

有限な区間に来襲する波高の最大値の確率分布

木村 晃*・太田 隆夫**

1. はじめに

現地波浪の波高の確率特性は Rayleigh 分布で精度よく近似できることは広く知られているが、これは‘一点’で計測された波高の確率分布であることに注意しなければならない。3次元不規則波浪場にある、ある程度以上の規模を持つ構造物、例えば防波堤、船舶などではそれに沿う波高は場所的に変化する。しかも、大きな構造物の場合、大きな波がどの部分に作用しようとも、“大きな波が作用した”ものと判定される。一方、波高計は空間的な波形のピークの値を記録する訳ではなく、設置位置における水面の変動を記録しているにすぎない(図-1)。このように構造物の大きさの範囲の中で大きな波が選択的に認識される場合には、波高の確率分布は構造物の規模に応じて変化する。これを考慮しなければ設計波浪が過小に見積もられる可能性がある。この研究は多方向不規則波浪場に設置した仮想平面に沿って観測される波高の、有限区間内での最大値の確率特性について理論的な検討を行ったもので、それが Rayleigh 分布と大きく異なることを明らかにしたものである。

2. 波数スペクトル

方向分散特性をもつ不規則波の水面形を次式のように与える。

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(K_n x + 2\pi f_n t + \varepsilon_n) \dots\dots\dots (1)$$

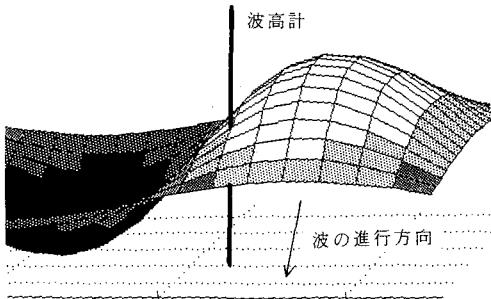


図-1 多方向不規則波の波形と波高計

ここに C_n, K_n, f_n および ε_n はそれぞれ第 n 成分波の振幅、波数、周波数、位相角である。波数 K の x, y 方向成分を K_x, K_y とし、波数スペクトル $E(K_x, K_y)$ を次式で定義する。

$$E(K_x, K_y) = C_0 / 2\pi K \cdot E(f, \theta) \dots\dots\dots (2)$$

ここに C_0 は周波数 f あるいは波数 K に対応する群速度、 $E(f, \theta)$ は通常用いられる周波数表示された方向スペクトルである。卓越波向き方向を x 軸方向とし、静水面上にとった x, y 軸を原点を中心にして θ だけ反時計まわりに回転させた座標軸を x', y' とすると新しい座標系での波数成分はそれぞれ次式で与えられる。

$$K'_x = K_x \cos \theta + K_y \sin \theta$$

$$K'_y = -K_x \sin \theta + K_y \cos \theta \dots\dots\dots (3)$$

簡単のために K_x, K'_x を u, u' 、 K_y, K'_y を v, v' とおくと新しい座標系での不規則波の水面形は次のように表される。

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(u'_n x' + v'_n y' + 2\pi f_n t + \varepsilon_n) \dots\dots (4)$$

ここに

$$\sum_{u,v}^{u+du, v+dv} C_n^2 / 2 = E(u, v) du dv \dots\dots\dots (5)$$

である。いま、仮想的な平面 H を x', y' 平面に垂直で x' 軸に沿ってたてると、 H 上の時刻 $t=0$ における水面形は(4)式において $t=0, y'=0$ とおいて

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(u'_n x' + \varepsilon_n) \dots\dots\dots (6)$$

で与えられる。(6)式で与えられる水面形の波数スペクトルは $E(u, v)$ を y' に沿う波数 v' に関して積分して、

$$E_0(u') du' = \sum_{u,v} C_n^2 / 2 = du' \int_{-\infty}^{\infty} E(u, v) dv' \dots (7)$$

のように与えられる。 $\theta=90^\circ$ の場合、波数スペクトルはピークを中心に左右対称となるが、この対称性は θ の角度が 90° から多少ずれても比較的保たれる。

3. 有限な区間内での包絡線の最大値

いま図-2に示すA点に波高計が設置されており、水面変動を観測しているものとする。図中で x' は平面 H 上の静水面と一致するように引かれた座標軸、実線は H 平

* 正会員 工博 鳥取大学教授 工学部社会開発システム工学科
 ** 正会員 工修 鳥取大学助手 工学部社会開発システム工学科

面上の ξ に対する包絡線 $R(x)$ である (包絡線の定義は Rice のものを用いる). 比較的広帯域スペクトルであっても十分な精度で ξ の極大値は同じ点の $R(x)$ でほぼ近似できる (Kimura・Ohta, 1992). したがってここでも ξ の極大値のかわりに同じ点の包絡線の振幅を用いる.

