

双峰型の標準方向スペクトルの推定法

藤原隆一*・磯部雅彦**・渡辺 晃**

1. 序 論

方向スペクトルの推定法に関しては、種々の理論が提案され（例えば、磯部，1985；小舟・橋本，1985；橋本，1987，1993），高精度で安定した推定値が得られるようになった。また，現地での方向スペクトルの特性を明らかにするために大水深域での波浪観測も行われるようになってきた（永井ほか，1992，1993）。現地での波浪観測では方向スペクトルの推定精度が高いこととともに観測結果の蓄積に便利なように，たとえば方向スペクトルがパラメタ化されているとよい。それにより，パラメタ化された標準形の方向スペクトルを設計等に用いるようにすることも可能となる。

現地では複数の主波向を含む分布形を持つ方向関数となることも少なくないと予想されるので，これに対応できるモデルとする必要がある。双峰型方向スペクトルの推定法としては，wrapped normal 分布関数を線形結合する手法が報告されている（広瀬，1985）。本研究では，少ない測定データにおいても精度よく方向スペクトルを推定するための実用的な方法を開発することを目的として，従来の最尤法を拡張した手法を提案し，双峰型の標準方向スペクトルに含まれるパラメタを推定する方法について述べる。さらに，数値シミュレーションデータに基づいてその妥当性を検証する。

2. 理 論

(1) 最尤法による方向スペクトルパラメタの推定

本研究で用いた方向スペクトルパラメタの推定法は，不規則波浪の時系列データのフーリエ係数が正規分布することに基づいて，任意の方向スペクトルの標準形に含まれるパラメタの値を，最尤法によって推定する方法である。尤度の定義は磯部（1989）によったので以下それにしたがって説明する。

まず M 種類の時系列データ ξ_m ($m=1\sim M$) からクロス・パワースペクトル $\phi_{mn}(f)$ を計算する。 x_m を測定地点の座標とすると，方向スペクトル $S(f, \theta)$ と ϕ_{mn} の関係

は次式で示される（これ以降 f は省略する）。

$$\phi_{mn} = \int_0^{2\pi} H_m(f, \theta) \bar{H}_n(f, \theta) \exp\{-ik(x_n - x_m)\} S(f, \theta) d\theta \dots\dots\dots (1)$$

ここに θ は波向， k は波数ベクトル， H_m は第 m 番目のデータの水面変動からの伝達関数であり， $-$ は共役複素数を表す。したがって， $S(f, \theta)$ を数個のパラメタによって標準的なものとして表現すれば， ϕ_{mn} はそれらのパラメタの関数となる。期待値としての ϕ_{mn} が与えられたとして，実測値から得られるクロス・パワースペクトル $\hat{\phi}_{mn}$ の ϕ_{mn} に対する近似度の高さ，すなわち尤度は次式で求められる。

$$L(\phi) = \frac{1}{(2\pi\Delta f)^M |\phi|} \exp\left(-\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \phi_{mn}^{-1} \hat{\phi}_{mn}\right) \dots\dots\dots (2)$$

ここに， Δf はクロス・パワースペクトルが代表する周波数間隔である。そこでパラメタの値を変化させて，式(2)で定義される尤度が最も大きくなるようにパラメタを決めてやれば，そのときのパラメタの値が最確値となる。

なお，標準形方向スペクトルに限定せずに，クロス・パワースペクトルを独立に変化させた場合の最大尤度 L_{\max} は次式で与えられる。

$$L_{\max} = e^M / \{(2\pi\Delta f)^M |\phi|\} \dots\dots\dots (3)$$

これと標準形方向スペクトルの自由度の範囲での最大尤度 \hat{L}_{\max} との比 $L^* = L_{\max} / \hat{L}_{\max}$ によって，標準形方向スペクトルの適合度を知ることができる。

(2) 2方向波浪系への適用

方向関数の標準形には光易型方向関数を用い，双峰型に対する $S(f, \theta)$ はこれを重ね合わせた次式で表すことにする。

$$S(f, \theta) = \sum_{i=1}^2 P_i(f) \frac{2^{2S_i-1} \Gamma^2(S_i+1)}{\pi \Gamma(2S_i+1)} \cos^{2S_i}\left(\frac{\theta - \theta_i}{2}\right) \dots\dots\dots (4)$$

