

波動場における修正グリーン関数について

折橋 恒春*・渡部 靖憲**・浜中建一郎***

1. はじめに

任意の形状をした構造物を過ぎる波の変形と波力の問題を解く場合、グリーンの式を用いる方法が良く用いられる。この場合、特異解として主要解とグリーン関数を用いる方法とに大別される。いずれの方法においても、グリーンの公式の積分表現を離散化した数値積分で近似し、境界面上のセグメントに配置した速度ポテンシャルを未知数とする線形代数方程式を解くことに帰着されている。

3次元問題を解く場合、主要解を用いると考慮すべき境界面と未知数が増大し、現在の計算機においては、メモリーやコストの面で問題が残る。このことから3次元問題では、グリーン関数を用いる方法が有利と考えられる。

波動場におけるグリーン関数としては、John (1950) によって導かれたものが知られている。しかしながら、この John のグリーン関数においては、その特異性に伴った解の収束性に問題があることが Fenton (1978), Isaacson (1982) 等によって指摘されているが、その問題の本質が正確には解明されていないため解決には至っていない。

このことから本研究では、John のグリーン関数の級数表示形を簡単な方法で再導出し、その過程を通して収束性の悪さが特に微分形にみられることを解明した。その問題を解決した収束性の良いグリーン関数を修正グリーン関数として提案する。

2. John のグリーン関数

本論文では理解を容易にするため、断面2次元(x, z)で考える。グリーン関数とは特異性を有しながら考える問題における境界条件を満たすラプラス方程式の振動解である。しかしながら、周囲の境界条件を満足すると同時に構造物の境界条件をも満足させるのは非常に強い制約を受けるので、まず周囲の境界条件のみを満足するグ

リーン関数を考える。

時間的に振動する速度ポテンシャルを式(1)の様に与える。

$$\Phi^* = \phi^* e^{-i\omega^* t^*} \dots\dots\dots (1)$$

ω^* は周波数, t^* は時間, * は有次元量を表す。全ての変数を ω^* と重力加速度 g^* で式(2)の様に無次元化する。

$$\left. \begin{aligned} (x, z) &= (x^*, z^*) (\omega^*)^2 / g^* \\ t &= \omega^* t^* \\ \phi &= \phi^* (\omega^*) / (g^*)^2 \\ k &= k^* g^* / (\omega^*)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

k : wave number

境界条件は以下のように与える。

$$\left. \begin{aligned} \Delta\phi &= 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} &= \phi \quad \text{on } z=0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} &= 0 \quad \text{on } z=-h \\ \frac{\partial\phi}{\partial\nu} &= 0 \quad \text{on the surface of structure} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

グリーン関数(G)に対する境界条件は次の様である。

$$\left. \begin{aligned} \Delta G &= -\delta(x-x_0, z-z_0) \\ \frac{\partial G}{\partial z} &= G \quad \text{on } z=0 \\ \frac{\partial G}{\partial z} &= 0 \quad \text{on } z=-h \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

無限遠方 ($x = \pm\infty$) では進行波形の解となる。

ここで、 G と ϕ にグリーンの定理を適用すると、(図-1)

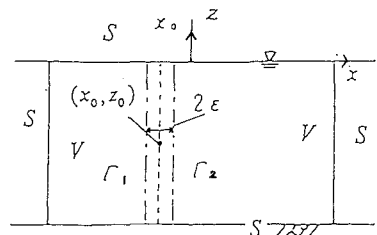


図-1 概念図

* 学生会員 北海道大学大学院 工学研究科
 ** 学生会員 工修 北海道大学大学院 工学研究科
 *** 正会員 工博 北海道東海大学助教授 工学部 海洋開発工学科

$$\int_V (\phi \Delta G - G \Delta \phi) dV = \int_S \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) dS \quad \dots (5)$$

式(4)の ΔG と式(6)の δ 関数の定義より(7)を得る。

$$\int_V f(x) \delta(x-x_0) dx = f(x_0) \quad \dots (6)$$

$$\phi(x_0, z_0) = - \int_S \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) dS \quad \dots (7)$$