A 点を中心として $\pm \Delta L$ の範囲内での $R(x)$ の最大値を次の手順で求める. すなわち, 時間を固定 ($t=0$) した場合の $R(x)$ を $x'=0$ (A 点) まわりに展開すると

$$R(x) = R(0) + R'(0)x' + R''(0)x'^2/2 + \dots \quad (8)$$

となる. ここに $R(0)$, $R'(0)$ および $R''(0)$ は $x'=0$ における R およびその 1 次と 2 次の導関数の値である. x' の値が小さいとして $R(x)$ を上式の第 3 項までで近似すると, 区間 $\pm \Delta L$ の範囲内での $R(x)$ の最大値 R_m と $R(0)$ の差を ΔR とすれば,

$|R'(0)/R''(0)| \leq \Delta L$ の場合:

$$\Delta R = -\{R'(0)\}^2/2R''(0) \quad (9)$$

$|R'(0)/R''(0)| > \Delta L$ の場合:

$$R(0) \geq 0$$

$$\Delta R = R'(0)\Delta L + R''(0)(\Delta L)^2/2$$

$$R(0) < 0$$

$$\Delta R = -R'(0)\Delta L + R''(0)(\Delta L)^2/2 \quad (10)$$

となる. (10) 式より, 図-2 の波高計設置点 ($x'=0$) を中心とした有限な範囲内 ($-\Delta L \leq x' \leq +\Delta L$) で $R_m - R(0)$ の値が $\Delta R \sim \Delta R + dR$ の範囲に入る領域を示すと図-3 のようになる. いまこの領域を S とすれば ΔR の確率分布は次式で求めることができる.

$$P(\Delta R)_R = \int_S P[R(0), R'(0); R(0)] dS \quad (11)$$

ここに $P[R(0), R'(0); R(0)]$ は $R(0)$ なる条件下での $R'(0)$ と $R''(0)$ の結合確率分布である. さらに, $-\Delta L \leq x' \leq +\Delta L$ の範囲内での R_m の確率分布は

$$P_m(R) = \int_R^\infty P(\Delta R)_R P[R(0)] dR(0) \quad (12)$$

で求めることができる. (11) と (12) 式をまとめると

$$P_m(R) = \int_R^\infty \int_S P[R(0), R'(0), R''(0)] dS dR(0) \quad (13)$$

となり, 有限な区間内での $P_m(R)$ を求めるためには $R(0)$, $R'(0)$ および $R''(0)$ の結合分布を積分すればよい.

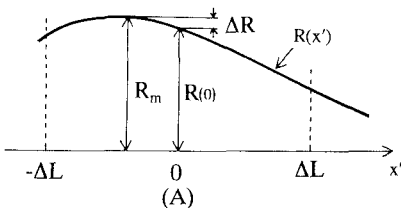


図-2 $\pm \Delta L$ の範囲内における $R(x)$ の最大値

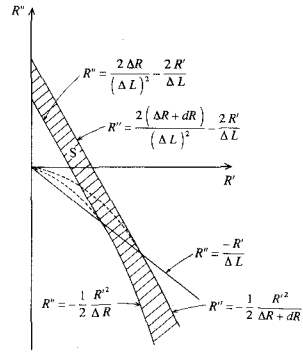


図-3 積分領域 (式 (13))

(簡単のために以後 $R(0)$, $R'(0)$ および $R''(0)$ をそれぞれ R , R' および R'' と表す.)

