

# 定常連成振動方程式とそのステップ地形への適用性

後野 正雄\*・平井 良昌\*\*

## 1. 緒 言

特殊な構造物やリーフを有する海岸には水深の不連続部が生じる。この水深の不連続部における波の変形を求める代表的手法としては領域分割法がある。しかし、領域分割法は水深一定の制限がある。

一方、緩勾配方程式を水深の不連続部に対しても適用できるように工夫する試みもある (Tsutsui・Lewis, 1991)。しかし、緩勾配方程式は速度ポテンシャルの鉛直構造として cosh 型の進行波成分のみを用いており、散乱項を必要とする水深不連続部の解析は原理的には不可能である。

これに対して著者らの一人 (後野, 1993) が提案した連成振動方程式では鉛直構造として鉛直座標  $z$  の多項式を用いており、原理的に進行波成分と散乱項を同時に考慮することが可能であると考えられる。

この連成振動方程式は非定常の方程式系で表されており、規則波のみならず多くの周波数の波が重なり合わさった不規則な波動場にも適用できることがすでにわかっている。しかし、この方程式は水底の条件を適切に考慮できていないため、水深の変化する領域においては波の変形を正確に求めるられないことが判明した。

本研究ではまずこの水底の条件を適切に考慮し、水深の変化する波の場においても波の変形を正確に求められる非定常連成振動方程式を誘導する。

また、砕波現象の生じない港内の波高分布などを求めるときは、定常規則波の解を重ね合わせることで非規則波浪場の波の変形を求めることができること等より、定常規則波による波の変形を求める要求も強い。そこで、本研究では定常規則波に対する定常型の連成振動方程式を求めることにする。最後に、この定常連成振動方程式を不連続な地形を有する波浪場に適用し、先に述べた、ステップ型的水深不連続部に対する適用性を検討する。

## 2. 定常連成振動方程式

### 2.1 水底の境界条件の取り込み

後野 (1993) が提案した一定水深に対する連成振動方程式を緩勾配の任意地形に対する方程式に書き換える。静水面上に原点を置き、鉛直上向きに  $z$ 、水平面上に  $x$ 、 $y$  軸を取る。まず変動圧力  $\bar{p} (= p/\rho + gz)$  をルジャンドルの多項式を用いて級数展開する。

$$\bar{p} = q_1 P_0(\bar{z}) + q_2 P_2(\bar{z}) + q_3 P_4(\bar{z}) + q_4 P_6(\bar{z}) \cdots (1)$$

ここで、 $\bar{z} = (1+z/h)$ 、 $h$  は水深で  $x$ 、 $y$  の関数、未定係数  $q_1, \dots, q_4$  は  $x$ 、 $y$ 、 $t$  の関数である。線形化された運動方程式の発散を求めることにより、変動圧力はラプラスの方程式を満たす。

$$\Delta \bar{p} = 0 \cdots \cdots \cdots (2)$$

水位変動を  $\eta$  としたとき、水面の力学的境界条件はルジャンドル多項式の性質より次式で表せる。

$$g\eta = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 \cdots \cdots \cdots (3)$$

また、運動学的境界条件と  $z$  方向の運動方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - w = 0 \quad \text{at } z=0 \cdots \cdots \cdots (4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z=0 \cdots \cdots \cdots (5)$$

これらの式より、鉛直方向の流速  $w$  を消去し、 $\bar{p}$  を級数展開してルジャンドルの多項式を用いて表すとともに、式 (3) を用いて係数  $q_4$  を消去すると次式を得る。

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 21g\eta - (21q_1 + 18q_2 + 11q_3) \cdots \cdots \cdots (6)$$

一方、水底の境界条件を変動圧力  $\bar{p}$  を用いて表すと次のようである。

$$\nabla h \cdot \nabla \bar{p} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z=-h \cdots \cdots \cdots (7)$$

ここで、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$  である。

未定係数  $q_m$ 、( $m=1, 2, 3$ ) に関する方程式はラプラス方程式 (2) にガラーキン法を適用することにより求めることができる。このとき、水底の境界条件式を次式のように加えることにより、水底の変化を適切に取り入れることができる。

\* 正会員 工博 大阪工業大学助教授 工学部土木工学科  
\*\* 学生会員 大阪工業大学大学院 工学研究科 土木工学専攻

$$\int_{-h}^0 P_{2(m-1)}(\bar{z}) \Delta \bar{p} dz + \left( \nabla h \cdot \nabla \bar{p} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) \Big|_{z=-h} \times P_{2(m-1)}(0) = 0$$

for  $m=1, 2, 3, \dots$  (8)

