

fractional step 法を用いた一般曲線座標系の潮流計算について

佐藤勝弘*・池田正徳**・竹内聖一***

1. はじめに

潮流計算は、海峡、河川、河口部等の複雑な境界形状を持つ領域を対象としており、従来のデカルト座標での矩形格子に比べ境界形状をより正確に再現できる一般曲線座標による境界適合格子 (BFC) の適用範囲は大きいものと考えられる。

機械工学を始め他の分野では流体解析に BFC 法を適用する試みは数多くなされている (例えば、保原・大宮司 (1992))。また、流速変数の選択法 (デカルト座標系の速度、反変速度あるいは共変速度) や変数の配置の選択法 (速度を格子点に圧力をセル中心に定義する ALE 配置あるいはスタッガード配置) を初めをして現在でも種々の手法が提案されている。

潮流計算を対象とした場合には、Johnson (1982)、Häuser ら (1985) は ALE 配置のデカルト座標の速度を変数として BFC 法の適用を試みているが、水位、流速の振動の問題のため水平混合係数を大きく採ることにより計算の安定を図る必要があった。その後、Johnson ら (1989) は反変速度によるスタッガード配置を採用して計算の安定化を図っている。この場合には移流項に座標の曲率による項が付加されるなど、計算空間の基礎式 (変換式) が非常に複雑になるとともにその計算上の取り扱いに注意が必要となる (越塚ら, 1990)。Borthwick ら (1992) はスタッガード配置のデカルト座標系の速度による計算法を提案しているが、安定な計算のために水位の平滑化を行っており、水位の振動は完全には抑えられていない。一方、直交曲線座標系を用いた場合には、後藤ら (1981)、Blumberg ら (1987) 等の研究があり、計算上の問題は軽減されるが、実海域における格子形成の確立が課題として残る。このように BFC 法による潮流計算では、実海域の複雑な領域に対する格子形成方法の問題の他、一般曲線座標系へ変換に際して基礎式に新たに付加される項の計算方法等の従来のデカルト座標系計算では無かった多くの問題が生じるため、これまで BFC

法の潮流計算への適用に関する研究報告例は必ずしも多くない。

以上の点を踏まえ、本研究は安定で精度の良い効率的な一般曲線座標系の潮流計算法の開発を目的として行ったもので、その第 1 段階として fractional step 法を用いた一般曲線座標系の計算方法と適用性について研究を行った。

2. 一般座標系での基礎式

本研究では、平面 2 次元単層モデルを対象とした。連続式と運動方程式はデカルト座標では次のように表される。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{gn^2 w u}{H^{4/3}} \\ - A_H \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{gn^2 w v}{H^{4/3}} \\ - A_H \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = 0 \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

ここに、 x, y, t は図-1 に示すデカルト座標系の空間座標と時間、 ζ は水位、 (u, v) はデカルト座標での流速成分、 $H (= h + \zeta)$ は実水深、 h は静水時の水深、 n はマンニングの粗度係数、 $w (= \sqrt{u^2 + v^2})$ は流速の絶対値、 A_H は水平混合係数、 g は重力加速度である。

これらの基礎式の一般座標系 (ξ, η) での変換式は、流

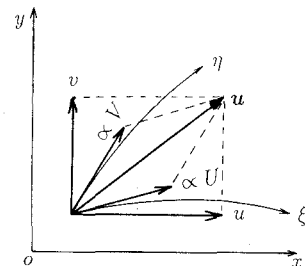


図-1 記号の定義

* 正会員 工修 日本テトラポッド(株)応用水利研究所
 ** 日本テトラポッド(株)応用水利研究所
 *** 工修 日本テトラポッド(株)応用水利研究所

速変数をデカルト座標流速 (u, v) とした場合と次式で表される流速ベクトルの (ξ, η) 方向の投影成分に比例する量である反変流速 (U, V) とした場合により異なる。

$$U = (y_\eta u - x_\eta v) / J, \quad V = (-y_\xi u + x_\xi v) / J \quad \dots (4)$$

