

# 円正規分布関数を用いた入・反射波共存場における 方向スペクトルの推定法

横木 裕宗\*・磯部 雅彦\*\*・渡辺 晃\*\*

## 1. はじめに

最近では、海岸・海洋構造物の設計や港湾内の波浪変形計算を行う際の入射波浪として、多方向不規則波を用いることが一般的になってきた。多方向不規則波を記述するものとして方向スペクトルが用いられている。しかし、一般に方向スペクトルを推定することは容易ではなく、特に構造物が存在する波浪場、つまり入射波と反射波が共存する場での方向スペクトルの推定は重要であるにもかかわらず、実用的な推定法はまだまだ十分には確立されていないのが現状である。そこで本研究においては、入射波と反射波が共存している場での方向スペクトルを簡便にかつ実用的な精度で推定することを目的とした。

本研究では、観測で得られた各波高計および波高計間のパワースペクトルおよびクロススペクトルの組み合わせと、いくつかのパラメータの関数として表現したクロスパワースペクトルの値の組み合わせが等しくなるように、パラメータを推定することによって方向スペクトルを推定している。またクロスパワースペクトルをパラメータの関数として表現する際に、本研究では、方向スペクトルを円正規分布型関数を用いた関数形と仮定している。

このような方向スペクトルの推定法の例としては、橋本 (1987) によって、方向分布関数がなめらかな関数の指数をとったものであると仮定されて導かれたものがある。また磯部 (1989) が、方向関数に光易型を仮定して、入射波のみが存在する波浪場で方向スペクトルを推定しており、著者ら (1991) がそれを入・反射波共存場に拡張した。これらの研究では方向スペクトルを光易型の方向関数を用いたものと仮定している。光易型の方向関数を用いると、Bessel 関数の級数に展開されたクロスパワースペクトルを求めるために、数多くの項の和をとらなくてはならず、長い計算時間が必要であった。しかし、光易型の代わりに円正規分布型の方向関数を用いたところ、数少ない項数で精度の良い数値が得られる数値計算アルゴリズムを得ることができた。

## 2. 理 論

### (1) クロスパワースペクトルの定式化

入・反射波共存場における、地点  $x_p$ 、時刻  $t$  での水面変動  $\eta(x_p, t)$  は式 (1) のように表せる。

$$\eta(x_p, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_k \{ \exp[i(kx_p - \sigma t + \epsilon)] + r \exp[i(k_r x_p - \sigma t + \epsilon)] \} \cdot A(dk, d\sigma) \dots (1)$$

ここで、 $k, k_r$  はそれぞれ入射波、反射波の波数ベクトル、 $\sigma$  は角周波数、 $\epsilon$  は位相差、 $r$  は反射率、 $A(dk, d\sigma)$  は  $k \sim k + dk, \sigma \sim \sigma + d\sigma$  での複素振幅を表している。いま、

$$Z_p(d\sigma) = \int_k \{ \exp(-ikx_p) + r \exp(-ik_r x_p) \} \cdot A^*(dk, d\sigma) \dots (2)$$

とおくと  $Z_p(d\sigma)$  は  $\sigma \sim \sigma + d\sigma$  を代表する地点  $x_p$  での複素振幅となり、 $Z_p(d\sigma)$  を用いて、地点  $x_p, x_q$  での水面変動のクロススペクトル  $\Phi_{pq}(\sigma)$  が次式のように表される。

$$\Phi_{pq}(\sigma) d\sigma = \langle Z_p^*(d\sigma) Z_q(d\sigma) \rangle \dots (3)$$

したがって、

$$\Phi_{pq}(\sigma) d\sigma = \int_k \{ \exp(ikx_p) + r \exp(ik_r x_p) \} \cdot \{ \exp(ikx_q) + r \exp(ik_r x_q) \} \cdot A(dk, d\sigma) A^*(dk, d\sigma) \dots (4)$$

