

非線形緩勾配波動方程式の提案

磯 部 雅 彦*

1. 序 論

Berkhoff (1972) によって緩勾配方程式が提案されて以来、屈折・回折にともなう波浪変形の解析に関する基礎的・応用的研究が進んでいる。著者は特に不規則波の変形予測に着目し、放物型波動方程式 (磯部, 1986) や緩勾配不規則波動方程式 (磯部, 1993) などによる解析法を提案してきた。しかし、これらはすべて線形理論であり、漂砂量や波力の精度よい算定に必要となる、波の非対称性を含む詳細波形などの予測を直接的に行うことはできない。これを行うためには非線形波動理論が必要となり、特に碎波点付近や設計波高での計算を念頭におくと、強い非線形性を取り込む必要がある。本研究では、このための基礎方程式を導くとともに、数値計算手法を開発し、さらに数値計算結果を実験結果と比較して理論の妥当性を検証することを目的としている。他に強非線形・強分散性を考慮した方程式として灘岡・中川 (1993) がガラーキン法を適用して導いた非線形・分散性波動方程式があり、またこれまでのところ線形であるが後野 (1993) によるものもあるが、これに対して本研究では Lagrangian に変分原理を適用して導く。その結果として得られる非線形緩勾配波動方程式は、時間に関しては1階の線形連立偏微分方程式になるために、波浪場の時間変化を計算するのが比較的簡単になるのが特長である。

2. 非線形緩勾配波動方程式の誘導

ここで取り扱う非線形緩勾配波動方程式の誘導や理論的特徴については磯部 (1994) に詳しい。ここでは、方程式の誘導、緩勾配方程式との関係、および線形化された方程式における分散係数にしばって議論を進める。

(1) Lagrangian の定義

水面波に対する Lagrangian L は、未知関数である水面変動 η と速度ポテンシャル ϕ の関数として、次式で定義される (たとえば、Luke, 1967)。

$$L[\eta, \phi] = \int_{t_1}^{t_2} \iint_A \int_{-h}^{\eta} \dots$$

$$\cdot \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + gz \right\} dz dA dt \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 t_1 および t_2 は時間 t の始めと終わり、 A は対象空間を水平面 (x, y) に投影した領域、 h は水深、 g は重力加速度、および z は鉛直座標を表し、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ は水平2方向の微分演算子である。そして、 L を停留させる η と ϕ は、水面波に対するラプラス方程式、および水面と底面における境界条件式を満足することが証明できる。

(2) 鉛直分布関数系による速度ポテンシャルの級数表示

波動方程式を誘導することは、3次元の方程式を水平2次元の方程式に近似することである。このために、未知関数 ϕ をあらかじめ定めた鉛直分布関数系によって級数表示し、Lagrangian の定義式 (1) における鉛直方向の積分をあらかじめ解析的に行うことによって、 z を消去する。具体的に、多項式や双曲線関数を始めとする任意の鉛直分布関数系 Z_a によって ϕ を

$$\phi(x, z, t) = \sum_{a=1}^N Z_a(z; h(x)) f_a(x, t) \equiv Z_a f_a \dots \dots \dots (2)$$

と級数展開する。なお、後ろの式のごとく、添え字に関して総和規約を適用するものとする。式(2)を式(1)に代入して z に関する積分を行えば、

$$L[\eta, f_a] = \int_{t_1}^{t_2} \iint_A \xi(\eta, f_a, \frac{\partial f_a}{\partial t}, \nabla f_a) dA dt \dots \dots (3)$$

$$\begin{aligned} \xi(\eta, f_a, \frac{\partial f_a}{\partial t}, \nabla f_a) &= \frac{g}{2} (\eta^2 - h^2) + Z_a^* \frac{\partial f_a}{\partial t} \\ &+ \frac{1}{2} A_{\gamma\beta} \nabla f_\gamma \nabla f_\beta + \frac{1}{2} B_{\gamma\beta} f_\gamma f_\beta \\ &+ C_{\gamma\beta} f_\gamma \nabla f_\beta \nabla h + \frac{1}{2} D_{\gamma\beta} f_\gamma f_\beta (\nabla h)^2 \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