ここに， $P_i(f)$ ， θ_i および S_i はそれぞれ第 i 成分のパワースペクトル，代表波向および方向集中度であり， Γ はガンマ関数を表す。なお， $P = \alpha P_1(f) + (1-\alpha) P_2(f)$ とおけば，パラメタ λ は P ， α ， θ_1 ， θ_2 ， S_1 および S_2 の6個となる。これらのパラメタ λ_i ($i=1\sim 6$) の値を最尤法で決定するためには，式(2)を λ_i で微分して0とおけばよい。

* 正会員 工修 東洋建設(株)総合技術研究所鳴尾研究所 課長代理
 ** 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科

式(2)を λ_i で微分した式が0であるためには、いくつかの式の変形を行えば、

$$\sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \left\{ -\phi_{ik}^{-1} + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \phi_{in}^{-1} \bar{\phi}_{nm} \phi_{mk}^{-1} \right\} \frac{\partial \phi_{kl}}{\partial \lambda_i} = 0 \quad \dots (5)$$

となる。これが $i=1\sim 6$ について成り立つように λ_i を決定すれば λ_i の最尤推定値が得られる。

実際の数値計算では、ニュートン法を用いて式(5)の解を求める。式(5)の左辺を、

$$f_i(\lambda_i) = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \left\{ -\phi_{ik}^{-1} + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \phi_{in}^{-1} \bar{\phi}_{nm} \phi_{mk}^{-1} \right\} \frac{\partial \phi_{kl}}{\partial \lambda_i} \quad \dots (6)$$

とおけば、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial \lambda_i} &= \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \left\{ -\phi_{ik}^{-1} + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \phi_{in}^{-1} \bar{\phi}_{nm} \phi_{mk}^{-1} \right\} \frac{\partial^2 \phi_{kl}}{\partial \lambda_i^2} \\ &\quad - \sum_{k=1}^M \sum_{l'=1}^M \sum_{k'=1}^M \sum_{l=1}^M \frac{\partial \phi_{k'l'}}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \phi_{kl}}{\partial \lambda_i} \\ &\quad \times \left[-\phi_{l'k}^{-1} \phi_{ik}^{-1} + \left\{ \phi_{ik}^{-1} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \phi_{in}^{-1} \bar{\phi}_{nm} \phi_{mk}^{-1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \phi_{l'k}^{-1} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \phi_{in}^{-1} \bar{\phi}_{nm} \phi_{mk}^{-1} \right\} \right] \quad \dots (7) \end{aligned}$$

である。これより j 回目の繰り返し計算での値 $\lambda_i^{(j)}$ から、 $j+1$ 回目の値 $\lambda_i^{(j+1)}$ を求めるためには、

$$\lambda_i^{(j+1)} = \lambda_i^{(j)} - \left[\sum_{i=1}^6 \left[\frac{\partial f_i}{\partial \lambda_i} \right]^{-1} f_i \right]_{\lambda_i = \lambda_i^{(j)}} \quad \dots (8)$$

とし、収束するまで計算する。

(3) 2成分アレイにおける方向スペクトルとクロス・パワースペクトルとの関係

ここでは、同一地点において水面変動 η 、水面2成分水粒子速度 u および v を測定した3成分アレイに対する具体的な適用法を述べる。この3成分アレイを用いれば2方向波浪系までを識別でき、その特性を表すパラメータが示されている(磯部ほか, 1985)。これらはクロス・パワースペクトルから計算されるもので、2方向の波浪系の交差角 Δ 、エネルギー偏角度 r_p および方向分離係数 $(\gamma/r)^2$ として定義され、これらをパラメータ推定の初期値設定に利用する。なお、3成分アレイを用いた場合の式(4)の方向スペクトルに対するクロス・パワースペクトルの表示式を示しておく。すなわち、 $\xi^{(1)} = \eta$ 、 $\xi^{(2)} = u$ 、 $\xi^{(3)} = v$ とおけば、クロス・パワースペクトルは、