ここで、下添え字はこの変数による偏微分を意味し (例えば、 $\xi_x = \partial \xi / \partial x$)、 $J = (x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta)$ はヤコビアンである。反変流速は流速の次元を持つものではなく、変換座標系のメトリックで無次元化した値であり、格子形状に依存した値となる。

一般座標系への変換は、チェーンルールを用いて行われる。スカラー関数 F の (x, y) に関する一階微分の変換式は次式で表される。

$$F_x = \frac{1}{J} (y_\eta F_\xi - y_\xi F_\eta), \quad F_y = \frac{1}{J} (-x_\eta F_\xi + x_\xi F_\eta) \quad \dots (5)$$

なお、連続式は次の関係式を用いて変換し、保存形とした。

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(J \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(J \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left(J \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(J \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = 0 \quad \dots (6)$$

(u, v) を変数とした場合の連続式と x -方向運動方程式の変換式は次のようになる。

$$J \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \{ (y_\eta H u - x_\eta H v)_\xi + (-y_\xi H u + x_\xi H v)_\eta \} = 0 \quad \dots (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial \xi} + V \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{g}{J} \left(y_\eta \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} - y_\xi \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right) + \frac{g \eta^2 w u}{H^{4/3}} - \frac{A_H}{J} \{ (y_\eta (u_x)_\xi - y_\xi (u_x)_\eta) + (-x_\eta (u_y)_\xi + x_\xi (u_y)_\eta) \} = 0 \quad \dots (8)$$

同様に、 y -方向運動方程式の変換式が得られる。デカルト座標の基礎式と比較して、連続式はやや複雑になっている。運動方程式は移流項が移流速度が反変流速成分 (U, V) に変わった以外は同じ形となる。また、水位勾配項は2方向の勾配に分離され、拡散項はやや複雑となる。このため、ここでは u_x, u_y のまま表すが、これらの項はさらに式 (5) を用いて変換されるべきものである。

反変速度 (U, V) を変数とした連続式の変換式は次式で表され、デカルト座標の場合とほぼ同じ形となる。

$$J \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial (JHU)}{\partial \xi} + \frac{\partial (JHV)}{\partial \eta} = 0 \quad \dots (9)$$

一方、運動方程式の変換は先の (u, v) を変数とする運動方程式の変換式と式 (4) の関係式より誘導できるが、流速成分 (U, V) の変化と座標軸方向の変化も考慮する必要があり、非常に複雑な式となる (Wang, 1992)。 U に関する運動方程式は次のように表される。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial \xi} + V \frac{\partial U}{\partial \eta} + U^2 \Gamma_{11}^{11} + 2UV \Gamma_{12}^{11} + V^2 \Gamma_{22}^{11} + g \left\{ g^{11} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + g^{12} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right\} + \frac{g \eta^2 w}{H^{4/3}} \frac{U}{J} + \text{拡散項} = 0 \quad \dots (10)$$

ここに、 g^{11} 等は式 (11) で表される計量テンソル、 Γ_{ij}^{kl} 等は式 (12) で定義されるクリストッフェル記号である。移流項に現れる Γ_{jk}^i は j 方向の単位ベクトルを k 方向に単位長さだけ平行移動した時、 i 方向の成分がどれくらい変化するかを表している。つまり、座標の曲率、格子の歪等の影響を表し、計算の安定性から取り扱いに注意が必要となる (越塚ら, 1990)。

$$g^{11} = (x_\xi^2 + y_\xi^2) / J^2, \quad g^{12} = -(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta) / J^2, \quad g^{22} = (x_\eta^2 + y_\eta^2) / J^2 \quad \dots (11)$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{\partial^2 x_n}{\partial \xi^j \partial \xi^k} \frac{\partial \xi_i}{\partial x^n} \quad \dots (12)$$