となる。ここに、

$$Z_a^* = \int_{-h}^{\eta} Z_a dz \dots \dots \dots (5)$$

$$A_{a\beta} = \int_{-h}^{\eta} Z_a Z_\beta dz \dots \dots \dots (6)$$

* 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科

$$B_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_{\alpha}}{\partial z} \frac{\partial Z_{\beta}}{\partial z} dz \dots\dots\dots (7)$$

$$C_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_{\alpha}}{\partial h} Z_{\beta} dz \dots\dots\dots (8)$$

$$D_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_{\alpha}}{\partial h} \frac{\partial Z_{\beta}}{\partial h} dz \dots\dots\dots (9)$$

である。

(3) 変分原理の適用

式(3)で表された Lagrangian を停留させるための、多変数 (x, y および t) 関数の場合の変分法における Euler 方程式は一般に

$$\frac{\partial \xi}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \xi}{\partial (\partial \eta / \partial t)} \right] + \nabla \left[\frac{\partial \xi}{\partial (\nabla \eta)} \right] \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial f_{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \xi}{\partial (f_{\alpha} / \partial t)} \right] + \nabla \left[\frac{\partial \xi}{\partial (\nabla f_{\alpha})} \right] \dots\dots\dots (11)$$

であり、これに式(4)を代入することにより

$$g\eta + Z_{\beta}^0 \frac{\partial f_{\beta}}{\partial t} + \frac{1}{2} (Z_{\beta}^0 \nabla f_{\beta})^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Z_{\beta}}{\partial z} f_{\beta} \right)^2 + (Z_{\beta} \nabla f_{\beta}) \left(\frac{\partial Z_{\gamma}^0}{\partial h} f_{\gamma} \right) \nabla h + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Z_{\beta}^0}{\partial h} f_{\beta} \right)^2 (\nabla h)^2 = 0 \dots\dots\dots (12)$$

$$Z_{\alpha}^0 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla (A_{\alpha\beta} \nabla f_{\beta}) - B_{\alpha\beta} f_{\beta} + \nabla (C_{\beta\alpha} f_{\beta} \nabla h) - C_{\alpha\beta} \nabla f_{\beta} \nabla h - D_{\alpha\beta} (\nabla h)^2 = 0 \dots\dots\dots (13)$$

を得る。さらに、緩勾配の仮定の下に海底勾配に関して 2 次以上のオーダーの項を無視すれば、

$$g\eta + Z_{\beta}^0 \frac{\partial f_{\beta}}{\partial t} + \frac{1}{2} (Z_{\beta}^0 \nabla f_{\beta})^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Z_{\beta}^0}{\partial z} f_{\beta} \right)^2 + (Z_{\beta} \nabla f_{\beta}) \left(\frac{\partial Z_{\gamma}^0}{\partial h} f_{\gamma} \right) \nabla h = 0 \dots\dots\dots (14)$$

$$Z_{\alpha}^0 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla (A_{\alpha\beta} \nabla f_{\beta}) - B_{\alpha\beta} f_{\beta} + (C_{\beta\alpha} - C_{\alpha\beta}) \nabla f_{\beta} \nabla h + Z_{\alpha}^0 \left(\frac{\partial Z_{\beta}^0}{\partial h} f_{\beta} \right) \nabla h = 0 \dots\dots\dots (15)$$

となる。

式(14)および(15)はそれぞれ 1 個および N 個の方程式を表し、それに対して未知関数も η および f_α のそれぞれ 1 個および N 個であるから、適当な境界条件の下で解くことができる。そして、η は水面変動を、f_α は式(2)に代入することにより速度ポテンシャルを表すので、波動場が計算されたことになる。ここまでの誘導過程で、緩勾配の仮定はしたものの、非線形性には何の仮定もしておらず、また適切な鉛直分布関数系 Z_α と十分な項数 N を選択することにより、速度ポテンシャルの鉛直分布、言い換えれば分散性を任意の精度で表すことができる。した

