

強非線形平面不規則波動場に対する連成振動方程式と その基礎的特性

後野 正 雄*

1. 緒 論

不規則な波動場を解析する目的の一つに砕波による波の変形とそれに伴う流れの解析がある。この砕波による波の変形を不規則な波動場で解析するためには非定常解析が有力な手段である。また、砕波後の波の変形を正確に求めるためには非線形波動場における解析が望まれる。

砕波点以浅のみを対象にすればすでにブーネスク方程式を用いた砕波後の波と流れの解析手法があり、研究成果もいくつか報告されている。(例えば、Abbotら, 1978; 榎木ら, 1985; 片山ら, 1994) この手法の問題点としては沖側の入射境界条件を適切に与える事が難しいことがあげられる。このような理由により、深海域から長波領域まで幅広く適用できる非定常非線形不規則波動場の解析手法の開発が望まれている。

近年、線形波動場に対しては不規則波の非定常解析手法がいくつか提案されている。磯部らは一連の研究により(窪ら, 1991; 小竹ら, 1992; 磯部ら, 1993) 非定常緩勾配方程式に習い、不規則波動場を解析できる2階の波動型偏微分方程式を開発した。

灘岡ら(1993a)はただか数個の進行波の重ね合わせで不規則な波動場(強分散線形波動場)を表現した。個々の進行波は水平方向の流速を表すために用いられ、流速は波動場の運動方程式を満たすように定められる。

後野(1993)は変動圧力のラプラス方程式を用い、変動圧力を直交関数形で展開する事により、3次元のラプラス方程式を平面2次元の楕円型方程式で表した。不規則な波動場は、この方程式と水面に関する運動学的境界条件から得られる振動方程式との組み合わせにより、連成振動方程式の形式で表現されている。

一方、灘岡ら(1993b)は先の強分散線形波動場の方程式を非線形波動場へ拡張することを試みた。非線形性は良好に表現できたが、流速成分を1つに制限したために強分散性は犠牲になった。

本研究は後野(1993)による連成振動方程式を非線形

波動場へ拡張し、強非線形波動場に対する連成振動方程式を提案し、その基礎的な性質と波動場への適用性を検討したものである。

2. 理 論

2.1 基礎方程式と境界条件

a) 変動圧力のラプラス方程式

静水面上に原点を置き、鉛直上向きに z 、水平面上に x, y 軸を取り、流速を $\vec{v}=(u, v, w)$ で表す。完全流体の連続式、運動方程式はそれぞれ次の様である。

$$\text{div } \vec{v} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} = -\text{grad} \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 p は圧力、 ρ は流体の密度、 g は重力の加速度である。

この式(2)の発散を求め、式(1)を用いて整理すると次のような楕円型の方程式が得られる。

$$\Delta \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 + \frac{p}{\rho} + gz \right) = (\text{rot } \vec{v})^2 - \vec{v} \cdot (\text{rot rot } \vec{v}) \dots\dots\dots (3)$$

ここで Δ は3次元のラプラシアンである。式(3)の右辺は渦度を含んでいる。今、渦なし流れを仮定し、変動圧力 \bar{p} を

$$\bar{p} \equiv \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 + \frac{p}{\rho} + gz \right) \dots\dots\dots (4)$$

と定義すると、変動圧力に関する基礎式として次式のラプラス方程式を得る。

$$\Delta \bar{p} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

この変動圧力 \bar{p} は単位質量当たりのエネルギーを表している。しかし、線形化して速度の2乗項を無視すると、静水圧を除いた変動圧力の性質が明瞭になる。本論文では後野(1993)の表現に従い \bar{p} を変動圧力と呼ぶことにする。

b) 境界条件

水面の位置を $z-\eta(x, y, t)=0$ とした時、水面の力学的境界条件は $p=0$ であるので、これを変動圧力 \bar{p} の境界条件として書き換えると以下のようになる。

* 正会員 工博 大阪工業大学助教授 工学部土木工学科

$$\bar{p} = g\eta + \frac{1}{2}\bar{v}^2 \quad \text{at } z = \eta \quad \dots\dots\dots(6)$$

また、水底の境界条件は

$$\frac{1}{\sqrt{1+(\nabla h)^2}} \left\{ \nabla h \cdot \nabla \bar{p} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots(7)$$

ここで $h = h(x, y)$ は水深, ∇ は水平方向の微分演算子で, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ で定義される。

