

Wavelet 変換を用いた実海岸の波群の解析とその再生

小林 智 尚*・高 橋 智 彦**

1. はじめに

実海岸の持つ波群性の特徴を明らかにすることは、海岸構造物への波力の算定など、海岸工学上非常に重要な問題である。しかし、この波群は非定常で不規則な現象であるために、現在でも GF (Groupiness Factor) などの統計量のみで議論されることが多かった。

近年新たに Wavelet 解析法が開発され、利用されつつある。この解析法はさまざまな時間スケールの変動を時系列的に解析できる手法である。

本研究では時系列的に現象を解析できるこの Wavelet 解析法を用いて実海岸での波群を解析し、その特徴を明らかにする。さらに明らかにされた特徴を再現するように、逆 Wavelet 変換を用いて波群性を有する波浪の再現を試みる。

2. 現地波浪の解析

現地波浪に見られる波群性の特徴を得るためにここでは Wavelet 変換を用いる。Wavelet 変換は現象中に含まれる様々な時間スケールの変動を分解しそれぞれのスケールでの時間変動を得ることができるので、現地波浪の波群のような非線形で不規則な現象の解析には極めて有効な手法である。ここでは Wavelet 変換について述べ、現地での観測結果を Wavelet 変換を用いて解析する。

(1) Wavelet 変換

Wavelet 変換は 80 年代初めに開発された手法であるが、その有用性から短期間のうちに数学的に整理され、現在では様々な分野での適用が試みられている。しかしフーリエ変換などの他のデータ解析手法と比べるとその定義などはまだ完全には統一されていない。ここでは Farge (1992) の定義にしたがって Wavelet 解析を行う。

水位変動や圧力変動などの時系列データ $\eta(t)$ に対する Wavelet 変換は次式のように表される。

$$\bar{f}(l, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t) \phi_{li}^*(t) dt \dots\dots\dots (1)$$

ここで $\bar{f}(l, t)$ はスケール l 、時刻 t における Wavelet

係数である。また * は共役複素数を示す。 $\phi_{li}^*(t)$ は次式で定義される Wavelet である。

$$\phi_{li}^*(t) = \frac{1}{\sqrt{l}} \psi\left(\frac{t-t'}{l}\right) \dots\dots\dots (2)$$

ここで $\psi(t)$ は Mother Wavelet である。Mother Wavelet には Mayer Wavelet などさまざまなあるが、本研究では次式で定義される Morlet Wavelet を用いた。

$$\psi(t) = \exp(ik_{\phi}t) \exp\left(-\frac{|t|^2}{2}\right) \dots\dots\dots (3)$$

ここで i は虚数単位である。また k_{ϕ} は Morlet Wavelet の包絡線中に含まれる波の数を示す。本研究ではこの k_{ϕ} を 6 とした。図-1 にはこの Morlet Wavelet を示す。

Mayer Wavelet は数学的に厳密な直交性を有した完全な Mother Wavelet である。しかしこの Mayer Wavelet は t 軸方向の取束性が悪いために実際には使いづらく、また実数型の Mother Wavelet であるために後に用いる逆 Wavelet 変換には適していない。これに対して Morlet Wavelet は図-1 からわかるように、 t 軸方向の取束性が良く、複素数型の Mother Wavelet であるので逆 Wavelet 変換にも適している。また直交性についても数学的に厳密ではないが k_{ϕ} が 6 以上では実用上ほぼ直交とみなすことができる。以上の理由から本研究では $k_{\phi}=6$ の Morlet Wavelet を用いた。

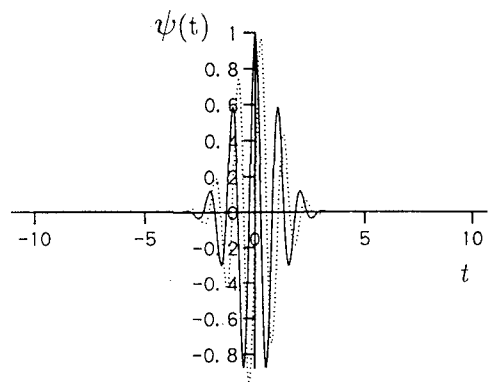


図-1 Morlet Wavelet ($k_{\phi}=6$, 実線：実数部, 点線：虚数部)