次に式(4)の様な条件を満たすラプラス方程式の解として式(8)を与え、

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= e^{ikx} \cosh k(z+h) \\ F_n &= e^{knx} \cos k_n(z+h) \end{aligned} \right\} \quad \dots (8)$$

これらの級数和でグリーン関数を構成することを考える。ただし、分散関係式は式(9)である。

$$k \tanh kh = 1, \quad k_n \tanh k_n h = -1 \quad \dots (9)$$

ここで式(4)であたえられた δ 関数の定義を次のように拡張して与える。

$$\Delta G = \delta(x-x_0) \delta(z-z_0) \quad \dots (10)$$

またグリーン関数の持つ対称性より、 $x=x_0$ を中心に

$$G(x, x_0) = G(x_0, x) \quad \dots (11)$$

となる。この事と無限遠方での放射条件より、式(8)で与えられた関数の級数和としてグリーン関数を次のように与える。

$$\begin{aligned} G &= \frac{iC_0}{k} e^{ik|x-x_0|} \cosh k(z_0+h) \cosh k(z+h) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{k_n} e^{-k_n|x-x_0|} \cos k_n(z_0+h) \cos k_n(z+h) \end{aligned} \quad \dots (12)$$

ここで、 $x=x_0$ を中心に幅 2ε の帯状の領域を除いた領域(図-1)を考え、そこに G と ϕ についてグリーン関数の公式を適用する、

$$\int_{\Gamma_1+\Gamma_2} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) dS = - \int_S \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) dS \quad \dots (13)$$

式(7)より、

$$\int_{\Gamma_1+\Gamma_2} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) dS = \phi(x_0, z_0) \quad \dots (14)$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ では、 G の対称性と ϕ の性質より、

$$\left. \begin{aligned} G_{on\Gamma_1} &= G_{on\Gamma_2}, \quad \phi_{on\Gamma_2} = \phi_{on\Gamma_1} \\ \frac{\partial G}{\partial \nu}_{on\Gamma_2} &= \frac{\partial G}{\partial \nu}_{on\Gamma_1}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \nu}_{on\Gamma_1} = - \frac{\partial \phi}{\partial \nu}_{on\Gamma_2} \end{aligned} \right\} \quad \dots (15)$$

である、よって式(14)は、

$$2 \int_{\Gamma_1} \phi \frac{\partial G}{\partial \nu} ds = \phi(x_0, z_0) \quad \dots (16)$$

式(16)は、 $\partial G / \partial \nu$ が $x=x_0$ の z 軸に沿って $\delta(z-z_0)$ となることを要請する。

$$\frac{\partial G}{\partial \nu} = \frac{1}{2} \delta(z-z_0) \quad \dots (17)$$

式(12)を式(17)に代入すると、

$$\begin{aligned} C_0 \cosh k(z_0+h) \cosh k(z+h) \\ + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos k_n(z_0+h) \cos k_n(z+h) = \frac{1}{2} \delta(z-z_0) \end{aligned} \quad \dots (18)$$

式(18)の両辺に $\cosh k(z+h)$ と $\cos k_n(z+h)$ を乗じ、 $-h \leq z \leq 0$ で積分すると、 $\cosh k(z+h)$ や $\cos k_n(z+h)$ の直交性と δ 関数の性質(式(6))より、 C_0, C_n が求まる。

この C_0, C_n は John のものと一致する。

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= 1/(h + \sinh^2 kh) \\ C_n &= 1/(h - \sin^2 k_n h) \end{aligned} \right\} \quad \dots (19)$$

3. 収束性の検討

前章で John のグリーン関数を再導出したが、彼の用いた δ 関数には $x=x_0$ における z 軸上において展開項数 (N) を増加させても収束しないという性質がある。このことは周期 δ 関数を考え、フーリエ級数を求めると容易に分かる。

$$\sum_n A_n e^{inx} = \sum_m \delta(x-x_0+2\pi m) \quad \dots (20)$$

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{inx} \delta(x-x_0) dx = \frac{1}{2\pi} e^{inx_0} \quad \dots (21)$$