2.2 支配方程式の導出

a) 変動圧力の級数展開

後野 (1994) と同様, 変動圧力 \bar{p} の鉛直方向分布を偶数次のルジャンドル多項式を用いて級数表示する。

$$\bar{p} = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(x, y, t) P_{2(m-1)}(\bar{z}) \dots\dots\dots(8)$$

ここで, $\bar{z} = (h+z)/(\eta+h)$, q_m は級数展開の係数, $P_m(\bar{z})$ は m 次のルジャンドル多項式である。

非線形理論では z は区間 $[-h, \eta]$ で定義されるので, \bar{z} はこれを $[0, 1]$ の区間に変換した鉛直座標である。また, この区間 $[0, 1]$ において偶数次のルジャンドル多項式は直交性を有し, 変動圧力 \bar{p} を式 (8) のような級数で表示することができる。(例えば森口ら, 1960)

本論文では以降, 式 (8) の始めの 4 項だけを採用し, 以下の議論を進めることにする。

b) 水面の力学的境界条件

まず, 水面 ($\bar{z}=1$) において, 偶数次のルジャンドル多項式は $P_{2(m-1)}(1)=1$ という値をとる。したがって, 水面の境界条件式 (6) は次の様に書替えられる。

$$\begin{aligned} \bar{p}_0 &\equiv g\eta + \frac{1}{2}\bar{v}^2 \quad \text{at } z = \eta \\ &= q_1 + q_2 + q_3 + q_4 \quad \dots\dots\dots(9) \end{aligned}$$

c) 未知変数 q_m の支配方程式

級数展開の項数を 4 に限ると変動圧力 \bar{p} は次の様になる。

$$\bar{p} = q_1 P_0(\bar{z}) + q_2 P_2(\bar{z}) + q_3 P_4(\bar{z}) + q_4 P_6(\bar{z}) \dots\dots(10)$$

この式の中の未知変数 $q_m = q_m(x, y, t)$ は式 (5) のラプラス式と式 (7) を満たすように決定しなければならない。そこで, 次式のようにガラーキン法を用いて係数 q_m の支配方程式を求める。

$$\begin{aligned} &\int_{-h}^{\eta} P_{2(m-1)}(\bar{z}) \Delta \bar{p} dz \\ &+ \left(\nabla h \cdot \nabla \bar{p} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) \Big|_{z=-h} \times P_{2(m-1)}(0) = 0 \\ &\quad \text{for } m=1, 2, 3 \dots\dots\dots(11) \end{aligned}$$

この式を積分して求められた 3 つの方程式には $|\nabla h|^2$, $\nabla^2 h$ に関する項が含まれる。緩勾配の仮定に従い, これらの項を無視する。また式 (9) は代数方程式になっているので, これを用いて係数 q_4 を消去すると最終的に以下の

方程式が得られる。

$$\begin{aligned} &\nabla^2 q_1 + \frac{1}{d}(2\nabla \eta \cdot \nabla q_1) + \frac{1}{d}(\nabla^2 \eta q_1) \\ &+ \frac{1}{16d} \nabla h \cdot (11\nabla q_1 + 3\nabla q_2 - 11\nabla q_3) \\ &- \frac{\theta}{d^2} (21q_1 + 18q_2 + 11q_3) \\ &= \frac{1}{16d} (32\nabla \eta - 5\nabla h) \cdot \nabla \bar{p}_0 \\ &- \frac{1}{d^2} (21\theta - d\nabla^2 \eta) \bar{p}_0 \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\nabla^2 q_2 + \frac{2}{d} \nabla \eta \cdot \nabla (5\nabla q_1 + 3\nabla q_2) \\ &+ \frac{1}{64d} \nabla h \cdot (-95\nabla q_1 + 129\nabla q_2 - 165\nabla q_3) \\ &+ \frac{1}{32d^2} \nabla \eta \cdot \nabla h (15q_1 + 159q_2 + 55q_3) \\ &+ \frac{1}{d} \nabla^2 \eta (5q_1 + 3q_2) \\ &- \frac{1}{d^2} \theta (90q_1 + 84q_2 + 55q_3) - \frac{6q_2}{d^2} \\ &= \frac{1}{64d} (640\nabla \eta + 65\nabla h) \cdot \nabla \bar{p}_0 \\ &- \frac{1}{d^2} \left(90\theta - \frac{15}{32} \nabla \eta \cdot \nabla h - 5d\nabla^2 \eta \right) \bar{p}_0 \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\nabla^2 q_3 + \frac{2}{d} \nabla \eta \cdot \nabla (9\nabla q_1 + 9\nabla q_2 + 5\nabla q_3) \\ &+ \frac{1}{128d} \nabla h \cdot (99\nabla q_1 - 693\nabla q_2 - 205\nabla q_3) \\ &+ \frac{1}{64d^2} \nabla \eta \cdot \nabla h (261q_1 + 117q_2 - 679q_3) \\ &+ \frac{1}{d} \nabla^2 \eta (9q_1 + 9q_2 + 5q_3) \\ &- \frac{1}{d^2} \theta (99q_1 + 99q_2 + 79q_3) - \frac{20q_3}{d^2} \\ &= \frac{1}{128d} (2304\nabla \eta - 333\nabla h) \cdot \nabla \bar{p}_0 \\ &- \frac{1}{d^2} \left(90\theta + \frac{261}{64} \nabla \eta \cdot \nabla h - 9d\nabla^2 \eta \right) \bar{p}_0 \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