4. R, R', R'' の結合分布

Rice (1945) にならって $p(R, R', R'')$ を導くと次のようになる.

$$p(R, R', R'') = \frac{R^3}{8\pi^3 B} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' \int_{-\infty}^{\infty} d\phi'' \times \exp\left\{-\frac{1}{2B^2} [B_0 R^2 + 2B_1 R^2 \phi' - 2B_2 (RR' - R^2 \phi'^2) + B_{22} (R^2 + R^2 \phi'^2) - 2B_3 (RR' \phi' - 2R^2 \phi' - R'R\phi'' - R^2 \phi'^3) + B_4 (R'^2 - 2RR' \phi'^2 + 4R^2 \phi'^2 + 4RR' \phi' \phi'' + R^2 \phi'^4 + R^2 \phi''^2)]\right\} \quad (14)$$

ここに

$$B = b_0 b_2 b_4 + 2b_1 b_2 b_3 - b_2^3 - b_0 b_3^2 - b_4 b_1^2, \\ B_0 = (b_2 b_4 - b_3^2) B, \quad B_{22} = (b_0 b_4 - b_2^2) B, \\ B_1 = -(b_1 b_4 - b_2 b_3) B, \quad B_2 = (b_1 b_3 - b_2^2) B, \\ B_3 = -(b_0 b_3 - b_1 b_2) B, \quad B_4 = (b_0 b_2 - b_1^2) B \quad (15)$$

である. また, $b_n (n=0, 1, 2, 3, 4)$ は次のように与えられる. すなわち,

$$I_{c1} = R \cos \phi = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(u_n x' - u_m x' + \epsilon_n) \\ I_{s1} = R \sin \phi = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(u_n x' - u_m x' + \epsilon_n) \quad (16)$$

とする. ここに u_m は H 平面上での平均波数である. 以下同様であるので簡単に示すと

$$I_{c2} = (I_{c1})', \quad I_{s2} = (I_{s1})', \quad I_{c3} = (I_{c1})'', \quad I_{s3} = (I_{s1})''$$

のように関数 I_{cn} , I_{sn} ($n=2, 3$) を定義する. ' および '' は x' に関する 1 回および 2 回微分を意味する. これらの関数より $b_n (n=0, 4)$ は

$$b_0 = (I_{c1}^2) = (I_{s1}^2) \\ b_2 = (I_{c2}^2) = (I_{s2}^2)$$

$$b_4 = (I_{c3}^2) = (I_{s3}^2)$$

$$b_1 = (I_{c1}I_{s2}) = (I_{c2}I_{s1})$$

$$b_3 = (I_{s2}I_{c3}) = (I_{c2}I_{s3})$$

のように与えられる。

(14)式の ϕ および ϕ' に関する積分は容易であるが ϕ' に関する積分は困難である。計算を簡単にするために (7)式の $E_\theta(u')$ がピークに関して対称であるとする。この仮定は $\theta = 90^\circ$ の場合には厳密に成立し、 θ が 90° から若干ずれてもほぼ成立する。この仮定より

$$p(R, R', R'') = 2\alpha \int_0^\infty \exp\{-\beta\phi^4 - \gamma\phi^2\} d\phi$$

$$\alpha = \frac{R^2}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{B_4}}$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2B^2}(B_0R^2 - 2B_2RR' + B_{22}R'^2 + B_4R''^2)\right\}$$

$$\beta = B_4R^2/2B^2$$

$$\gamma = (B_{22}R^2 - 2B_4RR' + 2B_2R'^2)/(2B^2) \dots \dots \dots (17)$$

となる。Rice (1945) は上式の解析解を得ているが複雑であるのでここでは数値計算によった。

5. 区間最大振幅の確率分布

式 (13) の計算を実施すると任意の区間内での不規則波の振幅の確率分布の値を求めることが出来る。以下、具体的なスペクトルの例を与えて $P_m(R)$ を計算する。ここで計算に用いたスペクトルは次に示す Bretschneider-光易型である。

$$S(f) = 0.257 H_{1/3}^2 T_{1/3} (T_{1/3} f)^{-5} \cdot \exp[-1.03(T_{1/3} f)^4] \dots \dots \dots (18)$$

$H_{1/3}$, $T_{1/3}$ はそれぞれ 5.5 m, 10 s とした。また方向分布関数は次の合田・鈴木 (1975) の式を用いた。

$$E(f; \theta) = E_0 \cos^{2s}(\theta/2) \dots \dots \dots (19)$$

ここに

$$E_0 = 2^{2s-1} \Gamma^2(S+1) / [\pi \Gamma(2S+1)] \dots \dots \dots (20)$$

であり S は次式で与える。

$$S = \begin{cases} S_{max} \cdot (f/f_p)^5 & : f \leq f_p \\ S_{max} \cdot (f/f_p)^{-2.5} & : f > f_p \end{cases} \dots \dots \dots (21)$$