$$\phi_{11} = \sum_{i=1}^2 P_i \quad \dots (9)$$

$$\phi_{12} = \sum_{i=1}^2 P_i H_u m_i \cos \theta_i \quad \dots (10)$$

$$\phi_{13} = \sum_{i=1}^2 P_i H_u m_i \sin \theta_i \quad \dots (11)$$

$$\phi_{22} = \sum_{i=1}^2 P_i H_u^2 (1/2 + m_{2i} \cos 2\theta_i) \quad \dots (12)$$

$$\phi_{33} = \sum_{i=1}^2 P_i H_u^2 (1/2 - m_{2i} \cos 2\theta_i) \quad \dots (13)$$

$$\phi_{23} = \sum_{i=1}^2 P_i H_u^2 (m_{2i} \sin 2\theta_i) \quad \dots (14)$$

と表すことができる。ここに、

$$m_{1i} = S_i / (S_i + 1) \quad \dots (15)$$

$$m_{2i} = S_i (S_i - 1) / \{2(S_i + 1)(S_i + 2)\} \quad \dots (16)$$

であり、また H_u は水面変動から波の進行方向の水平水粒子速度への伝達関数である。

(4) 数値計算における初期値

数値計算を行う際、パラメータ(P , θ_i , S_i , α , θ_2 , S_2)の初期値は、 Δ , r_p および $(\gamma/r)^2$ を用いて与えるので、これらを示しておく。

$$\begin{aligned} \Delta &= 2 \cos^{-1} \left\{ [(m_{01} m_{11} - m_{10} m_{02})^2 + (m_{10} m_{11} - m_{01} m_{20})^2] \right. \\ &\quad \left. / \{ (m_{10}^2 - m_{01}^2) - m_{00} (m_{20} - m_{02}) \}^2 \right. \\ &\quad \left. + 4(m_{10} m_{01} - m_{00} m_{11})^2 \right\}^{1/2} \quad \dots (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\gamma/r)^2 &= (4/\gamma^2) [m_{00} (m_{20} m_{02} - m_{11}^2) + 2 m_{10} m_{01} m_{11} \\ &\quad - (m_{10}^2 m_{02} + m_{01}^2 m_{20})] / [3 m_{00} (m_{20} + m_{02})^2 \\ &\quad - 4(m_{10}^2 + m_{01}^2)(m_{20} + m_{02}) \\ &\quad + m_{00} \{ (m_{20} - m_{02})^2 + 4 m_{11}^2 \}] \quad \dots (18) \end{aligned}$$

$$r_p = \frac{\tan(\theta_m - \theta_c)}{\tan(\Delta/2)} \quad \dots (19)$$

ここに、 γ および θ_m はそれぞれ long-crestedness パラメータおよび平均波向であり、 θ_c は次式で表される中央波向角である。

$$\theta_c = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left\{ \frac{2(m_{10} m_{01} - m_{00} m_{11})}{(m_{10}^2 - m_{01}^2) - (m_{00} m_{20} - m_{00} m_{02})} \right\} \quad \dots (20)$$

なお、 m_{pq} は次式によってクロスパワースペクトルから求める。

$$\left. \begin{aligned} m_{00} &= \phi_{11} & m_{20} &= \phi_{22} / H_u^2 \\ m_{02} &= \phi_{33} / H_u^2 & m_{10} &= \phi_{12} / H_u (= \phi_{21} / H_u) \\ m_{01} &= \phi_{13} / H_u = \phi_{31} / H_u & m_{11} &= \phi_{23} / H_u^2 (= \phi_{32} / H_u) \end{aligned} \right\} \quad \dots (21)$$

ここで H_u は、微小振幅波理論からも得られるが、測定誤差などの影響を取り除くにはパワースペクトル間の関係式

$$H_u = \sqrt{[P_u(f) + P_v(f)] / P_\eta(f)} \quad \dots (22)$$

を用いて求めればよい。

以上に基づき、各パラメータの初期値を決める。 θ_1 , θ_2 および α の初期値は以下のように与えた。

$$(\theta_1)_0 = (\theta_c \pm \delta_1) - (\Delta + \delta_2) / 2 \quad \dots (23)$$

$$(\theta_2)_0 = (\theta_c \pm \delta_1) + (\Delta + \delta_2) / 2 \quad \dots (24)$$