となり、方向スペクトル  $S(k, \sigma)$  を用いると、

$$\Phi_{pq}(\sigma) = \int_k \{ \exp[-ik(x_q - x_p)] + r \exp[-i(kx_q - k_r x_p)] + r \exp[-i(k_r x_q - kx_p)] + r^2 \exp[-ik_r(x_q - x_p)] \} \cdot S(k, \sigma) dk \dots (5)$$

と書ける。ここで、 $k_r x_p = kx_{pr}, k_r x_q = kx_{qr}$  とおいて、

$$\left. \begin{aligned} x_q - x_p &= R_{pq}(\cos \theta_{pq}, \sin \theta_{pq}) \\ x_q - x_{pr} &= R_{pqr}(\cos(\pi - \theta_{pqr}), \sin(\pi - \theta_{pqr})) \\ x_{qr} - x_p &= R_{pqr}(\cos \theta_{pqr}, \sin \theta_{pqr}) \\ x_{qr} - x_{pr} &= R_{pq}(\cos(\pi - \theta_{pq}), \sin(\pi - \theta_{pq})) \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

\* 正会員 工修 東京大学助手 工学部土木工学科

\*\* 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科

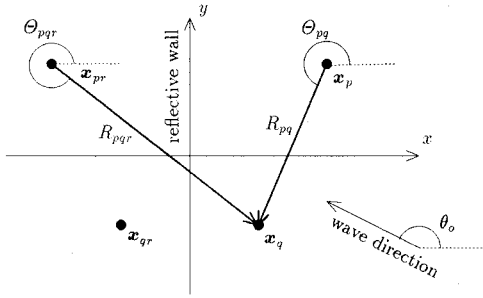


図-1 座標の定義

なる  $R_{pq}, R_{pqr}, \theta_{pq}, \theta_{pqr}$  を導入する (図-1)。これらを用いると式(5)が式(7)のように書き直される。このとき  $S(\mathbf{k}, \sigma)$  の代わりにそれと一対一に対応している  $S(f, \theta)$  を用いる。また  $\mathbf{k} = k(\cos \theta, \sin \theta)$  を用いる。

$$\begin{aligned} \Phi_{pq}(f) = & \int_0^{2\pi} \{ \exp[-ikR_{pq} \cos(\theta - \theta_{pq})] \\ & + r \exp[-ikR_{pqr} \cos(\theta - \pi + \theta_{pqr})] \\ & + r \exp[-ikR_{pqr} \cos(\theta - \theta_{pqr})] \\ & + r^2 \exp[-ikR_{pq} \cos(\theta - \pi + \theta_{pq})] \} \\ & \cdot S(f, \theta) d\theta \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

ここで、一定方向の風に吹かれて発達した波浪場の方向スペクトルを考える。その方向スペクトルの波向に関するエネルギー分布は、エネルギー密度が最大となる波向が存在し、その両側に向かってなめらかにエネルギー密度が減少していると考えられる。このような分布を表現する関数形として、フーリエ級数の他に、円正規分布型 ( $\exp(a \cos \theta)$ ) (Borgman, 1969)、光易型 ( $\cos^{2s}(\theta/2)$ ) (Mitsuyasu *et al.*, 1975)、 $\text{sech}^2 a\theta$  型 (Donelan *et al.*, 1985) がある。

これらの関数形のなかで、クロスパワースペクトルを求めるための数値計算にかかる時間が短いこと、鋭く尖った形もなだらかな形も表現できること、0 から  $2\pi$  で周期性を持っていることから、本研究では円正規型分布方向関数を選んだ。したがって方向スペクトル  $S(f, \theta)$  は次式のように書き表せる。

$$S(f, \theta) = P(f) \frac{1}{2\pi I_0(a)} \exp[a \cos(\theta - \theta_o)] \dots (8)$$

ここで、 $P(f)$  は周波数スペクトル、 $a$  は分布形の尖鋭度を表すパラメータ、 $\theta_o$  はピーク波向、 $I_0(a)$  は0次の変形された Bessel 関数である。また、ピーク波向が複数存在する方向スペクトルに対しては、橋本ら (1993) が用いたような  $\exp(\sum_{n=0}^N a_n \cos \theta_n + b_n \sin \theta_n)$  型の方向関数を用いる方法も考えられるが、式(8)の方向スペクトルを