ここで, $d = h + \eta$ は全水深, $\theta = 1 + (\nabla \eta)^2$ である。この式は式 (9) を用いて q_4 を消去した式であるので, 水面の力学的境界条件をとり込んだ式である。なお, q_4 は式 (9) を用いて求めることができる。

d) 水面の運動学的境界条件式

水面の運動学的境界条件式と運動方程式は次のように表すことができる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_s \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_s \frac{\partial \eta}{\partial y} - w_s = 0 \quad \text{at } z = \eta \quad \dots\dots(15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0 \quad \text{at } z = \eta \quad \dots\dots\dots(16)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0 \quad \text{at } z = \eta \quad \dots\dots\dots(17)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = \eta \dots \dots \dots (18)$$

ここで、添字 s は水表面での物理量を表す。計算に必要な物理量は η, u_s, v_s, w_s である。 η は式(15)により求められる。しかし、水表面流速 u_s, v_s, w_s は式(16)~(18)を用いて求めることは難しい。そこで、水表面流速に関する運動方程式を考えることにする。

e) 水表面流速の運動方程式

水表面流速は次のように定義されており、

$$u_s(x, y, t) = u(x, y, z, t)|_{z=\eta(x,y,t)} \\ = u(x, y, \eta(x, y, t), t) \dots \dots \dots (19)$$

$$v_s(x, y, t) = v(x, y, z, t)|_{z=\eta(x,y,t)} \\ = v(x, y, \eta(x, y, t), t) \dots \dots \dots (20)$$

$$w_s(x, y, t) = w(x, y, z, t)|_{z=\eta(x,y,t)} \\ = w(x, y, \eta(x, y, t), t) \dots \dots \dots (21)$$

これらは平面2次元上で定義された物理量である。ここでは、式(16)~(18)を u_s, v_s, w_s の方程式に変換することを考える。先の定義に注意して u_s, v_s, w_s を時間 t 、および水平座標 x, y について偏微分すると次のようになる。

$$\frac{\partial \cdot_s}{\partial t} = \frac{\partial \cdot}{\partial t} \Big|_{z=\eta} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial \cdot}{\partial z} \Big|_{z=\eta} \dots \dots \dots (22)$$

$$\nabla \cdot_s = \nabla \cdot \Big|_{z=\eta} + \nabla \eta \frac{\partial \cdot}{\partial z} \Big|_{z=\eta} \dots \dots \dots (23)$$

ここで、 \cdot は u, v, w を表す。これらの式と x, y 方向の渦度の定義式

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = \xi, \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = \zeta \dots \dots \dots (24)$$

および連続式(1)を用いて、水表面における z 方向の偏微分を x, y 方向の偏微分に置き換えると次の式が得られる。

$$\frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=\eta} = -\{\nabla \bar{v}_s - \nabla \eta \cdot \nabla w_s - \nabla \eta \cdot \bar{R}\} / \theta \dots (25)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \Big|_{z=\eta} = (\nabla w_s + (\nabla \cdot \bar{v}_s) \nabla \eta + \bar{R}) / \theta \dots \dots \dots (26)$$

ここで、 $\bar{v}_s = (u_s, v_s)$ は水表面上の水平方向流速ベクトルであり、 $\bar{R} = (-\zeta, \xi)$ は水表面の水平軸を有する渦ベクトルである。これらの式と式(22)~(23)を用いると、式(16)~(18)は次のように書き換えられる。

$$\frac{\partial \bar{v}_s}{\partial t} + \nabla \bar{p} \Big|_{z=\eta} - \frac{\partial \eta}{\partial t} \{\nabla w_s + (\nabla \cdot \bar{v}_s) \nabla \eta\} / \theta = 0 \dots (27)$$

$$\frac{\partial w_s}{\partial t} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \Big|_{z=\eta} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \{\nabla \cdot \bar{v}_s - \nabla \eta \cdot \nabla w_s\} / \theta = 0 \dots (28)$$