* 正会員 工修 東京理科大学助手 理工学部土木工学科
** 東京理科大学大学院 理工学研究科土木工学専攻

(2) 現地波浪の解析

先に述べた Wavelet 変換を用いて現地波浪を解析しその特徴を調べる。本研究で対象とした現地観測データは、台風 9121 号が沖縄県に来襲した 1991 年 10 月 8 日に沖縄県具志頭村港川漁港の水深 25 m の地点において仲座らによって圧力式波高計で観測されたものである。観測された現地波浪の有義波高 $H_{1/3}$ と有義波周期 $T_{1/3}$ はそれぞれ 2.09 m, 10.8 s であった。観測された圧力変動の一部を図-2 の上段に示す。この観測信号には強い波群性が見られる。この圧力変動の観測データを Wavelet 変換により解析した結果を図-2 下段に示す。この図-2 下段では圧力変動の特徴の時間変動をより明確にするために Wavelet 変換によって得られた Wavelet 係数 $\bar{f}(l, t)$ そのものではなく、この Wavelet 係数 $\bar{f}(l, t)$ の絶対値の自乗 $|\bar{f}(l, t)|^2$ を、この $|\bar{f}(l, t)|^2$ の各時間スケールごとの平均値 $\bar{f}^2(l)$ で標準化した値の対数を示している。この図の横軸は上段に示された圧力変動の時系列データの時間軸に対応している。

図-2 では観測された圧力変動を水位変動に変換せず、圧力信号そのものを用いて Wavelet 解析を行っている。圧力変動を水位変動に変換するにはフーリエ変換・逆変換を用いなければならない。これらの変換により観測データの時間軸情報が多少なりとも失われる危険性がある。本研究では特にこの時間軸上の情報に着目しているため、あえて観測された圧力信号をそのまま用いた。この場合フーリエ解析では各周波数のスペクトルの値が、また Wavelet 解析では各時間スケールの Wavelet 係数の絶対値が水位変動の解析結果とは異なる。しかし図-2 下段ではこの Wavelet 係数の変動を各時間スケールごとに正規化しているために圧力変動から水位変動への変換の影響を考慮することなくこの圧力変動と水位変動を同一視して解析を進めることができる。

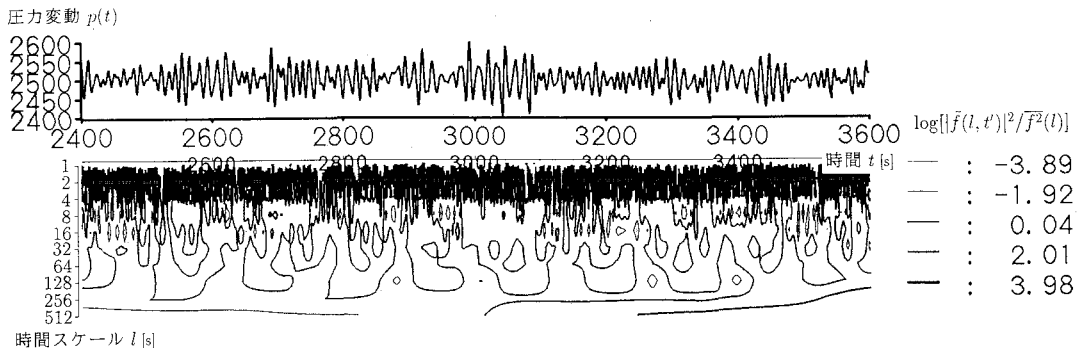
ここでフーリエ変換の周波数 f と Wavelet 変換の時間スケール l との関係について述べる。これらのデータ処理手法は独立であるために本来であれば対応させるべき

表-1 各時間スケールの変動間の相関

l	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
1	1.00	-0.30	-0.19	-0.14	-0.12	-0.07	-0.04	-0.02	-0.01	-0.01
2	.	1.00	0.84	0.61	0.47	0.32	0.23	0.16	0.11	0.08
4	.	.	1.00	0.87	0.70	0.49	0.35	0.24	0.17	0.12
8	.	.	.	1.00	0.90	0.68	0.49	0.34	0.24	0.17
16	1.00	0.87	0.65	0.47	0.33	0.23
32	1.00	0.89	0.68	0.48	0.33
64	1.00	0.89	0.67	0.47
128	1.00	0.88	0.66
256	1.00	0.88
512	1.00