ただし f_p は $S(f)$ のピーク周波数である。 S_{max} は十分発達した風波の場合、10 程度の値が推奨されているのでここでもその値を採用した。 $S_{max} = 10$ と有義波の条件から計算した深海域での包絡線振幅の rms 値は 1.35 (m) となる。 ΔL の値はあまり大きくすると式 (8) による近似の精度が悪くなるのでここでは $\Delta L \leq L_{1/3}/10$ とした。この程度であれば S_{max} が 10 程度の比較的小さい場合でも式 (8) による誤差は数 cm 以下である。

図-4 は式 (11) の $P(\Delta R)_R$ の計算結果の一例を示したもので $h/L_{1/3} = 1.0$, $S_{max} = 10$ の波で $\Delta L = 0.05 L_{1/3}$ の場

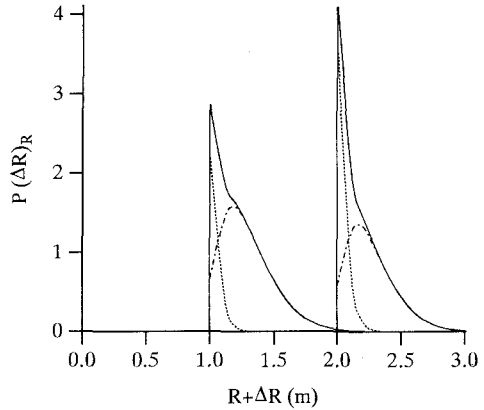


図-4 $R=1.0$ および 2.0 の場合の $P(\Delta R)_R$ の分布形状 ($S_{max}=10$, $\Delta L=0.05L_{1/3}$)

合の $R=1.0$ と 2.0 の場合の結果を示したものである。ただし横軸は見やすいように $R+\Delta R$ として示した。図中で点線は、最大値が $-\Delta L \leq x' \leq \Delta L$ の範囲内に極大値が現れる場合の最大値の分布(式(9))、一点鎖線は最大値が $x' = \pm \Delta L$ に現れる場合の最大値の分布(式(10))であり、実線は両者を加え合わせたものである。図から R が 2.0 の場合の方が式(9)の寄与分が大きいたことがわかる。すなわち R が大きな方が指定された区間内に R の極大値が現れる確率が大きくなる。

図-5 は $P_m(R)$ の分布の計算結果(●印)の1例を示したもので (a) は $h/L_{1/3} = 1.0$, $S_{max} = 10$, (b) は $h/L_{1/3} = 1.0$, $S_{max} = 20$, (c) は $h/L_{1/3} = 0.25$, $S_{max} = 10$, (d) は $h/L_{1/3} = 0.25$, $S_{max} = 20$ の場合にそれぞれ ΔL を $0.050 L_{1/3}$ および $0.1 L_{1/3}$ とした結果を示したものである。図には $\Delta L = 0$ とした場合の Rayleigh 分布式(実線)も併せて示した。図からもわかるように ΔL の増加にとともに $P_m(R)$ がしだいに R の大きな方にシフトするとともに左右が幾分対称な分布形状を持つようになる。図-5には Weibull 分布による $P_m(R)$ の近似を検討した結果を点線であわせて示した。Weibull 分布の形状母数は確率紙を用いて決定した。図からもわかるように Weibull 分布との対応はいずれの場合にも良好である。

図-6 は図-5 (a) のケースの ΔL に対する $P_m(R)$ の rms 値の変化を示したもので、 ΔL の増加に伴い rms 値が増加する。図-7 は図-5 (a) のケースにおける ΔL と Weibull 分布の形状母数との対応を示したもので、 $m=2$ の場合が Rayleigh 分布である。図からもわかるように ΔL の増加にとともに m の値が緩やかな S 字を描いて増加し $\Delta L = 0.075 L_{1/3}$ 付近で約 2.5~2.6 程度の一定値を取るようになる。図-5 (b), (c) および (d) のケースのそれぞれの rms 値、形状母数とも図-6, 7 とほとんど同じ結果が得られた。図-8 は水深と S_{max} の値を変化させた

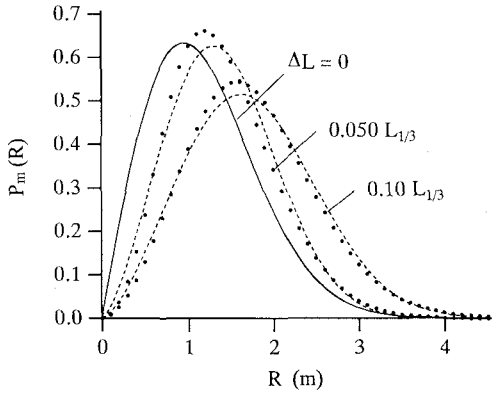


図-5 (a) $P_m(R)$ の形状 (●印) : ($S_{max}=10, h/L_{1/3}=1.0, \Delta L=0.050L_{1/3}, 0.1L_{1/3}$)