拡散項は非常に複雑であり、 $U = u^1, V = u^2$ とした時の第 m 方向の反変速度成分 u^m の成分について結果のみ記す。

$$-A_H g^{kn} \left[\frac{\partial^2 u^m}{\partial \xi^n \partial \xi^k} - \Gamma_{kn}^s \frac{\partial^2 u^m}{\partial \xi^s} + \Gamma_{sn}^m \frac{\partial^2 u^s}{\partial \xi^k} + \Gamma_{sk}^m \frac{\partial^2 u^s}{\partial \xi^n} + u^s \left(\frac{\partial}{\partial \xi^k} \Gamma_{sn}^m - \Gamma_{kn}^l \Gamma_{sl}^m + \Gamma_{sn}^l \Gamma_{lk}^m \right) \right] \quad \dots (13)$$

なお、 (u, v) 系では運動方程式を保存形の変換式を得ることができるが、反変速度 (U, V) 系では不可能である (Wang, 1992)。本研究では移流項を非保存形のまま取り扱ったが、デカルト座標系の計算と同様に BFC 法でも保存形で扱った方が一般的には精度が良いと指摘されている (Johnson, 1982)。

3. 計算方法

本研究では、前述の BFC 法を適用する際に生じる計算の安定性と計算の煩雑さを軽減するために、移流、拡散、伝播のステップを分離し、各ステップで最適な計算法を適用しながら計算を進める fractional step 法を用いた計算法を採用した。計算には差分法を用い、水位・流速の振動を抑えるために図-2 に示すように水位 (ζ)

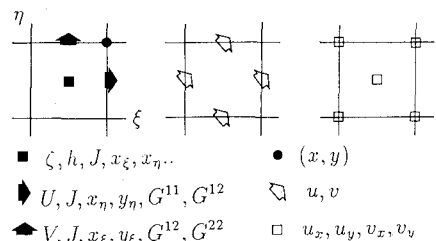


図-2 変数の配置

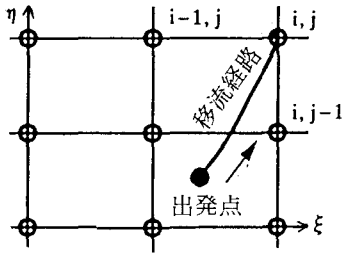


図-3 逆伝播図

と反変流速 (U, V) をスタッガードに配置した。また、各ステップで使用した中間値 (u, v, u_x, u_y) の配置および式 (6) を満足するように考慮した計量メトリックの配置を示す。

各ステップの計算方法について以下に述べる。

(1) 移流ステップの計算法

移流ステップでは、(u, v) 系の式がデカルト座標系の場合とそれと同形であることより、次式を解いて (U, V) 定義点の (u, v) を計算した。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial \xi} + V \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial \xi} + V \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

これらの式の解法には、デカルト座標での潮流計算に使用した Casulli ら (1992) に習ってオイラー・ラグランジュ法を用いた。この方法では、図-3 に示すように、1 計算時間ステップ (Δt) 間に (U, V) 定義点に到達する移流経路の出発点の流速値が新しい時刻の値となる。このため、移流経路の計算に用いる積分時間間隔を Δt より小さく採り積分経路が 1 格子を越えないようにすれば計算は無条件に安定となる。また、移流速度と出発点の流速値は周辺点の (U, V) より 1 次補完で与えたが、二次元の場合には通常の 1 次の風上差分に比べ精度が良いことが知られている (Roache, 1992)。移流経路の計算にはオイラー法を用い、出発点の流速値 (U, V) より式 (5) の逆変換を行って新しい時刻の流速値 (u, v) とした。なお、水位が与えられる開境界からは前時間ステップの流速値が移流されるとした。

(2) 拡散ステップの計算法

拡散ステップの計算は、次の付加項の少ない (u, v) 系の変換式を用いて行った。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{A_H}{J} \{ (y_\eta(u_x)_\xi - y_\xi(u_x)_\eta) + (-x_\eta(u_y)_\xi + x_\xi(u_y)_\eta) \} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{A_H}{J} \{ (y_\eta(v_x)_\xi - y_\xi(v_x)_\eta) + (-x_\eta(v_y)_\xi + x_\xi(v_y)_\eta) \} \quad \dots\dots\dots (16)$$