きではない。しかし現象の解釈をより容易にさせるためにここではあえてこれらのパラメータの対応を求めた。この対応は後に示す式 (14) から、フーリエ解析の周波数 f は Wavelet 解析での $k_0/2\pi l$ にほぼ対応していることが導かれる。これより図-2 上段に示された現地波浪の有義波周期 $T_{1/3}=10.8$ s に対応した Wavelet 解析の時間スケール l はほぼ 10.3 である。図-2 下段ではこの有義波周期に対応する時間スケールだけではなく、すべての時間スケールの成分が時間毎に大きく変動している様子がわかる。この変動の様子は、近いスケール同士ではその Wavelet 係数が強いところでは強く、また弱いところでは弱くお互いに対応しているようである。そこでそれぞれのスケール間での相関を求めた。その結果を表-1 に示す。この表より、それぞれの時間スケールの変動成分は Wavelet 変換で独立が保証されているにもかかわらず、隣り合った時間スケールの変動成分間で大きな相関が現れている。この結果は本研究で取り扱った現地データが有する波群性の特徴であると考えられる。

現地波浪の波群が、Wavelet 解析において隣り合った時間スケールの Wavelet 係数の変動成分間で大きな相関を示すという特徴を常に示すかについては疑問の点もまだ多く、今後さらに一般的で詳細な検討を行う必要がある。しかし、本研究で扱った現地波浪が有する波群性はこの高い相関に現れているとみなすことができよう。

図-2 圧力変動の時系列 $p(t)$ データ (上) と無次元化された Wavelet 係数 $|\bar{f}(l, t)|^2/\bar{f}^2(l)$ (下)

3. 波群性を有する水位変動の再現

前節において本研究が対象とした現地波浪の波群性の特性が明らかになった。そこで今度は逆 Wavelet 変換を用いてこの現地波浪の特性を有する水位変動の信号の再生を試みる。

(1) 逆 Wavelet 変換

フーリエ解析に逆フーリエ変換が存在するのと同様に、Wavelet 解析においても Wavelet 係数から実信号に変換する逆 Wavelet 変換があるが、Wavelet 変換と同様、まだその定義などが完全には統一・洗練されていない。ここでは Farge (1992) の定義にしたがいがながら、幾つかの不具合を修正して逆 Wavelet 変換を行う。

式 (1) に示された Wavelet 変換に対応する逆 Wavelet 変換は次式のように表される。

$$\eta(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(l, t) \psi_{\tilde{t}}^*(t) \frac{dldt'}{l^2} \dots\dots\dots (4)$$

本研究では Mother Wavelet に複素数型の Morlet Wavelet を用いている。このため、一般には式 (4) で再現される実信号 $\eta(t)$ は複素数になる。しかし実際の水位変動信号は実数のみであるのでここでは式 (4) を次式のように書き換えて用いる。

$$\eta(t) = \Re \left[\frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(l, t) \psi_{\tilde{t}}^*(t) \frac{dldt'}{l^2} \right] \dots\dots\dots (5)$$

式 (4)~(5) 中の C_ψ は Mother Wavelet によって決まる定数で、次式のように表される。

$$C_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(k)|^2 \frac{dk}{|k|} \dots\dots\dots (6)$$

ただし

$$\hat{\psi}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \exp(-ikt) dt \dots\dots\dots (7)$$

また式 (5) の $\Re[\]$ は複素数の実数部を表す。

(2) 周波数スペクトルと Wavelet 係数との対応

前節の現地波浪解析では Wavelet 解析で得られた Wavelet 係数の変動成分についてのみ議論を行っており、その絶対値については何も触れていなかった。そこでここではその Wavelet 係数の絶対値について周波数スペクトルを用いて議論する。フーリエ解析と Wavelet 解析とは異なったデータ解析手法である。したがって実際にはフーリエ解析で得られる周波数スペクトルと Wavelet 解析で得られる Wavelet 係数を比較することは無意味である。しかし、現時点において現地波浪の標準形が周波数スペクトルに対してのみ与えられているので、本研究ではこの周波数スペクトルと Wavelet 係数との対応について議論する必要がある。

ここでは任意の振幅を有する規則波を仮定し、この規則波からスペクトルと Wavelet 係数との対応を導く。こ

こで仮定する規則波は複素数で表される水位変動 $\eta_c(t)$ を有する波である。

$$\eta_c(t) = \frac{C_f}{\sqrt{2}} \exp(i(2\pi ft + \epsilon)) \dots\dots\dots (8)$$