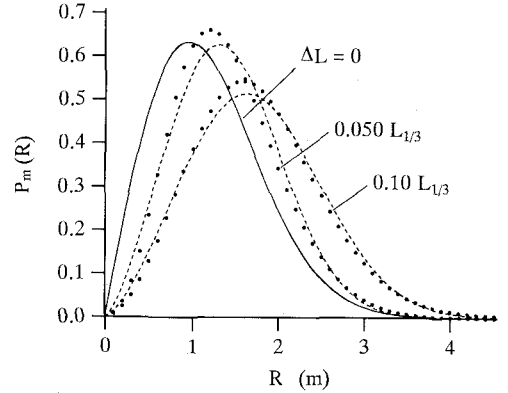


図-5 (c) $P_m(R)$ の形状 (●印) : ($S_{max}=10, h/L_{1/3}=0.25, \Delta L=0.05L_{1/3}, 0.1L_{1/3}$)

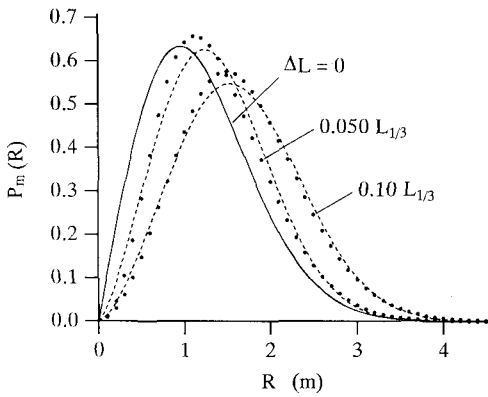


図-5 (b) $P_m(R)$ の形状 (●印) : ($S_{max}=20, h/L_{1/3}=1.0, \Delta L=0.05L_{1/3}, 0.1L_{1/3}$)

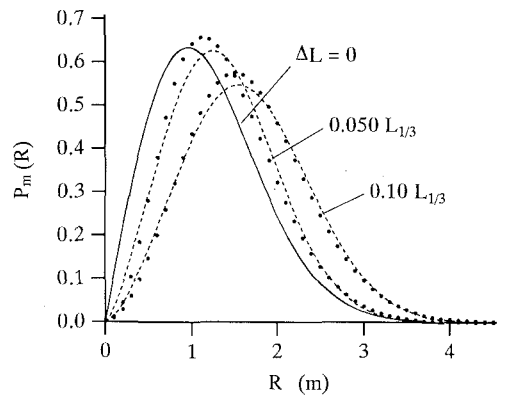


図-5 (d) $P_m(R)$ の形状 (●印) : ($S_{max}=20, h/L_{1/3}=0.25, \Delta L=0.05L_{1/3}, 0.1L_{1/3}$)

場合の $P_m(R)$ を検討したものである (ΔL は $0.1L_{1/3}$)。水深の減少による S_{max} の値の変化は合田らの研究を参考にして $h/L_{1/3}=0.25$ および 0.1 の値をそれぞれ $15, 25$ と近似した。この水深と S_{max} の組み合わせは $S_{max}=10$ の不規則波が平行等深線に直角に入射した場合の S_{max} の変化におおむね等しい。一方十分発達した不規則波では有義波の波形勾配は $0.035 \sim 0.040$ 程度であり、波形勾配がこの程度の場合 Shooaling による波高変化はほぼ無視できるので $S(f)$ としては水深に関わりなく式(18) [$H_{1/3}=5.5 \text{ m}, T_{1/3}=10 \text{ s}$] を用いた。

図-5に示すように $P_m(R)$ とそれを近似した Weibull 分布との対応は分布の主要部では良好であるが、とくに R の値の大きな部分で Weibull 分布と異なる傾向を示す。すなわち図-9は図-8の分布の $h/L_{1/3}=0.1, S_{max}=25$ で $\Delta L=0.1L_{1/3}$ のケースの $R > 3.8$ の部分を拡大したもので、●印が $P_m(R)$ 、点線が $P_m(R)$ を近似した Weibull 分布、実線が $\Delta L=0$ とした場合の Rayleigh 分布である。