この計算は通常の陽解法を用い、式 (15)、式 (16) の右

辺の計算を、図-2 に示した点で u_x, u_y, v_x, v_y を求めた後行い、(U, V) 定義点の (u, v) を求めた。

(3) 伝播ステップの計算法

伝播ステップの計算は安定性を考慮して次のスタッガード配置に適する (U, V) 系の連続式と運動方程式を用いて行った。

$$J \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(JHU)}{\partial \xi} + \frac{\partial(JHV)}{\partial \eta} = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + g \left\{ g^{11} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + g^{12} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right\} + \frac{gn^2 w}{H^{4/3}} \frac{U}{J} = 0 \quad \dots (18)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \left\{ g^{12} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + g^{22} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right\} + \frac{gn^2 w}{H^{4/3}} \frac{V}{J} = 0 \quad \dots (19)$$

計算は、佐藤ら (1993) の方法と同様に、これらの式から得られる水位 (ζ) のみの方程式を解いて水位を求めた後、式 (18)、式 (19) に代入して新しい時刻の (U, V) を求めた。水位を求める際に、式 (18)、式 (19) 中の g^{12} の掛かる水位勾配項からデカルト座標での計算には無い交互微分の付加項が発生するが、これらの項は既知として Iterative ADI 法で解き、この操作を繰り返して ζ の収束解を求める方法を使った。 g^{12} 項は非直交性の度合を示すもので、 g^{11}, g^{22} に比べて小さく数回の繰り返し計算処理で収束解を得た。境界条件の取り扱いはデカルト座標の場合と同様であるが、 g^{12} の掛かる水位勾配項で計算領域外の水位が必要な場合は 1 つ内側の計算領域の値を与えた。なお、既知量の (U, V) は移流・拡散過程後の

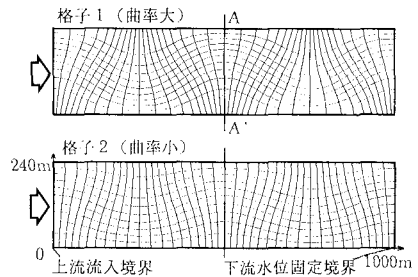


図-4 モデル形状の格子図

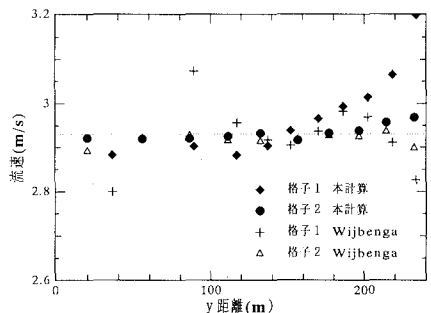


図-5 モデル形状での計算結果

(u, v) から式4の変換式より求められる。

4. 適用性の検討

(1) モデル形状での検討

Wijbenga (1985) のモデル計算と同様な計算を行い、本計算法の適用性を調べた。図-4に示すモデル水路の流れを2種類の格子を用いて計算し、計算の安定性、精度を調べた。境界条件は上流側で流速=2.93 m/s, 下流側で水深=5.0 mを与え、水路の海底勾配, シェジ-係数は 10^{-1} , $41.42 \text{ m}^{-0.5}/\text{s}$ である。図-5は図-4に示す水路中央部(A-A')断面の流速縦断分布をWijbenga (1985)の結果とシェジ-則より得られる解析解と共に示したものである。定常状態における計算結果を本計算では $\Delta t = 20 \text{ s}$ を用いたが、非常に大きな値(クーラント数は約11)に関わらず計算は安定でほぼ1時間の期間で定常解が得られた。この図より、曲率の大きい格子2では解析解の周辺で幾分変動しているもののWijbenga (1985)と同程度以上の計算精度を有しており安定性の面で優れた方法であることが確認される。しかし、曲率の大きい格子では曲率の小さな格子の結果に比べ流速分布の計算精度が著しく悪くなっており、計算精度は格子の滑らかさに依存することが分かる。計算精度を維持するための格子形成法とともに格子形状の影響を軽減するようさらに改良すべき点があることが分かった。