$$(\alpha)_0 = (1 - r_p) / 2 \quad \dots (25)$$

また、 δ_1 は0, 10, 20および30度とし、それぞれの δ_1 に対して δ_2 を0度から30度まで10度ずつ変化させた。

次に方向集中度に関しては、2方向の波浪系のそれぞれの方向集中度の大きさが等しいとした。すなわち、方向分離係数を2方向波浪系の long-crestedness パラメタおよびパワーをそれぞれ γ_1, γ_2 および λ_1, λ_2 で表現した次式

$$\left(\frac{\gamma}{\gamma}\right)^2 \approx \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2 \frac{\lambda_1 \gamma_1^2 + \lambda_2 \gamma_2^2}{\lambda_1 + \lambda_2} \dots\dots\dots (26)$$

の右辺において、 $\gamma_1 = \gamma_2$ とすると

$$\left(\frac{\gamma}{\gamma}\right)^2 = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2 \gamma_1^2 \dots\dots\dots (27)$$

となり、これと方向分離係数の定義式 (18) を等値することで γ_1 が求まる。さらに long-crestedness パラメタと方向集中度パラメタの関係式

$$\gamma = (2S+1)/(S^2+S+1) \dots\dots\dots (28)$$

から逆算される S の値を用い、

$$(S)_0 = \beta S \dots\dots\dots (29)$$

を初期値として与えた ($\beta=0.5$)。また、 P の初期値 ($P)_0$ は η のパワースペクトルとした。

2方向の交差角 Δ , エネルギー偏向度 r_p および方向分離係数 (γ/γ)² が利用できない場合は次のようにした。 P の初期値は η のパワースペクトルとし、 α の初期値は 0.5, 0.7 および 0.9 とした。 S_1 および S_2 の初期値は long-crestedness パラメタから逆算される方向集中度 S の半分の大きさとした。 θ_1 および θ_2 の初期値は、 θ_m を用いて、

$$(\theta_1)_0 = \theta_m + \delta_3 \dots\dots\dots (30)$$

$$(\theta_2)_0 = \theta_m + \delta_4 \dots\dots\dots (31)$$

として与えた。そして、 δ_3 は -10, 0 および 10 度とし、それぞれの δ_3 のもとで δ_4 を 10 度から 180 度まで 10 度ごとに変化させた。

これらの条件のもとで計算を行い、得られた結果に対する尤度が最も大きいものを解とした。

3. 数値シミュレーション

本手法の推定精度を検討するために、数値シミュレーションを行った。理論上、波向 θ と周波数 f に関する方向スペクトルの分布は独立であるので、ある固定された f について調べた。具体的な手順は以下のとおりである。

- 1) 真の方向スペクトル $S(\theta)$ を式 (4) で与える。
- 2) クロス・パワースペクトルを式 (1) で与える。
- 3) 方向スペクトルに含まれるパラメタの推定値を求める。パラメタの推定値から決定される方向スペクトルの推定値 $\hat{S}(\theta)$ と真の方向スペクトルと比較する。

なお、数値シミュレーションは以下の条件で行った。 $S_1 = 100, 50$ および 10 として $S_2/S_1 = 10, 2, 1, 0.5$ および 0.1 となるように S_2 を与え、それぞれの S_2/S_1 に対してパワー比 $\lambda_2/\lambda_1 = (1-\alpha)/\alpha$ が $1.0, 0.5, 0.2$ および 0.1 と