後野 (1993) は上式の左辺第 2 項を無視していた。この式を積分して求められた 3 つの方程式には  $|\nabla h|^2, \nabla^2 h$  に関する項が含まれる。緩勾配の仮定に従い、これらの項を無視する。また式 (3) を用いて係数  $q_s$  を消去すると以下の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \nabla^2 q_1 + \frac{1}{16} \nabla h \cdot (11 \nabla q_1 + 3 \nabla q_2 - 11 \nabla q_3) \\ & - \frac{1}{h^2} (21 q_1 + 18 q_2 + 11 q_3) \\ & = - \frac{5g}{16h} \nabla h \cdot \nabla \eta - \frac{21g}{h^2} \eta \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \nabla^2 q_2 + \frac{1}{64h} \nabla h \cdot (-95 \nabla q_1 + 129 \nabla q_2 + 165 \nabla q_3) \\ & - \frac{1}{h^2} (90 q_1 + 90 q_2 + 55 q_3) \\ & = \frac{65g}{64h} \nabla h \cdot \nabla \eta - \frac{90}{h^2} g \eta \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \nabla^2 q_3 + \frac{1}{128h} \nabla h \cdot (99 \nabla q_1 - 693 \nabla q_2 - 205 \nabla q_3) \\ & - \frac{1}{h^2} (99 q_1 + 99 q_2 + 99 q_3) \\ & = - \frac{333g}{128h} \nabla h \cdot \nabla \eta - \frac{99}{h^2} g \eta \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

式 (9) ~ (11) と式 (6) より、未知変数  $\eta, q_1, q_2, q_3$  による緩勾配任意地形上の連成振動方程式系が形成されている。

2.2 定常連成振動方程式

先の方程式系を定常規則波に適用する。まず、

$$q_m = \mathbf{R} \{ \hat{q}_m \exp(i\sigma t) \} \quad \text{for } m=1, 2, 3 \dots (12)$$

$$\eta = \mathbf{R} \{ \hat{\eta} \exp(i\sigma t) \} \dots \dots \dots (13)$$

と置く。ここで、 $\hat{\eta}, \hat{q}_m, (m=1, 2, 3)$  は複素振幅、 $\mathbf{R}$  は複素数の実数部を表す。これらを式 (6) に代入すると、 $\hat{\eta}$  を次のように表すことができる。

$$\hat{\eta} = \frac{1}{21\alpha g} (21 \hat{q}_1 + 18 \hat{q}_2 + 11 \hat{q}_3) \dots \dots \dots (14)$$

ここで、 $\alpha = 1 - \sigma^2 h / 21g$ 、 $\sigma$  は角周波数である。式 (9) ~ (11) に式 (12) (13) を代入し、上式を用いて  $\hat{\eta}$  を消去すると以下の定常型連成振動方程式が得られる。

$$\begin{pmatrix} \nabla^2 \hat{q}_1 \\ \nabla^2 \hat{q}_2 \\ \nabla^2 \hat{q}_3 \end{pmatrix} + \frac{\nabla h}{h} \underline{A} \begin{pmatrix} \nabla \hat{q}_1 \\ \nabla \hat{q}_2 \\ \nabla \hat{q}_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{h^2} \underline{B} \begin{pmatrix} \hat{q}_1 \\ \hat{q}_2 \\ \hat{q}_3 \end{pmatrix} = 0 \dots \dots \dots (15)$$

ここで  $\underline{A}, \underline{B}$  はマトリックスで、次式で表される。

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \frac{11}{16} + \frac{5}{16\alpha} & \frac{3}{16} + \frac{15}{56\alpha} & \frac{-11}{16} + \frac{55}{336\alpha} \\ \frac{-95}{64} & \frac{65}{64\alpha} & \frac{129}{64} - \frac{195}{224\alpha} & \frac{165}{64} - \frac{715}{1344\alpha} \\ \frac{99}{128} + \frac{333}{128\alpha} & \frac{-693}{128} + \frac{999}{448\alpha} & \frac{-205}{128} + \frac{1221}{896\alpha} \end{pmatrix} \dots \dots \dots (16)$$