本論文では渦無し流れを仮定しているので上式を導く際に $\xi = 0, \zeta = 0$ を用いている。

式(27)と式(28)の第2項はルジャンドル多項式の性質からそれぞれ次のように与えられる。

$$\nabla \bar{p} \Big|_{z=\eta} = \nabla \bar{p}_0 + \frac{\nabla \eta}{d} (21q_1 + 18q_2 + 11q_3 - 21\bar{p}) \dots \dots \dots (29)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \Big|_{z=\eta} = \frac{(21q_1 + 18q_2 + 11q_3 - 21\bar{p})}{d} \dots \dots \dots (30)$$

2.3 非線形連成振動方程式の特性

以上の議論をまとめると、以下ようになる。未知量は変動圧力を級数表示した際の係数 q_1, q_2, q_3 、水位変動量 η 、水表面流速 u_s, v_s, w_s の7つあり、すべて x, y, t の平面上で定義された物理量である。

係数 q_1, q_2, q_3 の支配方程式は変動圧力 \bar{p} のラプラス方程式から導かれた式(12)~(14)である。この式は水面の力学的境界条件を取り込んだ式である。

水位変動 η は式(15)の水面の運動学的境界条件により、水表面流速 u_s, v_s, w_s は水面における運動方程式より得られた式(27)および式(28)によりその時間発展が決定される。

これらの方程式系は完全流体渦無し流れの仮定の下で水面の力学的・運動学的境界条件を厳密に満たし、緩勾配の水底の境界条件を満たす。すなわち、強非線形モデルの範疇に属する。

a) 非線形連成振動方程式の基本的特性

これらの方程式系を線形化すると、当然のことながら、後野(1994)の提案した線形波動場に対する連成振動方程式と一致する。この線形の連成振動方程式は比水深 $h/L \leq 1/2$ の波動場に対して高い精度で適用できることが知られている。このことから、本論文で提案しようとする非線形の連成振動方程式もかなり広い範囲の比水深の波に対して適用できることが期待できる。

3次元波動場を2次元平面に変換して解くことは数値計算上の容量とプログラムのコーディングに要する労力を削減する上でたいへん有利に働く。ただし、このようなモデルでは基礎式を鉛直方向に積分するため、砕波時の波形の巻き込みなどは再現できない。

b) 渦度の取扱について

本論文では渦無しの流れを仮定しているが、渦度を何らかの方法で計算するか、あるいは渦度の鉛直方向分布をモデル化することにより渦の影響を連成振動方程式の中に取り入れること可能である。式(5)の代わりに式(3)を考え、右辺の渦度に関する項を計算、あるいはモデル化することにより、変動圧力に与える渦度の影響が考慮できる。また、水表面の渦度の水平成分 ξ, ζ が与えられれば、式(27)、(28)に ξ, ζ を残しておくことにより、水位変動 η への渦の影響を考慮できる。

また、オイラーの運動方程式(式(2))をN-S方程式に変更することにより、粘性の影響を考慮することができ、この場合には粘性項は変動圧力のラプラス方程式

(式(3))には影響を及ぼさない。しかし、運動方程式である式(27)~(28)には粘性項が加わることになる。この粘性項の働きは渦の取扱と密接な関係がある。

残念ながら現段階では渦度を求める手法やモデル化は完成されたものがなく、渦や粘性項を取り扱うことはできない。しかし、連成振動方程式系にこれらの効果を取り入れる可能性は残されており、理論的な拡張性は高いといえる。

3. 数値計算手法と計算結果

3.1 数値計算手法

強非線形連成振動方程式系の波動場への適用性を確認するために鉛直2次元断面で一様水深場を伝播する孤立波の伝播と孤立波の衝突を計算することにする。このため、平面2次元で定義された方程式は1次元の方程式として解く。

非線形性項を正確に評価するため、数値計算を高い精度で行わなければならない。このために、後野ら(1994)による3次のスプライン関数を応用した計算手法を用いた。

a) 時間発展型偏微分方程式の解法

η , u_s , w_s の x に関する偏微分値は η , u_s , w_s の x が与えられればスプライン関数を利用して定めることができる。このとき、式(15)および式(27)~(28)は連立常微分方程式と見なすことができる。このように、本論文では各節点上の方程式(式(15)および式(27)~(28))を連立常微分方程式とみなした。この常微分方程式の解法には4次の予測子・修正子法の一つであるアダムス・バッシュフォース・ムルトン法を用いた。