なるようにそれぞれのパワーを与えた。これらの条件のもとで、 θ_1 は 0 度とし、 θ_2 を $0 \sim 180$ 度まで変化させた。

(1) 方向スペクトル

本手法で得られた推定結果に対する尤度比 L^* は、あまり明瞭でない双峰型の方向スペクトルの場合 ($S_2/S_1 = 10, 0.1$ で交差角が 30 度以下の場合や $\lambda_2/\lambda_1 \leq 0.2$) を除くと 1.0 であった。それにもかかわらず、パラメタの推定値は真の方向スペクトルのそれと完全に一致しない場合がある。これは 3 成分アレイの場合、与えられたクロス・パワースペクトル $\phi_{mn}(m, n=1, 3)$ を表すパラメタ ($P, \alpha, \theta_1, \theta_2, S_1, S_2$) の組み合わせ、すなわち求まる解が多数あることを示す。このことは、未知数であるパラメタの数が 6 個であるのに、独立したクロス・パワースペクトルが ($\phi_{22}, \phi_{33}, \phi_{12}, \phi_{13}, \phi_{23}$) の 5 個となり、未知数の数がそれを解くべき式の数より多くなるために生じる。このため複数の解の中でパラメタの組み合わせが真値となる解に必ずしも収束しない。しかし、方向スペクトルを図示してみると、尤度比が示すように真の形状とよく一致し、実用上の問題はないことがわかった。以下に、方向スペクトルの推定結果の例を示す。

図-1 は代表波向が同じで、2方向波浪系におけるそれぞれの方向集中度の比 S_2/S_1 およびパワー比 $\lambda_2/\lambda_1 = (1-\alpha)/\alpha$ の組み合わせが異なる場合の結果を示す。縦軸は真の方向スペクトルの最大値で無次元化してある。方向スペクトルの推定結果 (破線) は良好であり、従来の EMLM (点線) で推定しにくいピーク付近の形状をよく表している。

なお、 S_1 と S_2 の差が大きくなると、方向スペクトルの推定精度は低下する。図-2 は $S_2/S_1 = 0.1$ および 10.0 の場合の例である。推定された方向スペクトルの形状は方向集中度の高い側を表すピーク付近では真値のそれより緩やかになり、逆に、方向集中度の低い側を表すピーク付近では真値のそれより急になっている。また、ピークの位置も真値からずれている。

次に、2方向波浪系の場合で交差角が小さかったり λ_2/λ_1 が小さいときには 1 方向の波浪 (単峰型) と考えてよい例を示す (図-3 参照)。図中には単峰型として推定した結果 (粗・点線) も同時に示してある。本手法による推定結果はほぼ真値と同じである。また、単峰型として推定した結果もピーク付近で僅かに形状が異なるだけである。単峰型として推定したときの尤度比 L^* は図-3 (a) および (b) に対して、それぞれ 0.9574, 0.9569 であった。このように単峰型として推定したときの L^* が大きいときには、2方向波浪系としなくとも問題はないものと考えられる。数値シミュレーションの結果からは単峰型として推定したときの尤度が $L^* > 0.9$ のときには単峰型と考えてもよい。