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} \frac{21}{\alpha} - 21 & \frac{18}{\alpha} - 18 & \frac{21}{\alpha} - 11 \\ \frac{90}{\alpha} - 90 & \frac{540}{7\alpha} - 90 & \frac{330}{7\alpha} - 55 \\ \frac{99}{\alpha} - 99 & \frac{594}{7\alpha} - 99 & \frac{363}{7\alpha} - 99 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (17)$$

3. ステップ地形への適用

図-1 中に示したような断面 2 次元において水深不連続部を有する領域を考える。ここでは連成振動方程式の水深不連続部への適用性を確認することが目的であるので、水深不連続部近傍において水深は一定であるとする。水深の不連続部を  $x = x_0$  とし、この位置での全ての物理量を  $x_0 + 0$  の極限值と  $x_0 - 0$  の極限值に分けて考える。これは領域分割法と同様に領域を 2 つに分割することと同じである。例えば物理量として  $\hat{q}_m$  を例にとると、以後これらを次のように表記することにする。

$$\hat{q}_m^+ = \hat{q}_m |_{x=x_0+0}, \quad \hat{q}_m^- = \hat{q}_m |_{x=x_0-0} \dots \dots \dots (18)$$

領域を分割したとき、この境界上では力学的境界条件と運動学的境界条件が成り立たなければならない。

まず、運動学的境界条件は次のようである。

$$u^- = \begin{cases} u^+, & \text{for } -rh < z < 0 \\ 0, & \text{for } -h < z < -rh \end{cases} \dots \dots \dots (19)$$

ただし、 $0 \leq r \leq 1$  である。 $r$  が 1 を越えるときは式の表現を代えなければならない。上式を時間で微分し、水平方向の運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0 \dots \dots \dots (20)$$

を用いて  $u$  を消去し、 $\bar{p}$  を用いて運動学的境界条件を表すと次のようになる。

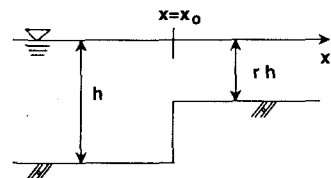


図-1 ステップ地形の模式図

$$\frac{\partial \bar{p}^-}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial \bar{p}^+}{\partial x}, & \text{for } -rh \leq z \leq 0 \\ 0, & \text{for } -h \leq z \leq -rh \end{cases} \quad \dots\dots\dots (21)$$

一方、力学的境界条件は次のようである。

$$\bar{p}^- = \bar{p}^+, \text{ for } -rh < z < 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

これらの物理的な関係式から  $\bar{q}_m$  の方程式に変換するために、式(21)と式(22)の両辺に重みとしてルジャンドルの多項式  $P_{2(m-1)}(\bar{z})$ ,  $m=1, 2, 3$  を掛け、水底から水面 ( $z=0$ ) まで積分する。これにより次のような関係式が得られる。

$$\bar{q}_m^+ = \bar{q}_m^- + \sum_{k=1}^3 \{a_{m,k}\} \bar{q}_k^-, \quad \text{for } m=1, 2, 3 \dots\dots (23)$$

$$\frac{\partial \bar{q}_m^+}{\partial x} = \frac{\partial \bar{q}_m^-}{\partial x} + \sum_{k=1}^3 \{b_{m,k}\} \frac{\partial \bar{q}_k^+}{\partial x}, \quad \text{for } m=1, 2, 3 \dots\dots (24)$$

ここで、 $a_{m,k}$ ,  $b_{m,k}$  は  $\alpha$  をパラメータとし、不連続部の水深比  $r$  の多項式で以下のような関数である。

$$a_{1,1} = \frac{(1-\alpha)(1-r)(2-r)}{16\alpha} \times (8-72r+168r^2-132r^3+33r^4) \quad \dots\dots (25)$$

$$a_{1,2} = \frac{3(1-r)(-2+r)}{112\alpha} \times (-16+144r-168\alpha r-336r^2+392\alpha r^2+264r^3-308\alpha r^3-66r^4+77\alpha r^4) \quad \dots\dots (26)$$

$$a_{1,3} = \frac{11(1-r)(-2+r)}{336\alpha} \times (-8+72r-84\alpha r-168r^2+294\alpha r^2+132r^3-252\alpha r^3-33r^4+63\alpha r^4) \quad \dots\dots (27)$$

$$a_{2,1} = \frac{5(-1+\alpha)(-2+r)(-1+r)r}{128\alpha} \times (-168+532r-462r^2+121r^3) \quad \dots\dots (28)$$