ここで f および ϵ は周波数および初期位相角を示す。また C_f は

$$S(f) \Delta f = \frac{C_f^2}{2} \dots\dots\dots (9)$$

であるとする。ここで $S(f)$ は周波数スペクトル、 Δf は周波数幅を示す。この式 (9) より式 (8) が示す水位変動 $\eta_c(t)$ の規則波は $S(f) \Delta f$ のパワースペクトルを有する。この規則波を Wavelet 変換する。すると $\eta_c(t)$ の Wavelet 係数 $\bar{F}_c(l, t)$ は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \bar{F}_c(l, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \eta_c(t) \psi_{\tilde{t}}^*(t) dt \\ &= \sqrt{\frac{l}{2}} C_f \exp(i(2\pi ft' + \epsilon)) \\ &\quad \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \exp(-i2\pi flx) dx \right)^* \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{l}{2}} C_f \exp(i(2\pi ft' + \epsilon)) 2\pi \hat{\psi}(2\pi fl)^* \dots\dots\dots (11)$$

ここで $\hat{\psi}(2\pi fl)$ は Mother Wavelet が Morlet Wavelet の場合、次式のようになる。

$$\hat{\psi}(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(k-k_\psi)^2}{2}\right) & k > 0 \\ 0 & k \leq 0 \end{cases} \dots\dots\dots (12)$$

したがって Wavelet 係数 $\bar{F}_c(l, t)$ は式 (11)~(12) より

$$\begin{aligned} \bar{F}_c(l, t) &= \sqrt{\frac{l}{2}} C_f \exp(i(2\pi ft' + \epsilon)) (2\pi)^{3/2} \\ &\quad \cdot \exp\left(-\frac{(2\pi fl - k_\psi)^2}{2}\right) \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ただし $2\pi fl > 0$ とする。この式 (13) に式 (9) を代入することにより最終的に求める関係が得られる。

$$\begin{aligned} \bar{F}_c(l, t) &= \sqrt{S(f) \Delta f} (2\pi)^{3/2} \exp\left(-\frac{(2\pi fl - k_\psi)^2}{2}\right) \\ &\quad \cdot \exp(i(2\pi ft' + \epsilon)) \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

以上の解析は式 (8) に示すように単一の規則波を対象として行っているが、実際には不規則波を扱っているので本研究では式 (14) の代わりに次のような多周波数成分を対象とした離散的な式を適用した。

$$\begin{aligned} \bar{F}_c(l, t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sqrt{S(f_j) \Delta f} (2\pi)^{3/2} \exp\left(-\frac{(2\pi f_j l - k_\psi)^2}{2}\right) \\ &\quad \cdot \exp(i(2\pi f_j t' + \epsilon_j)) \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

ここで周波数 f_j は $f_j = j \times \Delta f$ であり、また ϵ_j は周波数 f_j の成分波の初期位相角である。

(3) 逆 Wavelet 変換による不規則波の再現

以上の結果の検証として、周波数スペクトルから Wavelet 係数を算出し、逆 Wavelet 変換を用いて水位変

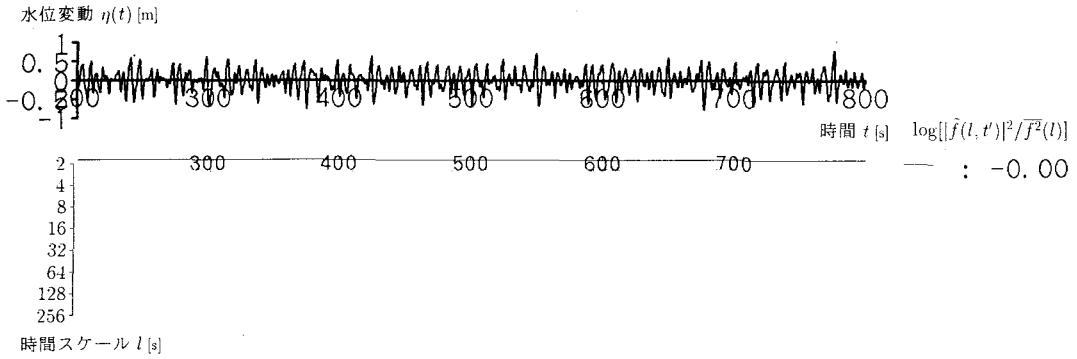


図-3 再現された波群性の無い不規則波信号 η(t)(上)と無次元化された Wavelet 係数 |f̄(l, t)|² / f̄²(l)(下)