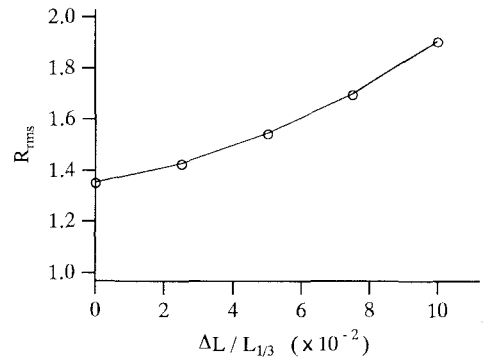


図-6 R_{rms} と $\Delta L/L_{1/3}$ の関係

図から $P_m(R)$ は Rayleigh 分布が与える確率より非常に大きく、波高の大きな波の発生確率が増加していることがわかる。さらにこの特徴は Weibull 分布でも十分近似できないこともわかる。

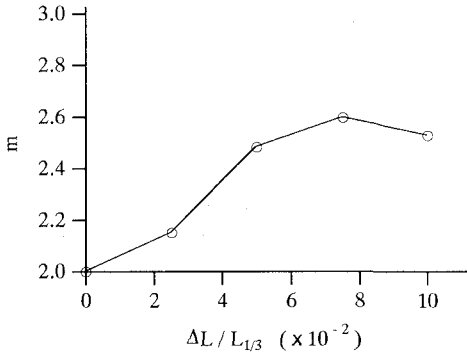


図-7 Weibull 分布の形状母数と $\Delta L/L_{1/3}$ の関係

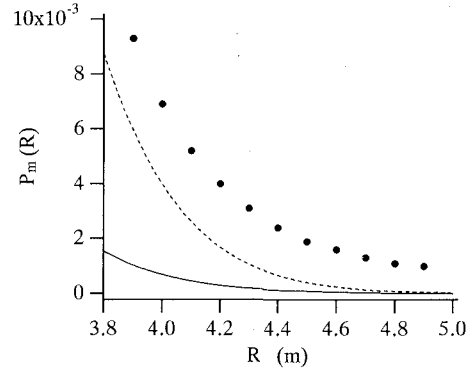


図-9 R の大きな部分における $P_m(R)$ の拡大図
($h/L_{1/3}=0.1, S_{max}=25, \Delta L=0.1L_{1/3}$)

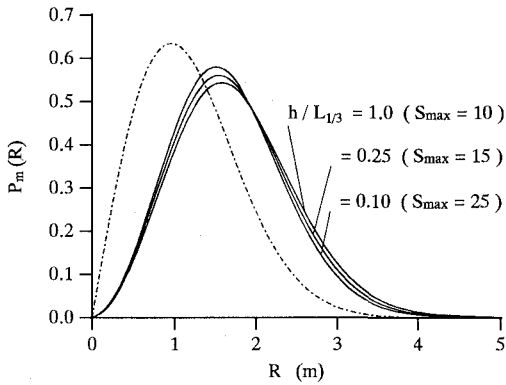


図-8 水深の変化にともなう $P_m(R)$ の変化
($\Delta L=0.1L_{1/3}$)

6. おわりに

この研究は多方向不規則波浪場に設置した仮想平面に沿って観測される波高の、有限区間内での最大値の確率特性について理論的な検討を行ったものである。本研究

の結果より、区間幅内の波高の最大値を選択的に選んだ場合、波高の確率分布は形状母数が 2.0 (Rayleigh 分布) より大きな Weibull 分布と対応し、その値は平均値 (rms 値) などとともに区間の幅の増加にともなって大きくなる。また、分布の非常に大きい部分での波高の出現確率は一点観測で求められる Rayleigh 分布から計算される確率値よりかなり大きな値が得られた。したがって一定以上の幅を有する構造物に作用する多方向不規則波浪場で波高の出現確率を決定する際、Rayleigh 分布を用いることは危険である。

参考文献

- 合田良実・鈴木康正 (1975): 光易型方向スペクトルによる不規則波の屈折・回折計算, 港湾技研資料, No. 230, 45 p.
 Kimura, A. and T. Ohta (1992): On probability distribution of the zero-crossing irregular wave height, Proc. 6th IAHR Symposium on Stochastic Hydraulics, pp. 291-298.
 Rice, S. O. (1945): たとえば宮脇一男訳, 雑音理論, 電気書院 (1955), 205 p.