がって、式(14)および(15)は緩勾配斜面上において強非線形性と強分散性を考慮できる波動方程式となっており、これを非線形緩勾配波動方程式と呼ぶことにする。

3. 非線形緩勾配波動方程式の諸性質

(1) 緩勾配方程式との関係

式(14)および(15)において線形項のみを取り出せば、

$$g\eta + Z_{\beta}^0 \frac{\partial f_{\beta}}{\partial t} = 0 \dots\dots\dots (16)$$

$$Z_{\alpha}^0 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla (A_{\alpha\beta}^0 \nabla f_{\beta}) - B_{\alpha\beta}^0 f_{\beta} + (C_{\beta\alpha}^0 - C_{\alpha\beta}^0) \nabla f_{\beta} \nabla h = 0 \dots\dots\dots (17)$$

となる。ここに、上つきの添え字⁰は、z=η のかわりに z=0 で評価した値を示す。式(16)を t で微分して式(17)に代入することにより、次式のように η を容易に消去することができる。

$$-\frac{1}{g} Z_{\alpha}^0 Z_{\beta}^0 \frac{\partial^2 f_{\beta}}{\partial t^2} + \nabla (A_{\alpha\beta}^0 \nabla f_{\beta}) - B_{\alpha\beta}^0 f_{\beta} + (C_{\beta\alpha}^0 - C_{\alpha\beta}^0) \nabla f_{\beta} \nabla h = 0 \dots\dots\dots (18)$$

ここで級数の項数を 1 ととり、鉛直分布関数 Z₁ を

$$Z_1 = \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \dots\dots\dots (19)$$

$$\omega^2 = gk \tanh kh \dots\dots\dots (20)$$

のようにとれば、

$$Z_1^0 = 1, A_{11}^0 = \frac{ccg}{g}, B_{11}^0 = \frac{\omega^2}{g} (1-n) \dots\dots\dots (21)$$

となる。さらに、線形方程式であることより、解は角周波数 ω で正弦振動するものとして

$$f_1 = F(x) e^{-i\omega t} \dots\dots\dots (22)$$

とおき、式(21)と式(22)を式(18)に代入すれば

$$\nabla (cc_g \nabla F) + \omega^2 n F = 0 \dots\dots\dots (23)$$

を得る。これは Berkhoff (1972) によって提案された緩勾配方程式であり、本研究での非線形緩勾配波動方程式が緩勾配方程式を含むものであることがわかる。

(2) 線形分散関係式

ここでは、一様水深部における分散関係式について、線形化された形での (非線形) 緩勾配波動方程式によるものを、微小振幅波理論によるものと比較する。浅海域での利用が多くなると予想されることと、計算の速さから、ここではクノイド波的な偶数次べき乗式

$$Z_{\alpha} = \left(\frac{h+z}{h} \right)^{2(\alpha-1)} \dots\dots\dots (24)$$

を鉛直分布関数系に選べば、式(6)~(8)より

$$\left. \begin{aligned} Z_a^n &= \zeta^{2a_1} \\ A_{a\beta} &= h \frac{\zeta^{2(a_1+\beta_1)+1}}{2(a_1+\beta_1)+1} \\ B_{a\beta} &= \frac{4a_1\beta_1}{h} \frac{\zeta^{2(a_1+\beta_1)-1}}{2(a_1+\beta_1)-1} \\ C_{a\beta} &= -2a \left[\frac{\zeta^{2(a_1+\beta_1)+1}}{2(a_1+\beta_1)-1} - \frac{\zeta^{2(a_1+\beta_1)}}{2(a_1+\beta_1)} \right] \end{aligned} \right\} \dots (25)$$

となる。ここに、

$$\zeta = 1 + \frac{z}{h}, \quad a_1 = a - 1, \quad \beta_1 = \beta - 1 \dots (26)$$

である。

線形化のために式(25)を、 $z=0$ すなわち $\zeta=1$ で評価すると

$$\left. \begin{aligned} Z_a^0 &= 1, \quad A_{a\beta}^0 = \frac{h}{2(a_1+\beta_1)+1} \\ B_{a\beta}^0 &= \frac{1}{h} \frac{4a_1\beta_1}{2(a_1+\beta_1)-1} \dots (27) \end{aligned} \right\}$$