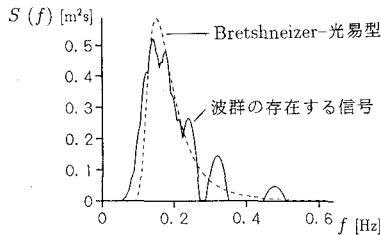


図-4 再現された波群性の無い不規則波信号の周波数スペクトル

動を算出する試みを行う。対象とした周波数スペクトルは有義波高 $H_{1/3}$ 、有義波周期 $T_{1/3}$ がそれぞれ 1.0 m、8.0 s の Bretshneider-光易型スペクトルとした。すなわち、

$$S(f) = 0.257 H_{1/3}^2 T_{1/3} (T_{1/3} f)^{-5} \exp[-1.03 (T_{1/3} f)^{-4}] \dots\dots\dots (16)$$

これまで述べたことから再現された不規則波の水位変動信号を図-3上段に示す。またこの水位変動信号を Wavelet 解析して得られた Wavelet 係数の変動を図-3下段に、フーリエ解析して得られた周波数スペクトルを図-4に示す。図-3下図の各軸の意味は図-2下図と同様である。再現された水位変動信号は図-3上段に示すように不規則波信号であるが、波群性を有していないために図-3下段に示すように Wavelet 係数の変動はほとんど見られず、図中では0の値を示し、等値線は描かれていない。図-4に示された再現された水位変動信号の周波数スペクトルは滑らかではなく、幾つかのリップルが生じている。これは逆 Wavelet 変換に用いたデータの時間スケールが2のべき乗ごとであるためにフーリエ変換の周波数分解能に対しては粗く、特に高周波域についてはこの傾向が顕著に現れてしまったためである。このようにリップルが発生してはいるものの、図-4では、先に述べた方法で再生された信号の周波数スペクトルは点線で示された目的のスペクトルを再現されている。

(4) 波群性の再現方法

これまでで示した方法で逆 Wavelet 変換による不規則波の再現が可能となった。

そこで次に前節で明らかにされた実海岸波浪の特徴を有する波群の再現を行う。前節で明らかにされた波群の特徴は隣り合った時間スケールの Wavelet 係数に高い相関が有るということであった。そこで式(15)に示された Wavelet 係数を基礎とし、この係数に波群の特徴を表す変動を与えてから逆 Wavelet 変換を用いて水位変動信号を再現する。

隣り合った時間スケールの Wavelet 係数間で高い相関を示すように Wavelet 係数に変動を与えるには次に示す方法を用いた。Wavelet 係数に変動を与えるためにそれぞれの時間スケールの Wavelet 係数列に対してある点を中心に時間軸方向に広がりを持った領域を決め、この領域の Wavelet 係数の絶対値を大きくする。このとき時間軸上でのこの領域の中心の点の位置を決めるには、対象としている Wavelet 係数列の時間スケールに隣り合ったより大きい時間スケールの Wavelet 係数列の絶対値と同じ分布形を持った乱数を発生し、この乱数の値にしたがって位置を決定した。この動作を時間スケールの大きい Wavelet 係数から順次行っていった。また、この Wavelet 係数の絶対値を大きくする領域の数は時間スケール l に反比例して、またこの領域の時間軸上の広がり幅は時間スケール l に比例するように決定した。

このような方法により本研究では隣り合った時間スケールの Wavelet 係数間で高い相関を示すように Wavelet 係数に変動を与えた。

(5) 波群性の再現

先に示した方法により式(15)で示される Wavelet 係数の絶対値に変動を与え、逆 Wavelet 変換を用いて波群性を有する水位変動信号を再現した。対象とした周波数スペクトルは図-3上段と同様、周波数スペクトルは有義波高 $H_{1/3}$ 、有義波周期 $T_{1/3}$ がそれぞれ 1.0 m、8.0 s の Bretshneider-光易型スペクトルである。