重ね合わせることも表現することができる。

式(7)に式(8)を代入すると、クロスパワースペクトルの表示式として次式が得られる。

$$\begin{aligned} \Phi_{pq}(f) = & \left\{ \begin{aligned} & \varphi(a, \theta_o, R_{pq}, \theta_{pq}|f) \\ & + r^2 \varphi(a, \theta_o, R_{pq}, \pi - \theta_{pq}|f) \\ & + r \varphi(a, \theta_o, R_{pqr}, \theta_{pqr}|f) \\ & + r \varphi(a, \theta_o, R_{pqr}, \pi - \theta_{pqr}|f) \end{aligned} \right\} \\ & \times (1 + \delta_{pq} \epsilon_p) P(f) \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \varphi(a, \theta_o, R, \theta|f) &= \frac{1}{2\pi I_0(a)} \int_0^{2\pi} \exp[-ikR \cos(\theta - \theta)] \\ & \cdot \exp[ac \cos(\theta - \theta_o)] d\theta \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

である。ここで  $\epsilon_p$  は  $x_p$  の波高計に含まれるノイズの  $\Phi_{pp}(f)$  に対する割合を示している。

式(10)の積分を Bessel 関数を用いて展開すると、式(11)が得られる。

$$\begin{aligned} \varphi(a, \theta_o, R, \theta|f) &= J_0(kR) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \cos(2m\beta) J_{2m}(kR) \frac{I_{2m}(a)}{I_0(a)} \\ & + 2i \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cos[(2m+1)\beta] \\ & \cdot J_{2m+1}(kR) \frac{I_{2m+1}(a)}{I_0(a)} \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

ここで、 $\beta = \theta_o + \theta + \pi$ 、 $J_0(z)$  は0次の Bessel 関数である。本推定法の数値計算では、クロスパワースペクトル  $\Phi_{pq}$  の値を式(11)と式(9)を用いて求めている。

(2) パラメータの推定法

パラメータの推定には最尤推定法を用いた。観測されたクロスパワースペクトルを  $\hat{\Phi}_{pq}$ 、推定するクロスパワースペクトルを  $\Phi_{pq}$  と表し、磯部 (1989) にしたがって尤度  $L$  を次式のように定義した。

$$L = \frac{1}{(2\pi \Delta f)^M |\Phi|} \exp\left(-\sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M \Phi_{pq}^{-1} \hat{\Phi}_{qp}\right) \dots\dots (12)$$

ここで、 $M$  は観測地点の数、 $|\Phi|$  は行列  $\Phi$  の行列式を表している。

この尤度  $L$  を最大にするパラメータ  $\lambda_i (i=1 \sim N_p) (N_p$  はパラメータの数) を求める方法を説明する。

式(12)をパラメータ  $\lambda_i$  で偏微分すると、

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = \sum_{j=1}^M \sum_{l=1}^M \frac{\partial L}{\partial \Phi_{jl}} \frac{\partial \Phi_{jl}}{\partial \lambda_i} \dots\dots\dots (13)$$

が得られる。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \Phi_{ji}} &= \frac{\partial}{\partial \Phi_{ji}} \left[ \frac{1}{(2\pi \Delta f)^M |\Phi|^2} \exp\left(-\sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M \Phi_{pq}^{-1} \widehat{\Phi}_{qp}\right) \right] \\ &= -\frac{1}{(2\pi \Delta f)^M |\Phi|^2} \exp\left(-\sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M \Phi_{pq}^{-1} \widehat{\Phi}_{qp}\right) \frac{\partial |\Phi|}{\partial \Phi_{ji}} \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi \Delta f)^M |\Phi|} \exp\left(-\sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M \Phi_{pq}^{-1} \widehat{\Phi}_{qp}\right) \\ &\quad \times \left(-\sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M \frac{\partial \Phi_{pq}^{-1}}{\partial \Phi_{ji}} \widehat{\Phi}_{qp}\right) \\ &= -L \times \left(\frac{1}{|\Phi|} \frac{\partial |\Phi|}{\partial \Phi_{ji}}\right) + L \times \left(-\sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M \frac{\partial \Phi_{pq}^{-1}}{\partial \Phi_{ji}} \widehat{\Phi}_{qp}\right) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (14)$$