(2) 実海域への適用例

最後に、東京湾を対象とした潮流計算を実施し、デカルト座標系の計算結果と比較し計算モデルの適用性について検討した。計算領域、計算条件等は、佐藤ら(1993)によるデカルト座標系での東京湾の M_2 潮の3次元潮流シミュレーションを参考に定めた。図-6に物理空間・計算空間の格子図を示す。

格子形成は、非常に単純な代数的補間法を用いて行った。計算領域を富津岬と勝力岬を結ぶ境界により2プロ

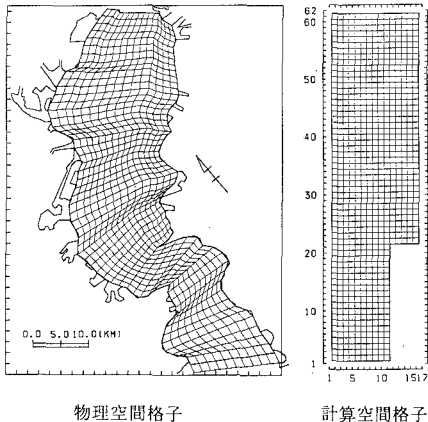


図-6 物理空間・計算空間の格子図

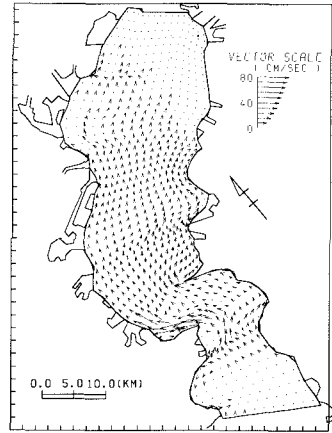


図-7 上げ潮最強時の流速分布：一般曲線座標

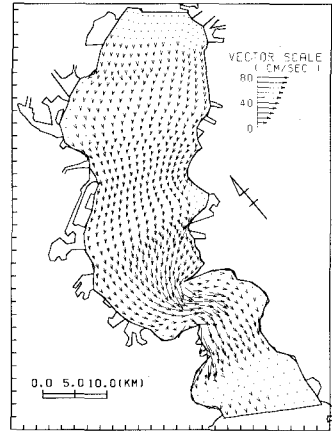


図-8 下げ潮最強時の流速分布：一般曲線座標

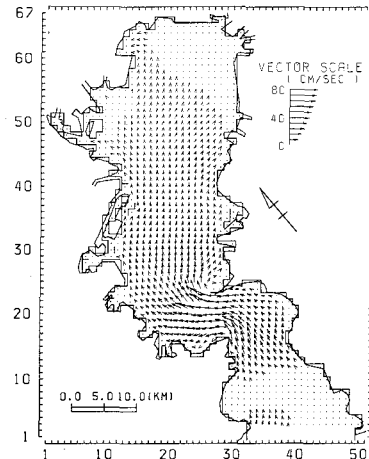


図-9 上げ潮最強時の流速分布：デカルト座標

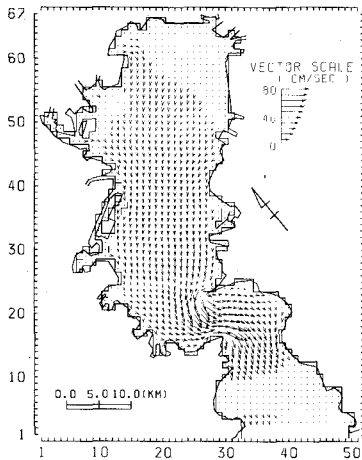


図-10 下げ潮最強時の流速分布：デカルト座標

ックに分け、各ブロックの各辺にまづ等間隔で格子点を生成した後、これら点より Coons 補間法を用いてブロック内を補間して格子を形成し（富士総合研究所，1993），最後に2つのブロックを接続した。境界条件は振幅36 cmを与え，風応力，淡水流入量は無視した。マニングの粗度係数 n ，時間ステップ間隔 Δt はそれぞれ0.028, 600 sを用いた。図-7，図-8に上げ・下げ潮最強時の流速の計算結果を示す。また，同様の計算条件で行ったデカルト座標系の上げ・下げ潮最強時の計算結果を図-9，図-10に示す。これらの図より，BFC法を用いた計算は，従来のデカルト座標系に比べて少ない格子数でも流況パターンが概ね再現されていることが分かる。しかし，格子方向が急変する部分では流向が格子と同方向に変化しており，格子形状への依存性が大きいことが分かる。この傾向は上げ潮時に強く見られる。この点は，運動方程式の変換式を保存形で扱う，格子形状への依存性が少ないと指摘されている反変物理流速を流速変数に使用する等により，ある程度改善が見られるものと期待される。