再現された水位変動信号を図-5上段に示す。またこの水位変動信号を Wavelet 解析して得られた Wavelet

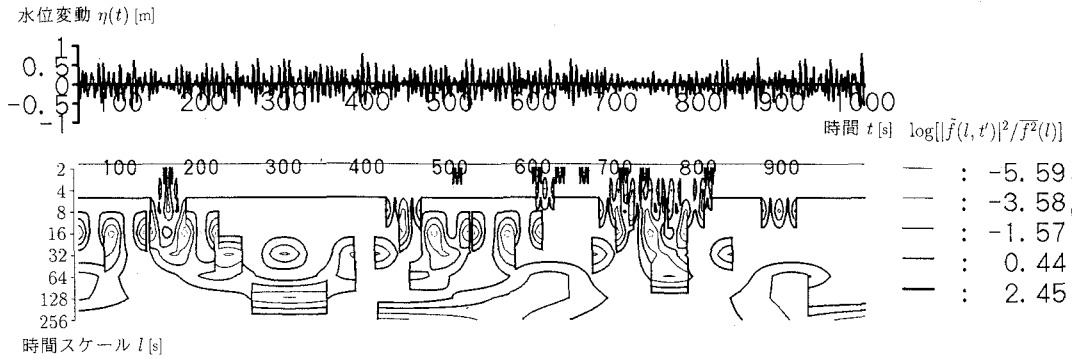


図-5 再現された波群性を有する水位変動信号 $\eta(t)$ (上)と無次元化された Wavelet 係数 $|\tilde{f}(l, t)|^2/\tilde{f}^2(l)$ (下)

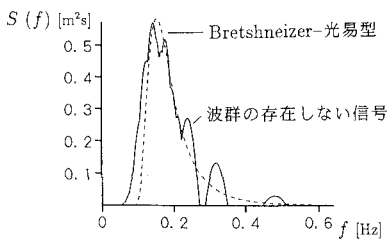


図-6 再現された波群性を有する水位変動信号の周波数スペクトル

表-2 現地波浪と再現された水位変動信号の統計量

	GF	波高の連	繰返しの連
現地波浪	0.677	1.071	7.692
再現された結果 (波群なし)	0.577	1.048	8.750
再現された結果 (波群あり)	0.671	1.130	8.318

係数の変動を図-5 下段に、フーリエ解析して得られた周波数スペクトルを図-6 に示す。図-5 の各軸の意味は図-3 と同様である。また図-6 でも図-4 と同様に、時間スケールの粗さからくるリップルが現れている。

図-4 と図-6 を見る限り、図-3 上段と図-5 上段の水位変動信号の周波数スペクトルには大きな変化は見られない。しかし波群性を再現するために Wavelet 係数に変動を与えているので図-5 下段の Wavelet 係数の変動は図-3 下段のものとは異なり大きな変動が現れているのがわかる。またその変動も隣り合った時間スケールの Wavelet 係数同士である程度相関を示している。

このような手法により再現された水位変動の波群性を評価するために従来より用いられている GF (Groupiness factor) や連長といった統計量を適用した。再現された水位変動信号を解析した結果を表-2 に示す。比較のために表中には前節で用いた圧力変動を水位変動に変換した信号を処理した結果も示している。この表では Wavelet 係数に変動を与えずに再現した水位変動の信

号に比べて Wavelet 係数に変動を与えた水位変動の信号は波群性を有する現地波浪に近い統計量を示している。したがって、前節で明らかにされた Wavelet 係数の変動の特徴は波群性に深く関係していることがわかる。さらにこの表では、GF や波高の連、繰返しの連のすべてにおいて波群性を考慮して再現された水位変動信号の値は現地波浪の値に近い値を示していることがわかる。これより、本研究で示した Wavelet 係数に変動を与えて水位変動信号を発生させる方法によって得られた結果が現地波浪が有する波群性をよく再現している。

4. おわりに

本研究では Wavelet 変換を用いて現地で観測された波群性の強い波浪の観測結果の解析を行い、この波群性の特徴について考察を行った。その結果 Wavelet 変換によって得られる Wavelet 係数はすべての時間およびスケールで大きく変動しており、しかもこの変動は隣り合った時間スケールの Wavelet 係数の変動同士で高い相関を示していた。この特徴は観測された波浪の波群性を表していた。次に逆 Wavelet 変換を用いてこの特徴を有する水面変動信号の再現を試み、波群性を有する水面変動信号を得た。

今後は Wavelet 解析を用いて現地波浪の波群性についてより詳細に解析するとともに、波群性を有する水面変動信号を再現するための手法の検討や改良を行う。

最後に本研究で使用した現地観測記録は琉球大学工学部土木工学科の仲座栄三助手らによって得られたものである。これらの貴重な記録を快く提供していただいたことに深く感謝致します。

参考文献

Farge, M. (1992): Wavelet transform and their applications to turbulence, Annu. Rev. Fluid Mech., Vol. 24, pp. 395-457.