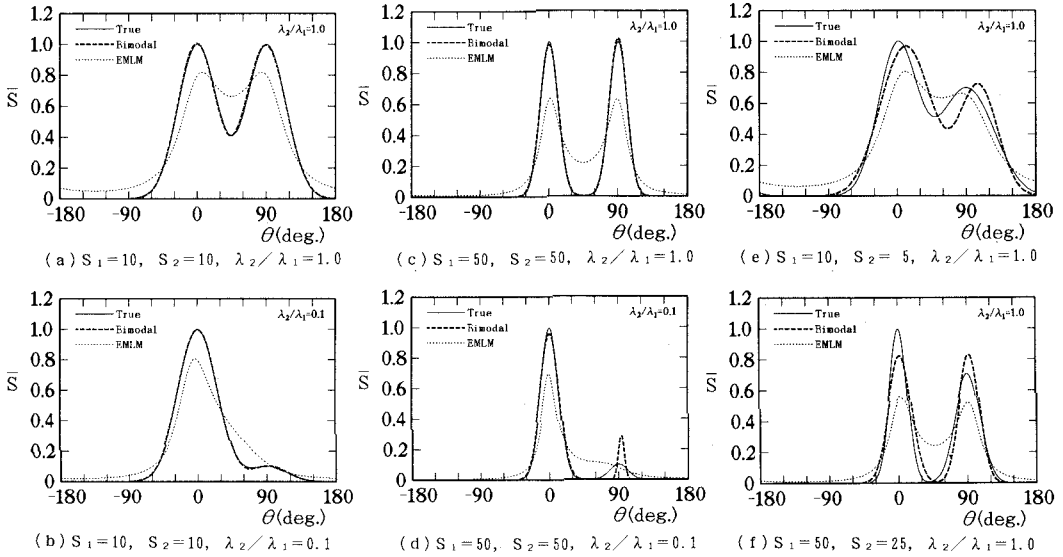


図-1 方向スペクトルの推定結果 (1) : $\theta_1=0$ 度, $\theta_2=90$ 度

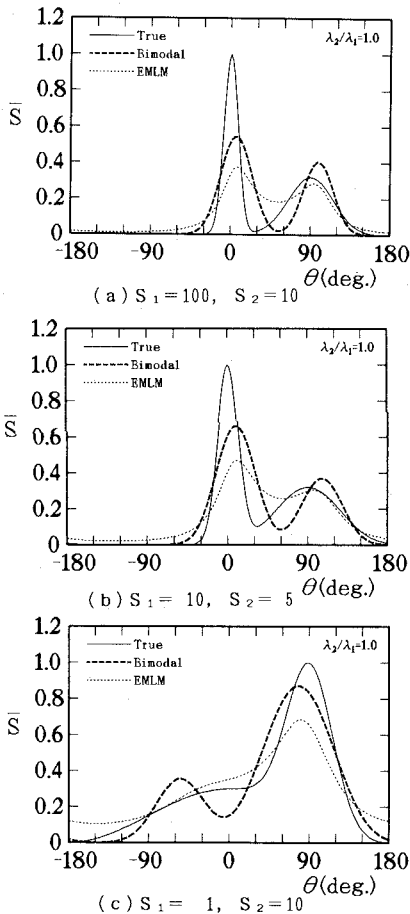


図-2 方向スペクトルの推定結果 (2) : $\theta_1=0$ 度, $\theta_2=90$ 度

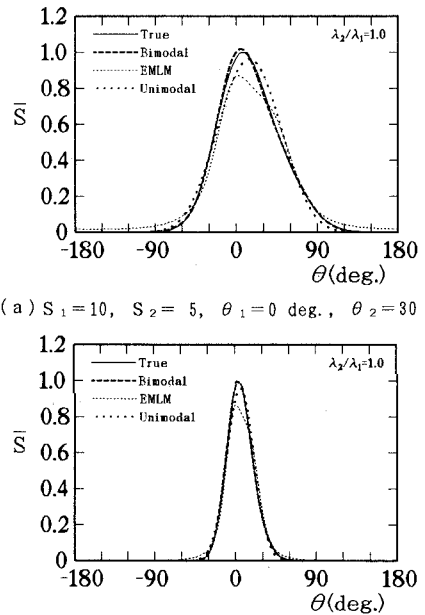


図-3 方向スペクトルの推定結果 (3) : $\lambda_2/\lambda_1=1.0$

(2) 方向スペクトルに含まれるパラメタ

方向スペクトルに含まれるパラメタの推定値の中で, $S_1, S_2 \geq 5$ および $0.3 \leq \alpha \leq 0.7$ の場合には, パラメタそのものの推定精度も高いことが明らかとなった. この条件におけるパラメタの推定値の例を図-4 に示す. 数値シミュレーションを行った範囲では, S_1 および S_2 の推定値は真の S_1 および S_2 を上限, 下限とした範囲内で推定