この手法を差分法と比較すると、空間差分に関しては N 個の節点を全て用い、時間に関しては4次の精度を有することになる。また空間に関しては節点の間隔を差分法に比べて大きくすることができる。

計算は水位変動のない静水の状態を初期条件とし、入射波としては Fenton (1972) の第3次近似解を用いた。

3.2 数値計算結果

a) 単一ソリトンの伝播

図-1は左から右へ伝播するソリトンの計算結果を水位変動 η の空間波形で示したもので、上から波頂高水深比 $a/h=0.1, 0.3, 0.4$ の結果である。なお水深 h は1m、時刻幅 Δt は0.1sとし、空間の刻み幅 Δx はクーラン数が1となるように定めた。この計算条件は図-2, 3についても同じである。

$a/h=0.4$ の場合を除いて、ソリトンは波形をほとんど変化させることなく伝播し、その伝播速度は理論値とほぼ一致している。 $a/h=0.4$ の場合にはソリトンの伝播とともにその後方に tail と呼ばれる小さな変動とそれに続

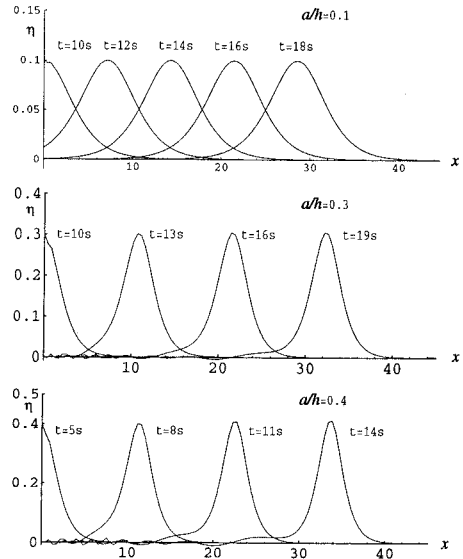


図-1 ソリトンの伝播計算結果

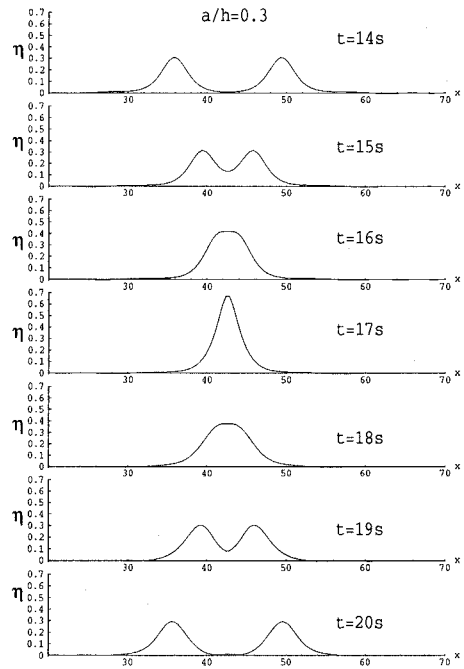
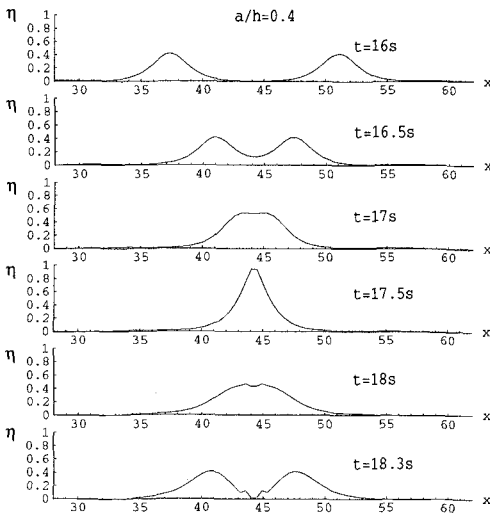


図-2 孤立波の衝突 ($a/h=0.3$)

く細かな変動が生じている。これらは数値計算上のものであるのか、第3次近似解に含まれる誤差によって生じたものであるのかは判断できない。しかし、全体的な波形はソリトンとしての特性を明確に示している。

b) ソリトンの衝突

図-2, 3は左右から中央へ向かってソリトンを入射させた場合の計算結果で、図-1と同様に水位変動 η の空

図-3 孤立波の衝突 ($a/h=0.4$)