となり、さらに

$$f_a = a_a e^{i(kx - \omega t)} \dots (28)$$

において、線形化された形での非線形緩勾配波動方程式(18)に、一様水深 ($Dh=0$) の下で代入すれば、

$$\sum_{\beta=1}^N \left(\frac{\omega^2}{g} - \frac{1}{h} \frac{4a_1\beta_1}{2(a_1+\beta_1)-1} \right) a_\beta = k^2 \sum_{\beta=1}^N \frac{h}{2(a_1+\beta_1)+1} a_\beta \dots (29)$$

となる。

与えられた角周波数 ω に対して、上式が自明でない ($a_a \neq 0$) 解を持つための条件として、 k^2 が固有値として決定され、それが分散関係となる。上式の固有値は N 個あるはずであり、 $N=4$ までの数値計算結果を見ると、1 個を除いた他はすべて k^2 が負の値となる。 k^2 が正、すなわち k が実数の場合には式(28)より進行波を表し、 k^2 が負の場合には減衰定常波を表す。減衰定常波の成分は、微小振幅波理論では無数に存在するのに対し、ここでは

項数を N で打ち切ったために $(N-1)$ 個しか存在しないことになる。

図-1 は、進行波成分に対する無次元角周波数 $\omega\sqrt{h/g}$ と無次元波速 c/\sqrt{gh} との関係、すなわち分散関係を、微小振幅波理論によるものと比較したものである。これを見ると、 $N=4$ とすれば $\omega\sqrt{h/g} = 4(h/L_0 \approx 2.55, L_0: \text{深海波長})$ に至るまで精度がよく、 $N=3$ でも $\omega\sqrt{h/g} = 2(h/L_0 \approx 0.64)$ という深海条件まで精度がよいことがわかる。すなわち、べき乗型の鉛直分布関数は、せつ動法を用いた理論ではクノイド波理論のような長波に対して得られるものでありながら、ここでは深海条件も含めて有効なものとなっている。

4. 数値計算の方法

(1) 基礎方程式の差分化

式(14)は η と f_a の両方に対して非線形であるのに対し、式(15)は f_a に対して線形な方程式である。原理としては、 N 個の式に分かれる式(15)の間で $\partial\eta/\partial t$ を消去すれば、 f_a に対して時間項を含まない $N-1$ 個の線形方程式を得る。これよりたとえば、 $f_a(a \geq 2)$ が f_1 によって表せることになる。すると、式(14)、および式(15)のうちの 1 個の式は、 η および f_1 に対する連立偏微分方程式と見なされるが、Runge-Kutta 法を用いて前者により f_1 の、後者により η の時間積分が行えることになる。この考え方を基礎とするものの、実際にはそのような計算を行わず、式(14)を η と $\partial f_a/\partial t$ に関する線形方程式、式(15)を $\partial\eta/\partial t$ と f_a に関する線形方程式と見なして数値計算を進めることにする。

以下においては、1 次元問題における数値計算での差分式について述べるが、ADI 法により 2 次元問題にも拡張できるようにすることを念頭においている。

差分化を行う際には中央差分をとることにする。まず、 $(j-1)$ ステップ目の時刻 $t = (j-1)\Delta t$ (Δt は計算時間間隔) における $x = i\Delta x$ での諸量を

$$\left. \begin{aligned} \eta_i &= \eta(i\Delta x, (j-1)\Delta t), \quad f_{ai} = f_a(i\Delta x, (j-1)\Delta t) \\ &\dots (30) \end{aligned} \right\}$$

と表す。また、時間に関する積分には Runge-Kutta 法を用いることにして、時刻 $t = j\Delta t$ における予測値には上付きの添え字 P を使い、修正値には上付きの添え字を用いないことにすれば、

$$\eta_i^P = \eta^P(i\Delta x, j\Delta t), \quad f_{ai}^P = f_a^P(i\Delta x, j\Delta t) \dots (31)$$

$$\eta_i = \eta(i\Delta x, j\Delta t), \quad f_{ai} = f_a(i\Delta x, j\Delta t) \dots (32)$$