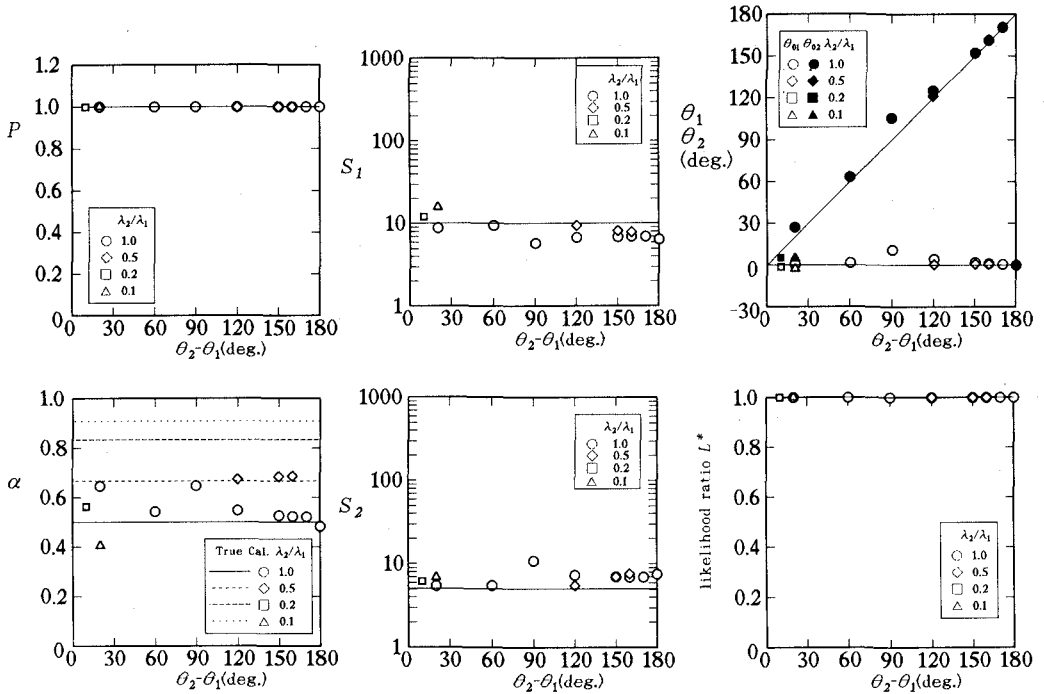


図-4 方向スペクトルに含まれるパラメタの推定結果: $S_1=10, S_2=5$

された。また、 P, α, θ_1 および θ_2 の推定値は、ほぼ真値に近い値が得られた。なお、パラメタの推定値そのものの精度を高めるには独立したクロス・パワースペクトルの数を増やす必要があり、このために必要な測定点数および計算の増加は実務的にはかなり負担が大きくなる。しかし現地データの保存を考えると、パラメタの推定値そのものも真値が得られることが望ましい。したがって、パラメタそのものの推定精度を高めることに関してはもう少し検討する必要がある。このような問題を若干残すものの、僅か6個のパラメタで双峰型の方向スペクトルを表すことができるのは、現地データの保存にとって非常に有利である。

4. 結 論

本研究における主要な結論をまとめると以下のようである。

1) 2方向波浪系の方向スペクトルに含まれるパラメタを最尤法を用いて推定する方法を導き、数値シミュレーションで検証した。その結果、本手法を用いれば3成分アレイという簡単なものを用いても、2方向波浪系に対して精度の高い推定ができることがわかった。

2) 計算時間はパソコン(PC-9801nA, コプロセッサ使用)で約20秒/ケースであったこと、また、3成分アレイは現地でも比較的簡単に設置できることから実用性

の高い手法といえる。

今後は方向スペクトルに含まれるパラメタの推定値の精度をさらに高める方法を検討するとともに、水理模型実験や現地観測で得られたデータに対する計算を行い、その適用性について詳しく検討する必要がある。

参 考 文 献

磯部雅彦 (1985): 方向スペクトルの推定理論, 海岸環境工学, 補章A, 堀川清司 (編), pp. 506-524.
 磯部雅彦 (1989): 標準化された方向スペクトルの推定法, 海岸工学論文集, 第36巻, pp. 158-162.
 小舟浩治・橋本典明 (1985): 最大エントロピー原理 (MEP) を用いた方向スペクトルの推定, 第32回海岸工学講演会論文集, pp. 159-163.
 永井紀彦・橋本典明・浅井 正・菅原邦彦・久高将信 (1992): いわき沖で観測された方向スペクトルの出現特性, 海岸工学論文集, 第39巻, pp. 166-170.
 永井紀彦・橋本典明・浅井 正・大野正人・杉浦 淳 (1993): 新潟沖で観測された方向スペクトルの出現特性, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 151-155.
 橋本典明 (1987): ベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定, 第35回海岸工学講演会論文集, pp. 126-130.
 橋本典明 (1993): 方向スペクトル推定における最大エントロピー原理法 (MEP) の拡張, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 136-140.
 広瀬宗一 (1985): 双峯型方向分布関数の推定法について, 第32回海岸工学講演会論文集, pp. 164-168.