間波形を示している。図-2は $a/h=0.3$ 、図-3は $a/h=0.4$ の結果である。まず、図-2についてみると、左右両側から入射して来たソリトンが近づき、衝突し、反対方向に通り返っていく様子が表れている。 $t=17$ sの時に峰と峰が衝突しており、このときの最大波頂高は入射したソリトンの波頂高の2倍 ($2a=0.6$)を上回っている。これは非線形性の影響が表れたものである。またこの値は重複波の砕波限界の波高水深比 $H_0/h_B=0.57$ (水理公式集)を上回っている。しかし、衝突後、通り返けて干渉がなくなると2つのソリトンは衝突前の形に戻り、最大波頂高もそれぞれ元の0.3に戻っている。このように、非線形干渉を起こしながら、衝突後はあたかも線形理論のように元の波形に戻るソリトンの衝突現象が明確に計算されている。

$a/h=0.4$ の図-3においても良く似た波形が表れているが、波の峰が衝突し ($t=17.5$ s)、その後波が左右に分かれ始める段階で図面の中央部 ($x=44$) 当りの波形が乱れ始め ($t=18$ s)、その直後に乱れが大きくなり計算が止まった ($t=18.3$ s)。峰と峰が重なり合わさった時 ($t=17.5$ s)の最大波頂高水深比は0.9に達しており、これは明らかに砕波現象を示したものと考えられる。

4. 結 論

緩勾配地形上の強非線形不規則波動場の支配方程式と

して、非線形連成振動方程式系を導いた。この非線形連成振動方程式系は変動圧力 (単位質量当たりのエネルギー) \bar{p} の級数展開係数 q_1, q_2, q_3 に関する楕円型の方程式 (式 (12), (13), (14)) と、水位変動 η および水表面流速 u_s, v_s, w_s に関する1階の時間発展型偏微分方程式 (式 (15), (27), (28)) からなる。

これらの方程式はすべて平面2次元上における物理量を対象としたものであり、水表面における非線形性を厳密に取り扱いかつ、3次元波動場を平面2次元上で表した新しいモデルである。

一様水深、断面2次元の波動場に対してこれらの方程式を適用し、孤立波の伝播と孤立波同士の衝突を解くことにより、強非線形連成振動方程式系の基礎的な適用性を確認した。

最後に、本研究を遂行するに当たり当時本学学部学生石井利典君、田中二郎君、石井敏博君の協力を得た。ここに記して謝意を表する。

参 考 文 献

- 磯部雅彦 (1994): 有利式近似に基づく非定常不規則波動方程式, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 26-30.
- 片山裕之・佐藤慎司 (1994): Boussinesq 方程式を用いた不規則波の浅水・砕波変形の計算法, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 16-20.
- 窪 泰浩・小竹康夫・磯部雅彦・渡辺 晃 (1991): 非定常緩勾配不規則波動方程式について, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 45-50.
- 小竹康夫・磯部雅彦・渡辺 晃 (1992): 非定常緩勾配不規則波動方程式の高精度化, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 91-95.
- 榎木 亨・李 宗燮・出口一郎・松山 章 (1985): 非線形分散理論による波浪変形および海浜流の数値予測モデルについて, 第32回海岸工学講演会論文集, pp. 238-242.
- 灘岡和夫・中川康之 (1993a): 不規則波動シミュレーションのための強分散波動方程式の導出とその基本特性の検討, 土木学会論文集, No. 467/II-23, pp. 83-92.
- 灘岡和夫・中川康之 (1993b): 新しい非線形・分散性波動方程式による非線形波動場の解析の試み, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 6-10.
- 後野正雄 (1993): 緩勾配地形上の不規則波動場の支配方程式とその特性, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 21-25.
- 後野正雄・平井良昌 (1994): 定常連成振動方程式とそのステップ地形への適用性, 海岸工学論文集, 第41巻, pp. 21-25.
- 森口繁一・宇田川欽久・一松 信 (1960): 数学公式III, 岩波全書, 岩波書店, p. 310
- Abbot, M. B., H. M. Petersen and D. Skovgaard (1978): On the numerical modeling of short waves in shallow water, Jour. Hyd. Res., Vol. 16, No. 3, pp. 173-204.
- Fenton, J. (1972): A ninth-order solution for the solitary wave, J. Fluid Mech., Vol. 53, pp. 257-271.