である。

非線形項は予測値を含む既知の値を用いて評価することにし、線形項は修正値 (未知の値) を用いて評価することにすれば、式(14)および(15)の差分式は

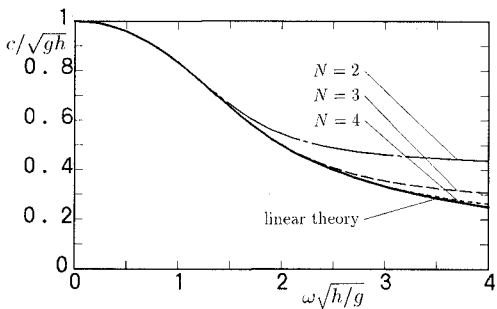


図-1 偶数次べき乗式の鉛直分布関数系における分散関係の精度

$$\frac{g}{2}(\eta_i + \eta_i) + \bar{Z}_{\beta i} \frac{f_{\beta i} - f_{\beta i}}{\Delta t} + \left(\bar{Z}_{\beta i} \frac{f_{\beta i+1} - f_{\beta i-1}}{2\Delta x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{Z}_{\beta i}}{\partial z} \bar{f}_{\beta i} \right)^2 + \left(\bar{Z}_{\beta i} \frac{f_{\beta i+1} - f_{\beta i-1}}{2\Delta x} \right) \left(\frac{\partial \bar{Z}_{\beta i}}{\partial h} \bar{f}_{\beta i} \right) \frac{dh}{dx} = 0 \dots (33)$$

$$\bar{Z}_{\alpha i} \frac{\eta_i - \eta_i}{\Delta t} + \frac{\left(\bar{A}_{\alpha\beta}^{i-1/2} (f_{\beta i-1} + f_{\beta i-1}) - (\bar{A}_{\alpha\beta}^{i-1/2} + A_{\alpha\beta}^{i+1/2}) \cdot (f_{\beta i} + f_{\beta i}) + \bar{A}_{\alpha\beta}^{i+1/2} (f_{\beta i+1} + f_{\beta i+1}) \right)}{2(\Delta x)^2} - \bar{E}_{\alpha\beta}^i \frac{f_{\beta i} + f_{\beta i}}{2} + (\bar{C}_{\beta\alpha}^i - \bar{C}_{\alpha\beta}^i) \frac{(f_{\beta i+1} + f_{\beta i+1}) - (f_{\beta i-1} + f_{\beta i-1})}{4\Delta x} \frac{dh}{dx} + \bar{Z}_{\alpha i} \left(\frac{\partial \bar{Z}_{\beta i}}{\partial h} \frac{f_{\beta i} + f_{\beta i}}{2} \right) \frac{\eta_{i+1} - \eta_{i-1}}{2\Delta x} \frac{dh}{dx} = 0 \dots (34)$$

となる。ここに、 $\bar{\cdot}$ を付した諸量は

$$\bar{\eta}_i = (\eta_i^p + \eta_i^r)/2, \quad \bar{f}_{\alpha i} = (f_{\alpha i} + f_{\alpha i})/2 \dots (35)$$

を用いて評価した既知の値を示す。式(33)および(34)は、未知変数 η_i および $f_{\alpha i}$ に関して線形な連立方程式を構成し、係数マトリックスのバンド幅 (全幅) は $3(N+1)$ と小さくなるために、高速に解くことができる。

(2) 境界条件

沖側境界においては、入射波成分 $\eta^{(l)}$ および $f_{\alpha}^{(l)}$ を導入し、反射波成分を計算領域から外へ無反射で透過させるための条件が必要で、ここでは非線形性が無視できるものとして、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - c \frac{\partial \eta}{\partial x} = 2 \frac{\partial \eta^{(l)}}{\partial t} \dots (36)$$