式(21)を用いて式(20)の級数和を求めると、良く知られているフーリエ核となり

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\sin\{(N+1/2)(x-x_0)\}}{\sin\{(x-x_0)/2\}} \quad \dots (22)$$

式(22)は $N \rightarrow \infty$ においても収束しない。このことが John のグリーン関数の収束性についての問題点であることが分かる。図-2 は式(22)の異なった展開項数 $(N=10, 30)$

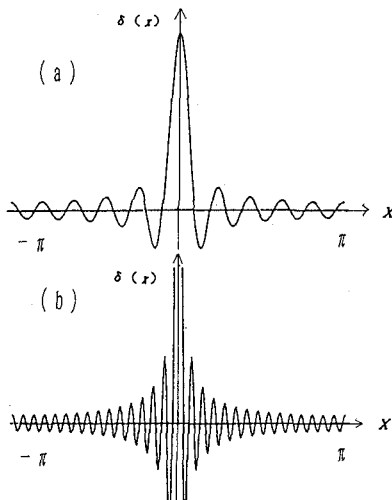


図-2 δ 関数 (John), (a) $N=10$, (b) $N=30$

を表している。Nを増加させても発散し収束しないことが分かる。

4. 修正グリーン関数

3.で述べた様な問題点を改善するため、以下のような条件を満たし収束性の良いδ関数を考えることにした。

$$\delta(x-x_0) = \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(x-x_0) \dots\dots\dots (23)$$

$$\int_{x_0-a}^{x_0+a} \delta(x-x_0) dx = 1 \dots\dots\dots (24)$$

$$\delta_a(x-x_0) = 0 \quad (x > x_0+a, x < x_0-a) \dots\dots (25)$$

a: specific lengs of δ-function

矩形パルス、三角形パルス、余弦パルスを検討し、最も良い収束性を示した余弦パルス(式(26))を適用した。

$$\delta_a = \frac{1}{2a} \left\{ 1 + \cos \frac{\pi(x-x_0)}{a} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

式(26)で与えたδ関数を式(18)の右辺に代入し、2.と同様にC₀, C_nを求めると、修正グリーン関数は次の様になる。

$$G = \frac{iC_0}{k} e^{ik|x-x_0|} \cosh k(z_0+h) \cosh k(z+h) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{k_n} e^{-k_n|x-x_0|} \cos k_n(z_0+h) \cos k_n(z+h) \dots\dots\dots (27)$$

$$C_0 = \frac{\sinh ak}{ak\{1+(ak/\pi)^2\}} / (h + \sinh^2 kh)$$

$$C_n = \begin{cases} \frac{\sinh ak_n}{ak_n\{1-(ak_n/\pi)^2\}} / (h - \sin^2 k_n h) & \text{on } ak_n \neq \pi \\ \neq \pi \\ 0.5 / (h - \sin^2 k_n h) & \text{on } ak_n = \pi \end{cases}$$