となり、さらに行列に関する定理を用いて変形すると

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi_{ji}} = L \times \left\{ -\Phi_{ij}^{-1} + \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M \Phi_{iq}^{-1} \widehat{\Phi}_{qp} \Phi_{pj} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

が得られる。よって、

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = \sum_{j=1}^M \sum_{l=1}^M L \left\{ -\Phi_{ij}^{-1} + \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M \Phi_{iq}^{-1} \widehat{\Phi}_{qp} \Phi_{pj} \right\} \frac{\partial \Phi_{jl}}{\partial \lambda_i} \dots (16)$$

となる。したがって、

$$\sum_{j=1}^M \sum_{l=1}^M \left\{ -\Phi_{ij}^{-1} + \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M \Phi_{iq}^{-1} \widehat{\Phi}_{qp} \Phi_{pj} \right\} \frac{\partial \Phi_{jl}}{\partial \lambda_i} = 0 \dots\dots\dots (17)$$

を満足する  $\lambda_i$  を求めればよいことがわかる。

$$f_i(\lambda_i) = \sum_{j=1}^M \sum_{l=1}^M \left\{ -\Phi_{ij}^{-1} + \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M \Phi_{iq}^{-1} \widehat{\Phi}_{qp} \Phi_{pj} \right\} \frac{\partial \Phi_{jl}}{\partial \lambda_i} \dots (18)$$

とおけば、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial \lambda_i} &= \sum_{j=1}^M \sum_{l=1}^M \left\{ -\Phi_{ij}^{-1} + \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M \Phi_{iq}^{-1} \widehat{\Phi}_{qp} \Phi_{pj} \right\} \frac{\partial^2 \Phi_{jl}}{\partial \lambda_i \partial \lambda_i} \\ &\quad - \sum_{j=1}^M \sum_{l=1}^M \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M \frac{\partial \Phi_{j'l}}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \Phi_{il}}{\partial \lambda_i} \\ &\quad \times \left[ -\Phi_{rj}^{-1} \Phi_{ij}^{-1} + \left\{ \begin{aligned} &\Phi_{ij}^{-1} \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M \Phi_{pq}^{-1} \widehat{\Phi}_{qp} \Phi_{pj} \\ &+ \Phi_{ij}^{-1} \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M \Phi_{iq}^{-1} \widehat{\Phi}_{qp} \Phi_{pj} \end{aligned} \right\} \right] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (19)$$

である。これより  $j$  回目の繰り返し計算での値  $\lambda_i^{(j)}$  から、 $j+1$  回目の値  $\lambda_i^{(j+1)}$  を求めるためには、

$$\lambda_i^{(j+1)} = \lambda_i^{(j)} - \left[ \sum_{l=1}^{N_i} \left[ \frac{\partial f_i}{\partial \lambda_i} \right]^{-1} f_i \right]_{\lambda_i = \lambda_i^{(j)}} \dots\dots\dots (20)$$

とし、収束するまで計算する。

ただし、実際の計算においては、繰り返し計算において尤度  $L$  が極小となる方向へ  $\lambda_i^{(j+1)}$  が補正されることがよくみられた。これは、この繰り返し計算が  $\partial L / \partial \lambda_i = 0$  となる  $\lambda_i$  を求めることのみを目的として行われていることに起因する。そこで本手法での計算では、毎回の繰り返し計算の後で  $(\partial L / \partial \lambda_i) \Delta \lambda_i$  の符号が負になっていれば、 $\Delta \lambda_i (= \lambda_i^{(j+1)} - \lambda_i^{(j)})$  の符号を逆にして計算を続けるようにした。これはすべてのパラメータの補正の方向が、常に尤度が大きくなる方向と同じになるようにすることである。このような修正を行ったところ、パラメータの初期値をいろいろ変えた推定計算の結果、ほぼす