および f_{α} に対する同様の式を用いる。ただし、 c は波速である。この式を差分化すれば、

$$\frac{\eta_i - \eta_i}{\Delta t} + c_1 \frac{(\eta_2 + \eta_2) - (\eta_0 + \eta_0)}{4\Delta x} = 2 \frac{\partial \eta^{(l)}}{\partial t} \dots (37)$$

である。

ただし、反射波がなければ η_i および $f_{\alpha i}$ を入射波と等しくとってもよく、前者については

$$\eta_i = \eta_i^{(l)} \dots (38)$$

となる。後者については、さらに式(14)の線形項のみ、すなわち第1項および第2項のみを考慮すれば

$$\frac{\partial f_{\alpha i}}{\partial t} = -g\gamma_{\alpha}^0 \eta_i^{(l)} \dots (39)$$

となる。ただし、 γ_{α}^0 は f_{α} 間の相対的重み係数 (合計値が1) であり、式(29)の固有ベクトル a_{β} の値の比によって決める。入射波が不規則波ならば、厳密には成分波ごとに異なる重み係数を用いる必要があるが、若干周波数が異なっても重み係数は余り変化しないことや、ピー

ク周波数からずれた成分波のエネルギーは小さいことから、ピーク周波数での値で一定値とした。これは、周波数に対する造波効率を一定値として造波を行うのと同様の誤差を発生させるものであるが、通常は余り大きくならない。また、上式の差分式は

$$\frac{f_{\alpha i} - f_{\alpha i}}{\Delta t} = -g\gamma_{\alpha}^0 \eta_i^{(l)} \dots (40)$$

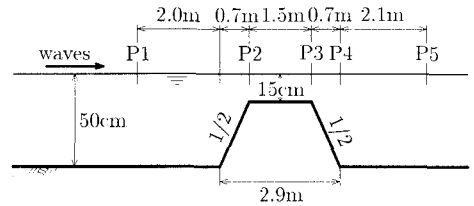
である。

岸側境界においては領域外からの波は供給されないから、式(36)に対応して

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \dots (41)$$

となる。

以上により、格子点の総数を M とすれば、未知数は $M \times (N+1)$ であり、方程式は基礎方程式から $(M-2) \times (N+1)$ 、沖側および岸側境界条件より $2 \times (N+1)$ となってそれぞれの総数が一致して解けることになる。初期条件は静水状態とし、各時間ステップでの予測値の初期値は



Case 4 ($T = 2.01$ s, $H_o = 5.0$ cm)

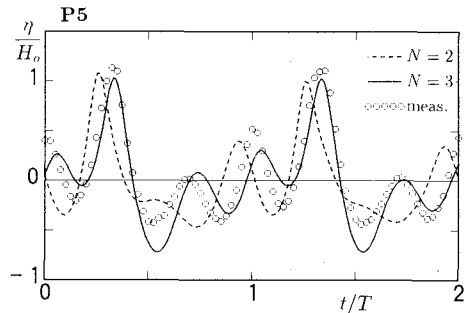
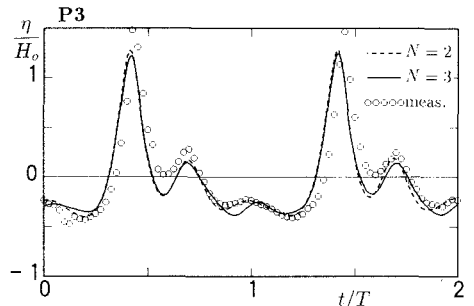


