩分の拡散計算はInternal Modeで行った。



N<sub>z</sub>=8 cm<sup>2</sup>/s N<sub>z</sub>=2 cm<sup>2</sup>/s N<sub>z</sub>=50 cm<sup>2</sup>/s

図-3 矩形湾における流速の鉛直分布

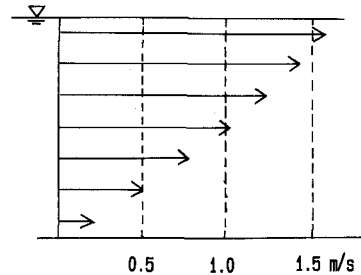


図-4 レベルモデルによる流速の鉛直分布 (γ<sub>i</sub><sup>2</sup>=0.001と非常に小さい場合)

図-3に中立状態の鉛直粘性係数N<sub>z0</sub>を2cm<sup>2</sup>/s、8cm<sup>2</sup>/s、50cm<sup>2</sup>/sに設定した場合の7層に分割された矩形湾の計算結果を示す。なお、図中の破線は式(28)より得られた対数分布則を示す。8cm<sup>2</sup>/sの結果が対数分布則に最も近い結果となっている。この図より、鉛直粘性係数が大きいと流速分布が一様になり、小さいと上層で速く下層で遅い流速分布となることがわかる。図-4に示すのは、従来の多層レベルモデルでC<sub>r</sub>を最下層の流速に対して適用し、小さい鉛直粘性係数を与えた場合の結果である。図-3の結果と比べるとかなり大きい流速を示し、最下層の流速において20.7cm/sとなっている。この原因としては、矩形湾の両端で与えた水面勾配と最下層の底面摩擦が釣り合ったこと、及び鉛直粘性として与えた層間の無次元抵抗係数γ<sub>i</sub><sup>2</sup>=0.001(τ<sub>i</sub>=ργ<sub>i</sub><sup>2</sup>(u<sub>w</sub>-u<sub>i</sub>)(u<sub>w</sub>-u<sub>i</sub>))の値が小さ過ぎたことが考えられる。

4. 東京湾における潮流計算

σ-座標系による3次元の潮流計算モデルを東京湾に適用し、筆者らが以前行った潮流の現地観測結果(村上・森川, 1988)と比較・検討を行うことによりモデルの検証を行った。この潮流観測は1983年の8月27日から5測点において15昼夜、他の5測点においては30昼夜の連続観測を実施したものである。

表-1に東京湾の潮流計算の計算条件を示す。Mode

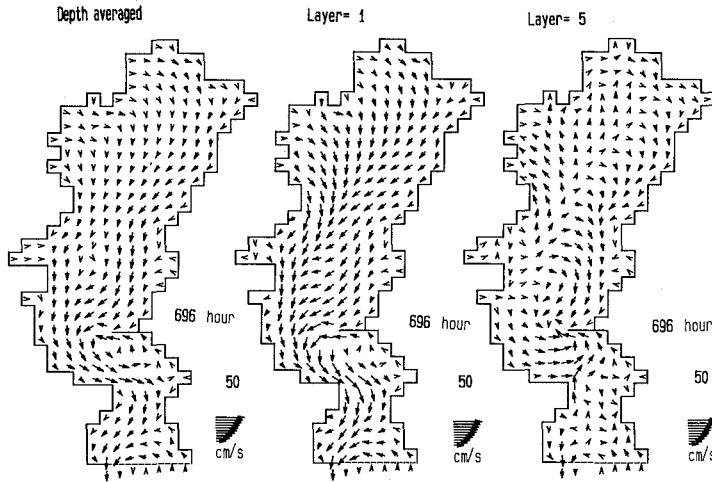


図-5 東京湾の潮流計算結果 (左:平均流, 中:最上層, 右:最下層; 計算開始後 696 時間, 1983/9/29)

表-1 東京湾の潮流計算の計算条件

格子間隔	2 km
層分割	5 層
タイムステップ	External : 60 秒 Internal : 600 秒
開境界条件	館山の調和定数より合成
河川流入	主要 9 河川より年平均流量
鉛直粘性係数	$N_v = 10 \sim 100 \text{ cm}^2/\text{s}$
鉛直拡散係数	$K_v = 1 \sim 10 \text{ cm}^2/\text{s}$
水平粘性係数	$N_h = 10^4 \text{ cm}^2/\text{s}$
水平拡散係数	$K_h = 10^4 \text{ cm}^2/\text{s}$
風	第二海堡での実測値