$$a_{2,2} = \frac{(-1+r)}{896\alpha} \times (896\alpha-10080r+10976\alpha r+36960r^2-43120\alpha r^2-43680r^3+50960\alpha r^3+21120r^4-24640\alpha r^4-3630r^5+4235\alpha r^5) \quad \dots\dots (29)$$

$$a_{2,3} = \frac{55(-2+r)(-1+r)r}{2688\alpha} \times (168-168\alpha-532r+924\alpha r+462r^2-882\alpha r^2-121r^3+231\alpha r^3) \quad \dots\dots (30)$$

$$a_{3,1} = \frac{9(1-\alpha)(-2+r)(-1+r)r}{128\alpha} \times (-28+238r-259r^2+75r^3) \quad \dots\dots (31)$$

$$a_{3,2} = \frac{9(1-r)r}{896\alpha} \times (-336+336\alpha+3024r-3528\alpha r-4536r^2+5292\alpha r^2+2454r^3-2863\alpha r^3-450r^4+525\alpha r^4) \quad \dots\dots (32)$$

$$a_{3,3} = \frac{(1-r)}{896\alpha} \times (-896\alpha-1848r+952\alpha r+16632r^2-26768\alpha r^2-24948r^3+45997\alpha r^3+13497r^4-25767\alpha r^4-2475r^5+4725\alpha r^5) \quad \dots\dots (33)$$

$$b_{1,1} = -1+r \quad \dots\dots (34)$$

$$b_{1,2} = 0 \quad \dots\dots (35)$$

$$b_{1,3} = 0 \quad \dots\dots (36)$$

$$b_{2,1} = \frac{5(-1+r)r}{128(1-r+\alpha r)} \times (-128+192r-128\alpha r-67r^2+67\alpha r^2) \quad \dots\dots (37)$$

$$b_{2,2} = \frac{(-1+r)}{896(1-r+\alpha r)} \times (896+896\alpha r-1665r^2+896\alpha r^2+679r^3-679\alpha r^3) \quad \dots\dots (38)$$

$$b_{2,3} = \frac{55(-1+r)(6-7r+7\alpha r)r^2}{896(1-r+\alpha r)} \quad \dots\dots (39)$$

$$b_{3,1} = \frac{9(-1+r)r}{128(1-r+\alpha r)} \times (-128+640r-128\alpha r-970r^2+522\alpha r^2+595r^3-483\alpha r^3-126r^4+126\alpha r^4) \quad \dots\dots (40)$$

$$b_{3,2} = \frac{9(-1+r)r^2}{896(-1+r-\alpha r)} \times (1110-2247r+1050\alpha r+1309r^2-987\alpha r^2-238r^3+238\alpha r^3) \quad \dots\dots (41)$$

$$b_{3,3} = \frac{(-1+r)}{896(1-r+\alpha r)} \times (896+896\alpha r+1980r^2+896\alpha r^2-9240r^3+3206\alpha r^3+9240r^4-7189\alpha r^4-2513r^5+2513\alpha r^5) \quad \dots\dots (42)$$

#### 4. 数値計算手法と計算結果

##### 4.1 スプラインを応用した数値計算法

先の連成振動方程式(15)の適用性を確認するために、一様斜面上を伝播するときの浅水変形とステップを有する水域を伝播する波の変形を計算する。ステップのある水域での波の変形は反射波と透過波が生じる。このため、適用性の確認のためには反射率、透過率を精度良く求める必要がある。また、浅水変形の確認のためには深海の

領域から極浅海域まで十分に広い水域を計算する必要がある。

単純な差分法では広い水域を計算するためには膨大な計算機容量が必要である。また、反射率を精度良く求める方法も確立されていない。そこで、3次のスプライン関数(例えば、市田・吉本, 1979)を応用した数値計算法を用いた。

a) 微分方程式のスプライン表示

ここでは1次元(x座標)に限って以下の議論を行う。まず、qmの空間勾配sm(=∂qm/∂x)も未知変数とする。計算の対象となる領域に計算用の接点(N個)を置く。このとき、接点の間隔は一定ではなく任意にとるものとする。次に隣り合う接点間(区間)のqmの変化を接点上のqm, smを用いて座標xの3次関数で表す。この3次関数を微分することにより、区間[j-1, j]の両端における2階の微分値はそれぞれ次のように与えられる。