図-2 潜堤による規則波の変形の計算結果と実測結果の比較

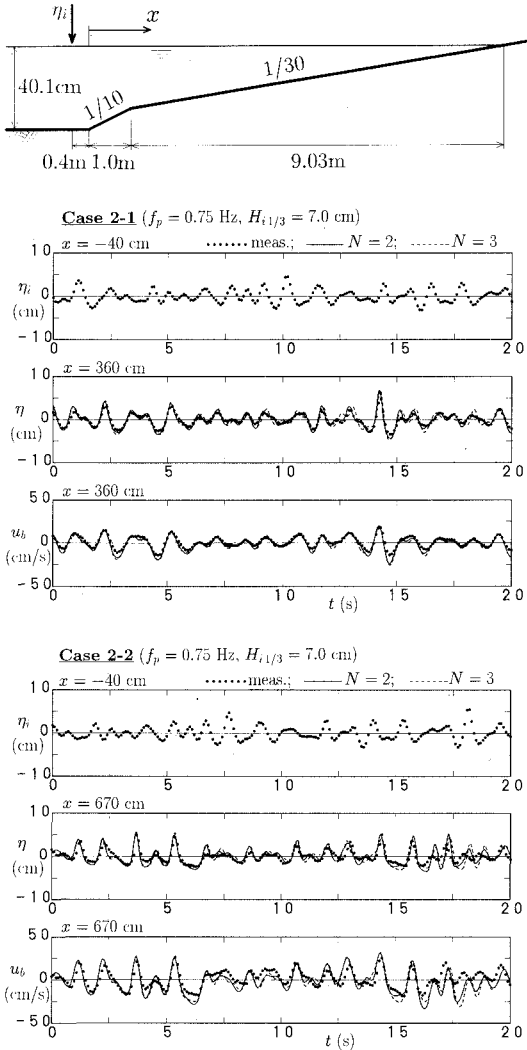


図-3 不規則波の浅水変形の計算結果と実測結果の比較

前の2ステップからの線形外挿値または1ステップ前の値そのものとした上で、修正値を求める。ここで念のため、修正値を予測値に置き換えながら繰り返し計算を行い、収束させながら計算を進める。

5. 数値計算例

計算に用いた鉛直分布関数系は式(24)のような偶数次

べき乗式である。図-2は潜堤による規則波の変形(大山ら, 1993; 土木学会編, 1994)に適用した結果の例であり、 $N=3$ ですでに潜堤背後の波形もある程度精度よく計算されている。また、図-3は不規則波の浅水変形に適用した結果の一例で、図に示した碎波点付近($x=670$ cm)まで、水面波形 η および底面流速 u_b ともに実測結果(渡辺ら, 1988)とよく一致する。

6. 結 論

非線形性と分散性を任意の精度で取り込んで波浪の屈折・回折を数値計算することができる非線形緩勾配波動方程式を導き、それが緩勾配方程式を含むこと、および偶数次べき乗式の鉛直分布関数系に対する線形分散関係式が $N=3$ であっても精度よく評価されることを示した。また、1次元問題に対して非線形緩勾配波動方程式の数値計算法を示した上で、計算例を実測結果と比較したところ、底面流速を含めて良好な一致が得られ、方程式の妥当性が示された。

参 考 文 献

磯部雅彦(1986): 放物型方程式を用いた不規則波の屈折・回折・碎波変形の計算法, 第33回海岸工学講演会論文集, pp. 134-138.

磯部雅彦(1993): 有理式近似に基づく非定常緩勾配不規則波動方程式, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 26-30.

磯部雅彦(1994): 波浪変形解析のための波動方程式の比較研究 土木学会論文集, No. 479/II-27, pp. 1-14.

大山 巧・喜岡 渉・多田彰秀(1993): 非線形分散波動場に対する数値モデルの適用性について, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 11-15.

土木学会編(1994): 海岸波動, 一波・構造物・地盤の相互作用の解析法一, 土木学会, 海岸工学委員会, 研究現況レビュー小委員会, 520p.

灘岡和夫・中川康之(1993): 新しい非線形・分散性波動方程式による非線形波動場解析の試み, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 6-10.

後野正雄(1993): 緩勾配地形上の線形不規則波動場の支配方程式とその特性, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 21-25.

渡辺 晃・磯部雅彦・泉宮尊司・中野英樹(1988): 非定常緩勾配方程式による不規則波の浅水碎波変形の解析, 第35回海岸工学講演会論文集, pp. 173-177.

Berkhoff, J. C. W. (1972): Computation of combined refraction-diffraction, Proc. 13th Int. Conf. on Coastal Eng., ASCE, pp. 471-490.

Luke, J. C. (1967): A variational principle for a fluid with a free surface, J. Fluid Mech., Vol. 27, pp. 395-397.