数値計算を行うとき、aはセグメントの長さの1/2以下である必要がある。

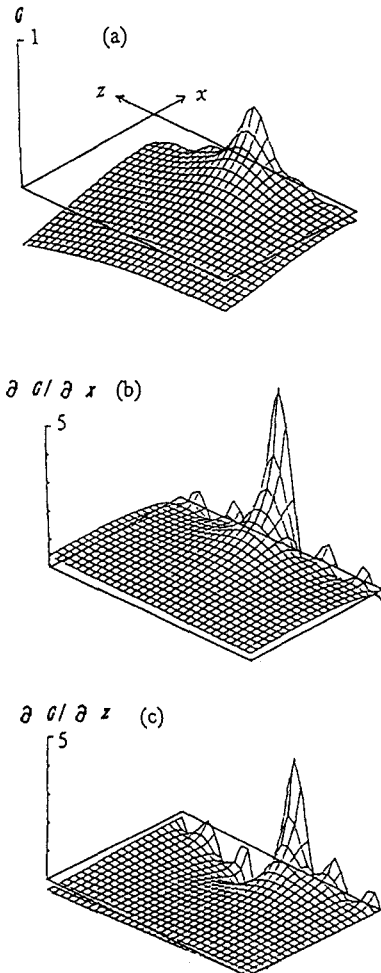


図-3 John N=10, h=1
(a) G, (b) ∂G/∂x, (c) ∂G/∂z

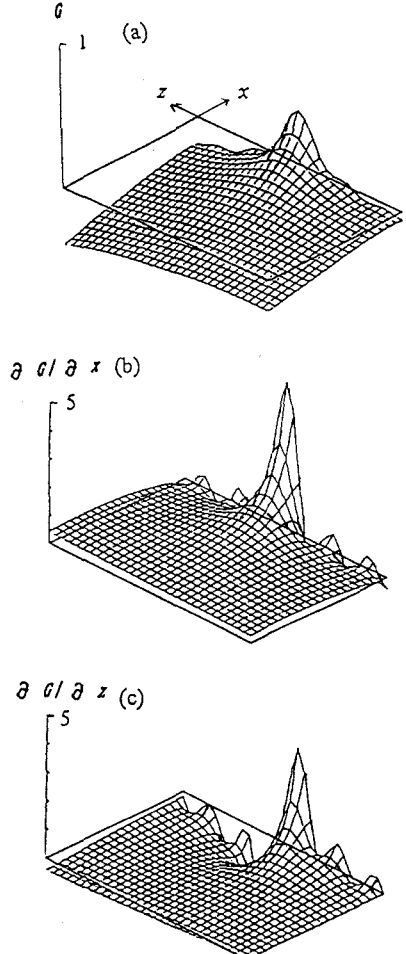


図-4 修正 N=10, h=1, a=0.05
(a) G, (b) ∂G/∂x, (c) ∂G/∂z

5. 結 論

図-3, 4, 5, 6 は全て左上辺が水面($z=0$), 右上辺が $x=x_0$ を表す。縦軸の値は無次元量である。

図-3 は John のグリーン関数とその x, z 方向微分である。無次元水深: $h=1$, 展開項数: $N=10$, 特異点: $(x_0, z_0) = (0, -0.5)$, である。図-4 は同じ条件の修正グリーン関数とその x, z 方向微分である。 δ 関数の定義幅は $2a=h/10$ である。 $N=10$ では, 両者の違いはあまり見られない。図-5, 6 は $N=30$ における図である。修正グリーン関数は $N=10$ に比べ, x, z 方向微分の z 軸方向の揺らぎが小さくなっているのに比べ John のグリーン関数は N を増加させても, z 軸方向の揺らぎは改善さ

れていない。

修正グリーン関数を用いる場合, δ 関数の定義幅(a)と展開項数(N)の適当な組み合わせが必要である。図-7 は $h=1$ において, $x=x_0$ における z 軸上の余弦パルスと修正グリーン関数の x 方向微分とのずれ (E_r) の contour 図である。 E_r は式(28)の様に計算した。

$$E_r = \left\{ \int_{-h}^{z_0-a} + \int_{z_0+a}^0 \right\} \left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| dz \dots\dots\dots (28)$$

図-7 の場合 $h=1, E_r=0.01$ では $N \times a$ の値が約 2.6 となっている。

本論文において著者らは John のグリーン関数の収束性の問題を検討し, 彼の用いた δ 関数に原因があることを指摘し, その問題点を解消した修正グリーン関数を提