∂²qm/∂x²|j = 2\*sm,j-1/δxj + 4\*sm,j/δxj - 6\*(qm,j - qm,j-1)/δxj² ... (43)
∂²qm/∂x²|j-1 = -4\*sm,j-1/δxj - 2\*sm,j/δxj + 6\*(qm,j - qm,j-1)/δxj² ... (44)

ここで添字のjは接点番号、δxjはj番目とj-1番目の接点間距離である。

このとき隣り合う区間で共有される接点上の2回微分値(∂²qm/∂x²)は同じ値をとらなければならない。このことから次のようなスプラインの条件式が得られる。

λj\*sm,j-1 + 2\*sm,j + μj\*sm,j+1 = 3λj\*(qm,j - qm,j-1)/δxj + 3μj\*(qm,j+1 - qm,j)/δxj+1 (j=2,..., N-1, m=1, 2, 3) ... (45)

ここでλj=δxj/(δxj+δxj-1), μj=1-λjである。スプライン補間を行うときは、この式を解いてsmを求め、3次関数を決定する。

x=xjにおける2階微分値(式(44))を目的の微分方程式(式(15))に代入することにより、微分方程式を未知変数qm, smに関する代数方程式に変換できる。

2/δxj\*sm,j-1 + 4/δxj\*sm,j - 6/δxj²\*(qm,j - qm,j-1) + 1/h \* dh/dx \* Σ(Am,k\*sk,j) + 1/h² \* Σ(Bm,k\*qk,j) = 0 (j=2,..., N, m=1, 2, 3) ... (46)

ここで、Am,k, Bm,kはマトリクスA, Bの要素を表す。また、j=1の点に関しては式(44)を代入することにより次式を得る。

-4/δx2\*sm,1 - 2/δx2\*sm,2 + 6/δx2²\*(qm,2 - qm,1) + 1/h \* dh/dx \* Σ(Am,k\*sk,1) + 1/h² \* Σ(Bm,k\*qk,1) = 0 (m=1, 2, 3) ... (47)

b) 入射境界と透過境界

1つの接点上にqm, smの2種類の未知変数を持つ方程式に対して、式(45)と式(46)が接点j=2,..., N-1に与えられている。両端点(j=1, j=N)については境界条件を加えることにより、すべての接点上での未知数を求めることができる。

まず入射端(j=1とする)については未知変数を入射波(既知量)と反射波(未知量)に分離次のように表す。

qm,1 = qm,1I + qm,1R, sm,1 = sm,1I + sm,1R ... (48)

ここで、上付き添字Iは入射波の値、Rは反射波の値であることを意味する。qm,1とsm,1は式(45)(j=2), (46)(j=2), (47)に表れるので、これらの式を代入し、入射波に関する量を既知量として扱う。

入射波をx軸の正の方向に進むものとするとの関係が与えられる。

sm,1I = -ik\*qm,1I ... (49)

sm,1R = +ik\*qm,1R ... (50)

ここで、kは波の波数を表し、次式の分散関係式を満たす。

σ² = gk tanh kh ... (51)

式(50)は両辺とも未知量であるので、この式は入射境界における境界条件として用いる。この式は反射波に対する透過条件でもある。

他端j=Nにおいては透過波しか存在しないものとする。境界条件として、次のような透過条件が与えられる。

sm,N = -ik\*qm,N ... (52)

入射端には反射波の、他端には透過波の透過条件を与える。すなわち、入射端を除いて、すべての接点上の未知量は入射波成分と反射波成分が合成されたものとなる。またこれにより反射率、透過率を容易に求めることができる。反射率KR, 透過率KTは次式で求められる。

KR = |qm,1R/qm,1I|, KT = |qm,N/qm,1I| ... (53)

qmはqmを用いて式(14)から計算できる。

本計算手法の特徴としては両端点を含む全ての接点で計算の基礎式(15)を解くことが上げられる。差分法を用いると端部は境界条件を適用するため、端部で基礎式を満たす必要はない。しかし、本計算手法における未知量は本来の未知量に加えてその勾配も未知量となるため、未知変数の数は2倍(平面2次元では3倍)となる。