表-1 方向スペクトルパラメータ一覧

Case No.	方向集中度 $s$	ピーク波向 $\theta_0$ (°)	周波数スペクトル $P(f)$ (m <sup>2</sup> /s)	反射率 $r$	各波高計のノイズ成分		
					$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$\epsilon_3$
PA01	5.0	120	1.0	0.1	0.1	0.1	0.1
PA02	10.0	120	1.0	0.1	0.1	0.1	0.1
PA03	5.0	120	1.0	0.5	0.1	0.1	0.1
PA04	5.0	120	1.0	0.1	0.3	0.3	0.3
PA05	5.0	120	1.0	0.1	0.1	0.2	0.3

表-2 波高計の位置・波高計間の距離の一覧

Case No.	$D$ (m)	$d$ (m)
WG01	20	5
WG03	40	5
WG05	40	15
WG07	60	5
WG09	60	15

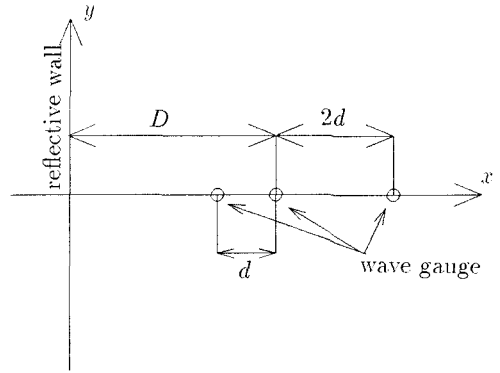


図-2 波高計の位置 (表-2 の記号の定義)

べての場合で尤度が最大となるパラメータの値に収束することが確認された。

### 3. 数値シミュレーションによる検証

本研究で提案した推定法を、数値シミュレーションによって求めた  $\widehat{\Phi}_{pq}$  に適用して、その有効性を検討した。

#### (1) 数値シミュレーションデータの作成

クロスパワースペクトル  $\widehat{\Phi}_{pq}$  の計算に際しては、光車型の方向関数を用いた。方向スペクトルのパラメータの一覧を表-1 に示した。

本研究で用いたパラメータは、方向集中度を表す  $a$ 、ピーク波向  $\theta_0$ 、周波数スペクトル  $P(f)$ 、反射率  $r$ 、各波高計におけるパワースペクトルに対するノイズの割合  $\epsilon_p (p=1\sim 3)$  の合計 7 個である。