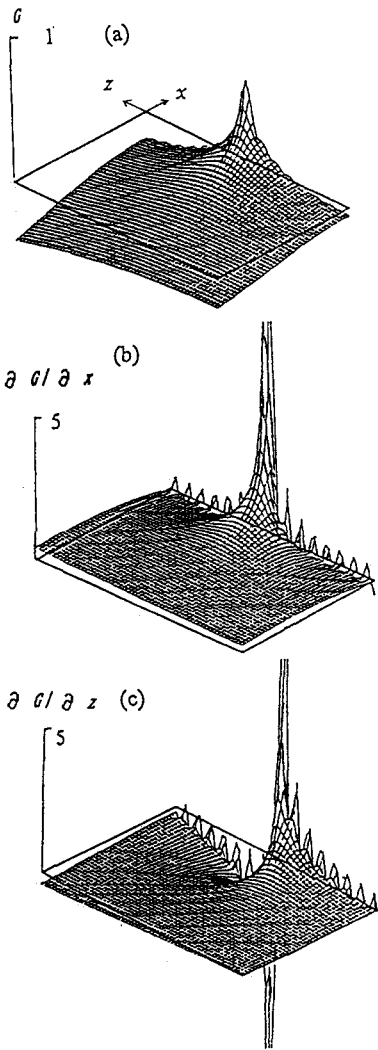


図-5 John $N=30, h=1$
(a) G , (b) $\partial G/\partial x$, (c) $\partial G/\partial z$

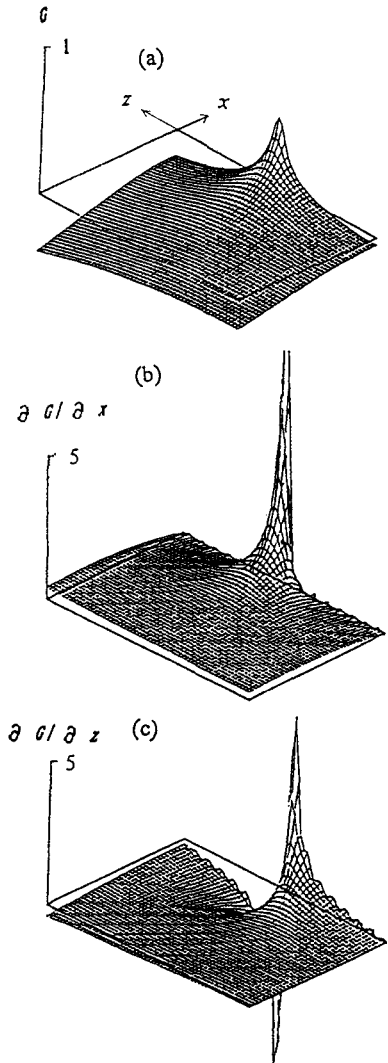


図-6 修正 $N=30, h=1, a=0.05$
(a) G , (b) $\partial G/\partial x$, (c) $\partial G/\partial z$

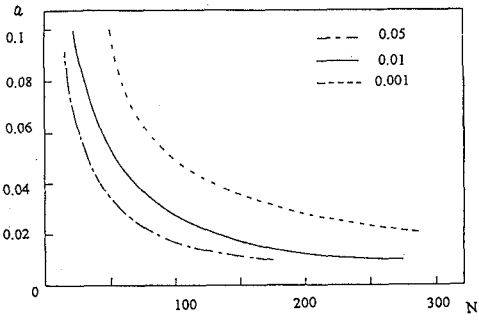


図-7 E_r の contour

案した。

また、修正グリーン関数を適用して問題を解く場合、級数表示形と積分表示形との関係や、数値計算における構造物上の適当な分割数の検討が必要である。

参考文献

- Fenton, J. (1978): Wave forces on vertical bodies of revolution, *J. Fluid Mech.*, Vol. 85, pp. 241-255.
- Isaacson, M. (1982): Fixed and floating axisymmetric structures in waves, *ASCE*, Vol. 108, No. ww 2, pp. 180-199.
- John, F. (1950): On the motion of floating bodies II. simple harmonic motion, *Comm. Pure Appl. Math.* Vol. 3, pp. 45-101.