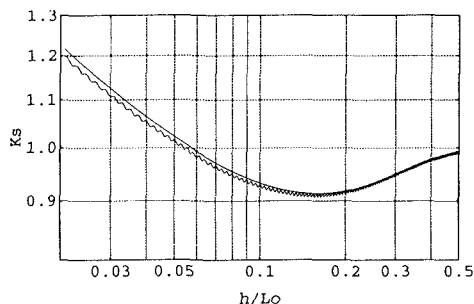


図-2 一樣斜面上(勾配1/100)の浅水変形

一方、本数値計算法では接点の間隔が自由にとれること、および計算精度が高いことは接点の個数を少なくするために有利に働く。特に、波動場のように接点の間隔が波長に依存し、波長が場所によって大きく変化するような場合には、接点の個数を少なくすることができる。

本計算手法を水深不連続部に適用する場合は次のように行う。まず、水深不連続部に仮想的な境界を設ける。この仮想境界により計算領域を分割し、それぞれに対して先の計算手法を適用する。ただし、仮想境界上における境界条件としては式(23)および式(24)を用いる。

### c) 数値計算結果

図-2は一樣斜面上で波が進行したときの波高の変化を計算し、浅水係数 $K_s$ と比較して示したもので、斜面勾配1/100、 $\delta x = L/32$ の計算結果である。

図中の滑らかな実線は微小振幅波理論による浅水係数を示し、他方が計算結果を示している。計算結果は細かな振動を示している。この振動は波の反射による部分重複波の波高分布によるものである。波の反射は斜面上で生じており、勾配の大きな場合の計算では反射率が大きくなる。この反射が境界条件によるものでないことは一定水深の場合の波高分布により確認している。

微小振幅波理論による浅水係数は反射波が存在しない場合の値である。反射が斜面上で生じる場合には、波による伝達エネルギーは波が斜面上を進行するにつれて反射波により沖側へ運ばれる伝達エネルギー分だけ小さくなっていく。したがって、反射波の存在により斜面上の波高分布は微小振幅波理論による浅水係数より小さくなる。図-2において、計算結果が比水深が小さくなるにつれて微小振幅波理論による浅水係数より小さくなっているのはこのためである。

図-3は図-1に示したような水深不連続部を有する水域に深い側から波が入射した場合の透過率と反射率を示したものである。図中の実線は井島(1971)による理論解を示し、丸印が本計算結果を示している。パラメー

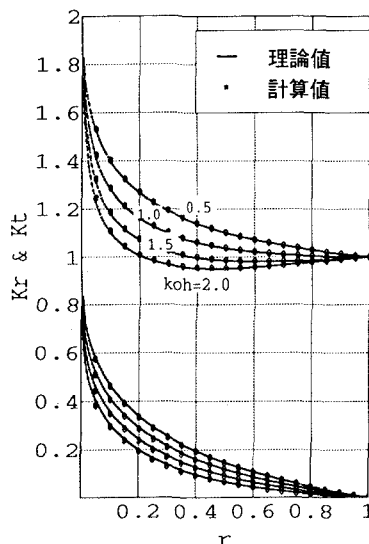


図-3 ステップ地形における透過・反射率

ターは $k_0 h (= \sigma^2 h/g)$ である。この図より本計算結果は理論値と非常に良く一致し、連成振動方程式が水深不連続部へも適用可能であることが分かる。また、 $x_0^-$ と $x_0^+$ における波高を比較すると、計算結果の範囲内において両者はたかだか0.1%程度の誤差で一致していた。このことは、本理論では水深不連続部における生じる波高の不連続も生じないことを意味する。

## 5. 結 論

緩勾配任意地形上の連成振動方程式を求めた。連成振動方程式を定常規則波に適用し定常連成振動方程式を得た。ステップ地形に連成振動方程式を適用し、良好な解を得た。これにより、連成振動方程式が散乱項を進行波成分と同時に取り扱えることを示した。最後に、本研究を遂行するに当たり、当時本学学部生河野高輝君、谷口伸彦君、味田勇二君の協力を得た。ここに記して謝意を表する。

## 参 考 文 献

- Tsutsui, S. and D. P. Lewis (1991): Wave height prediction in unbounded coastal domains with bathymetric discontinuity, C. E. J., Vol. 34, No. 2, pp. 145-158.
- 市田浩三・吉本富士市 (1979): スプライン関数とその応用, 教育出版株式会社, 220 p.
- 井島武士 (1971): 最近の波浪理論における境界値問題の解法とその応用, 1971年度水工学に関する夏季研修会講義集, Bコース, B-1-1~B-1-31.
- 後野正雄 (1993): 緩勾配地形上の不規則波動場の支配方程式とその特性, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 21-25.