表-1 の 5 種類の方向スペクトルのそれぞれについて、波高計の位置や波高計間の距離を変えて、式(9)を

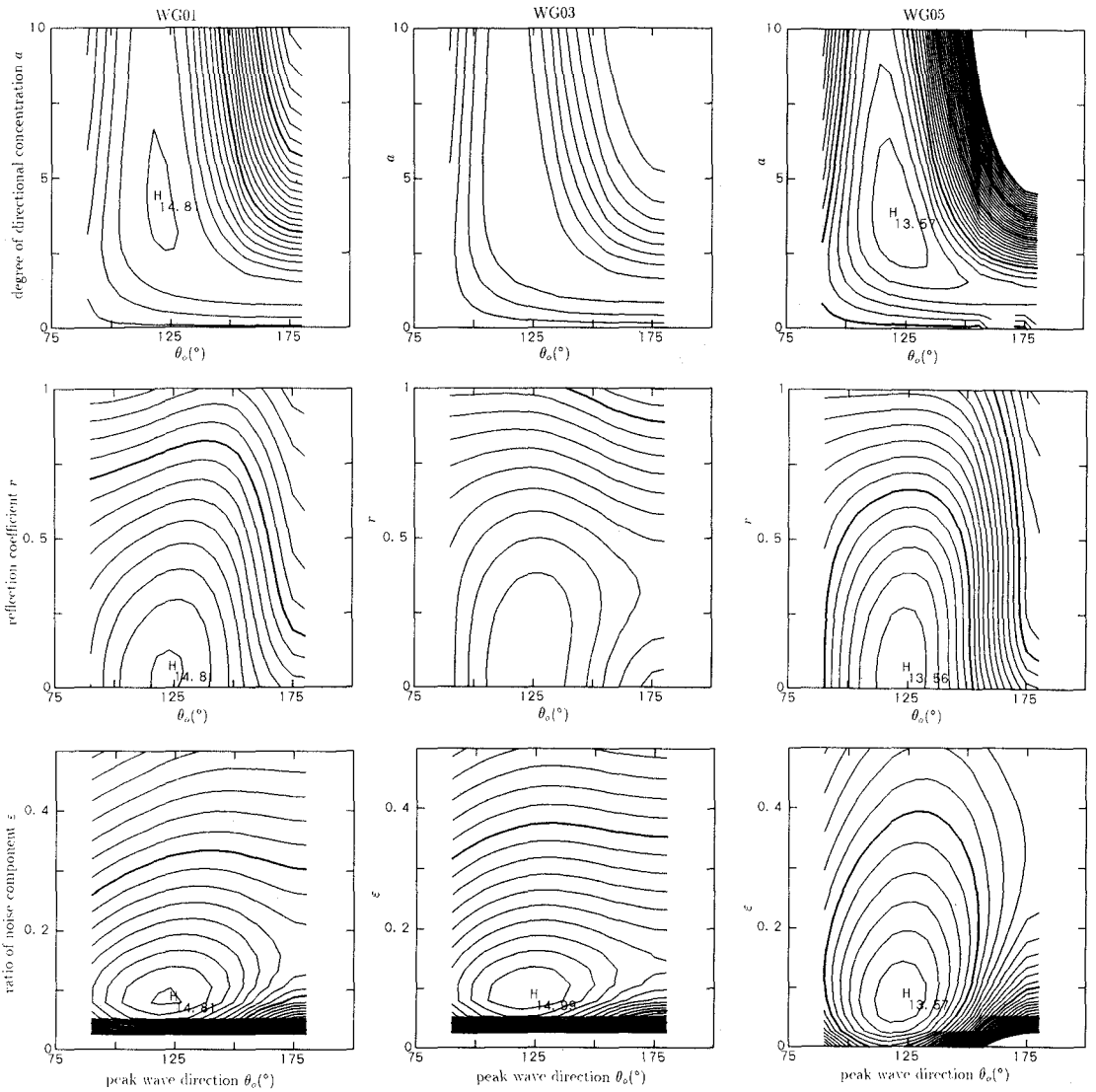


図-3 尤度 (log L) と方向スペクトルパラメータの関係

用いて  $\hat{\Phi}_{pq}$  を求めた。波高計の位置等の一覧を表-2 に示す。表-2 の中で用いた記号の定義は図-2 に示した。

(2) 検証結果

前述の5種類の方向スペクトルのそれぞれに対して、表-2、図-2 で示した5種類の波高計アレイを想定して、合計25種類のクロスパワースペクトル  $\hat{\Phi}_{pq}$  を計算し、それぞれに対して本推定法を適用してパラメータを推定した。

様々な初期値から推定計算を行った例を図-3 に示す。これは方向スペクトル PA01 に波高計アレイ WG01, WG03, WG05 を想定して得られたクロスパワースペクトル  $\hat{\Phi}_{pq}$  に対して求められた尤度 log L とパラメータ  $a, \theta_0, r, \epsilon$  の関係を示している。これらの図より、尤度の分

布の様子が波高計の位置や波高計間の距離によってあまり変化しないことがわかる。すなわち、どの波高計アレイで観測しても、式(12)で定義した尤度はパラメータの真の値の近傍で大きくなっていることがわかる。このことから、本推定法が波高計の反射面からの距離や波高計間の距離による影響を受けにくいことを示唆している。

次に、方向スペクトルと波高計アレイのすべての組み合わせで得られたクロスパワースペクトルに対して推定計算を行った結果得られた最確値の一覧を表-3 に示す。この表から、波高計アレイ WG09 のデータを推定すると方向集中度と反射率がやや過小に推定されるものの、方向スペクトルのすべてのケースでどの波高計アレイからでも正しいパラメータの値が推定されていること