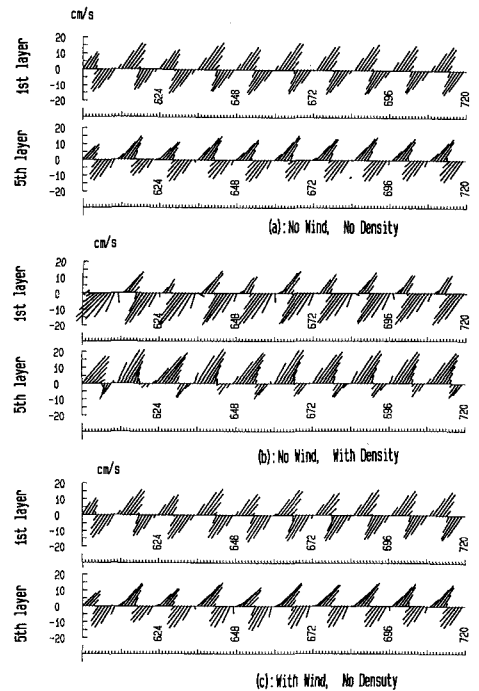


図-7 計算結果による密度と風の流れに及ぼす効果 (上:密度・風無し, 中:密度考慮, 下:風考慮)

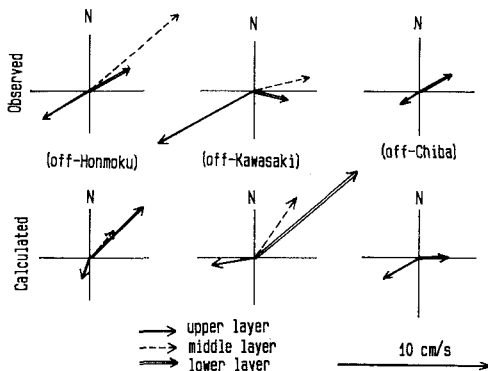


図-6 恒流の観測結果と計算結果の比較

Splitting による 3 次元計算のタイムステップは、2 次元計算のときの 10 倍の値で行った。河川からの淡水流入量は、年平均流量を上層から下層まで均一に与えた。現地観測期間の流れを再現するために、開境界条件として館山の調和定数を与え、これを合成することにより 1983 年の 8 月 27 日から 1 カ月間の潮流計算を実施した。また、

海上風の流れに及ぼす影響を把握するために、東京湾口の第二海堡での実測値を計算域の全域に与えた。その結果の一例を図-5に示す。図-5は、(a)が平均流速、(b)が上層(第1層)、(c)が底層(第5層)の結果である。計算結果から淡水流入の影響により、表層が流出、下層が流入という傾向がみられる。現地観測結果のデータと同様に、15日間の計算結果を取り出して調和分解した結果を図-6に示す。現地結果は複雑な流動を示しており、この流れの完全な再現は難しいが、大まかにみるとほぼ再現しているとみせる結果が得られている。

また、表-1の計算条件を用いて、密度の効果が無い場合、風速をゼロにした場合についての計算を実行し、東京湾の恒流に与える密度と風の効果の見積もりを行った。その結果を図-7に示す。この結果から、密度の鉛直循環流に及ぼす効果が大きいことがわかる。また、風の鉛直循環流に与える効果に関しては、計算期間全般を通してあまり強い風が吹いていないこともあるが、あまり大きくないという計算結果が得られた。

## 5. ま と め

$\sigma$ -座標系を用いた3次元の潮流計算を矩形湾と東京湾を対象として行った。本研究において明らかになったことを列挙すると以下の通りとなる。

(1)  $\sigma$ -座標系を用い、計算領域全体で層分割数が同じで、最下層の層厚が大きく変化しない3次元の潮流計算が可能となった。

(2) 多層モデルによる底面摩擦の影響を最下層の流速を用いて考慮する場合には、平均流公式より得られる係数を補正する必要がある。

(3) 中立状態の定常流計算において、Mode Splitting法を用いて鉛直粘性係数を適切に与えると、流速分布は対数分布則に近い分布を示す。

(4) 東京湾の計算において現地観測の時期の開境界条件、海上風の条件を与えることにより、実測値と比較して流況・恒流ともほぼ満足する結果が得られた。東京湾の鉛直循環流は密度流が与える効果が大きい。

今後の課題として、水深変化の大きいところでの計算の不安定、密度と風の効果を考慮した鉛直粘性係数等のモデル改良を行い、本計算手法の長所と思われる最下層の層厚が余り変化しない点を考慮して、シルテーションや富栄養化モデルへ適用していく所存である。

## 参 考 文 献

- 堀口孝男・富田 勇・堀江 毅 (1977): 三次元モデルによる流れと拡散の数値解法について、第24回海講論文集, pp. 443-334.
- 村上和男・森川雅行 (1988): 東京湾の長周期流れの特性について、沿岸海洋研究ノート, 第25巻, 第2号, pp. 146-155.
- Sheng, Y. P. and H. L. Butler (1982): Modeling coastal currents and sediment transport, Proc. 18th Coastal Eng. Conf., ASCE, pp. 1127-1148.
- Robert, J. L. and Y. Ouellet (1987): A three-dimensional finite element model for the study of steady and non-steady natural flows, Three-Dimensional Models of Marine and Estuarine Dynamics, Elsevier, pp. 359-372.