5. おわりに

本研究で得られた結論は以下の通りである。

(1) 一般曲線座標系での潮流計算法として fractional step法を用いた計算法を開発した。この方法により，各ステップで従来のデカルト座標系スタガード配置の計算方法が有効利用でき，BFC法独特の付加項の取り扱いを最小限に留めることができた。

(2) モデル形状での試算結果より，従来のBFC法と比べ安定性の面で優れた方法であること，格子がある程度滑らかであれば計算精度も問題ないことが確認され

た。しかし，計算精度は格子の滑らかさに依存するため計算精度を改善する格子形成方法が今後の課題となった。

(3) 東京湾を対象とした試算結果より，従来のデカルト座標系に比べて少ない格子数でも現地で見られる流況パターンが概ね再現されており，本計算法の適用性が確認された。しかし，一部格子形状に影響されている部分もあり，今後は格子形状にあまり依存しない計算法の開発が必要であることが分かった。

参考文献

- 越塚誠一・岡 芳明・近藤駿介 (1990): リーマン幾何学を用いた非圧縮性流れのための境界適合座標法，日本原子力学会誌，Vol. 32, No. 8, pp. 819-833.
- 後藤智明・首藤伸夫 (1981): 河川津波のそ上計算，第28回海岸工学講演会論文集，pp. 64-68.
- 佐藤勝弘・松岡道男・小林一光 (1993): 効率的な3次元潮流計算法とその適用性について，第40回海岸工学論文集，pp. 221-225.
- 富士総合研究所編 (1993): 汎用流体解析システム-FUJI-RIC/ α -FLOW-1，丸善，p. 446.
- 保原 充・大宮司久明編 (1992): 数値流体力学，東京大学出版会，p. 635.
- Borthwick A. G. L. and R. W. Barber (1992): River and reservoir flow modeling using transformed shallow water equations, Int. J. Numer. Methods Fluids, Vol. 14, pp. 1193-1217.
- Blumberg A. F. and H. J. Herring (1987): Circulation modeling using orthogonal curvilinear coordinates, Three Dimensional Model of Marine and Estuarine Dynamics, J. C. J. Nihoul and B. M. Jamart, eds., Elsevier, pp. 55-88.
- Casulli V. and R. T. Cheng (1992): Semi-implicit finite difference methods for three-dimensional shallow water flow, Int. J. Numer. Methods Fluids, Vol. 15, pp. 629-648.
- Häuser J., H. G. Paap, D. Eppel and A. Müeller (1985): Solution of shallow water equations for complex flow domains via boundary-fitted coordinates, Int. J. Numer. Methods Fluids, Vol. 5, pp. 727-744.
- Johnson B. H. (1982): Numerical modeling of estuarine hydrodynamics on a boundary-fitted coordinate system, Numerical Grid Generation, J. Thompson, ed., Elsevier, pp. 409-436.
- Johnson B. H., K. W. Kim, Y. P. Sheng and R. E. Health (1989): Development of a three-dimensional hydrodynamic model of Chesapeake Bay, Proc. Estuarine and Coastal Modeling, ASCE, pp. 162-171.
- Roache P. J. (1992): A flux-based modified method of characteristics, Int. J. Numer. Methods Fluids, Vol. 15, pp. 1259-1275.
- Wang P. F. (1992): Review of equation of conservation in curvilinear coordinates, J. Eng. Mech., ASCE, Vol. 118, No. 11, pp. 2265-2281.
- Wijbenga J. H. A. (1985): Determination of flow patterns in river with curvilinear coordinates, 21th IAHR Congress, Melbourne, Vol. 2, pp. 131-138.