表-3 パラメータの推定値の一覧

方向 スペクトル Case No.	波高計 アレイ Case No.	方向集中度 $a$	ピーク波向 $\theta_0$ (°)	周波数 スペクトル $P(f)$ (m <sup>2</sup> s)	反射率 $r$	波高計のノイズの割合		
						$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$\epsilon_3$
PA01	WG01	3.37	120	0.999	0.0990	0.102	0.0989	0.103
	WG03	3.43	120	1.00	0.102	0.100	0.0997	0.103
	WG05	3.21	121	1.02	0.108	0.0959	0.0865	0.0962
	WG07	3.40	121	0.992	0.118	0.102	0.0984	0.103
	WG09	3.19	120	1.02	0.0744	0.0938	0.0891	0.130
PA02	WG01	6.12	120	1.00	0.0984	0.101	0.0991	0.102
	WG03	6.12	120	1.01	0.103	0.0997	0.100	0.0995
	WG05	5.74	120	1.00	0.0780	0.110	0.0909	0.0941
	WG07	6.05	120	0.995	0.119	0.101	0.0994	0.0996
	WG09	5.77	120	1.01	0.0729	0.0931	0.0973	0.101
PA03	WG09	3.08	120	1.01	0.488	0.101	0.0993	0.102
	WG03	3.02	120	1.02	0.486	0.0982	0.101	0.0962
	WG05	2.82	119	1.03	0.461	0.110	0.0963	0.0935
	WG07	3.08	120	0.999	0.498	0.0999	0.100	0.0985
	WG09	2.77	118	1.04	0.450	0.0950	0.0982	0.106
PA04	WG01	3.34	120	1.00	0.0986	0.301	0.299	0.302
	WG03	3.40	120	1.00	0.102	0.300	0.300	0.299
	WG05	3.20	120	1.01	0.107	0.295	0.286	0.293
	WG07	3.36	121	0.994	0.115	0.302	0.299	0.303
	WG09	3.16	120	1.01	0.0797	0.295	0.287	0.300
PA05	WG01	3.20	120	1.00	0.0984	0.101	0.199	0.301
	WG03	3.24	120	1.00	0.100	0.0999	0.200	0.300
	WG05	3.09	120	1.01	0.107	0.0967	0.188	0.294
	WG07	3.22	120	0.996	0.108	0.101	0.199	0.301
	WG09	3.07	120	1.01	0.0786	0.0952	0.190	0.300

がわかる。

#### 4. ま と め

本研究では、円正規分布型方向関数を用いて入・反射波共存場での方向スペクトルを推定する方法を導いた。さらに数値シミュレーションデータによりその有効性を検討した結果、反射面からの波高計の距離や波高計の設置間隔の影響を受けにくく、かつ安定して精度の高い推定値が得られることがわかった。

#### 参 考 文 献

磯部雅彦 (1989): 標準化された方向スペクトルの推定法, 海岸論文集, 第 36 巻, pp. 158-162.

- 橋本典明 (1987): ベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定, 第 34 回海講論文集, pp. 126-130.
- 橋本典明・永井紀彦・浅井 正・菅原一晃・久高将信・小野修平 (1993): 方向スペクトルの推定における最大エントロピー原理法 (MEP) の拡張, 海岸論文集, 第 40 巻, pp. 136-140.
- 横木裕宗・磯部雅彦・渡辺 晃 (1991): 多方向不規則波浪場における反射率の推定法, 海岸論文集, 第 38 巻, pp. 146-150.
- Borgman, L. E. (1969): Directional spectra models for design use for surface waves, HEL 1-12, Univ. Calif., 56 p.
- Donelan, M. A., J. Hamilton and W. H. Hui (1985): Directional spectra of wind-generated waves, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., ser. A, Vol. 315, pp. 509-562.
- Mitsuyasu, H., F. Tasai, T. Suhara, S. Mizuno, M. Ohtsuka, T. Honda and K. Rikiishi (1975): Observations of directional spectrum of ocean waves using a cloverleaf buoy, Journal of Physical Oceanography, Vol. 5, pp. 750-760.