

剥離を伴った振動流中の円柱に働く 流体力について

佐藤 幸雄*・折橋 恒春**・浜中建一郎***

1. ま え が き

構造物に作用する波力を予測するために普通はポテンシャル理論が使用される。例えば Bird など (1982)。しかし、構造物の大きさおよび波の周期によっては流体の粘性を省略することが出来ない。そして、粘性効果がある構造物のまわりの波動場を知るためには、剥離が見られるような円柱のまわりの振動流の研究が必要である。また、この種の剥離が存在するような問題を解析的に取扱う方法では非常に難しいため、数値解析あるいは実験的方法が普通使用され、主として Morison 式における係数 (C_D , C_M) についての報告、例えば Justesen (1991)、と波力の最大値に関したものの、剥離と最大波力の関係について、など 2, 3 の研究がある。

本研究では、数値解析を使用して円柱のまわりの振動流の流れの場の構造について、その流れの渦度、流れ関数、圧力場および水平圧力の時間変化を詳細に調べた。

特に最大波力を予測する Morison 式の有効性、最大圧力と剥離の関係等に検討を加え、その結果、レイノルズ数およびストローハル数が共に小さい値のときに数値計算の結果は実験値と良く一致すること。また剥離を伴う流れの水平圧力の時間変化については水平圧力の最大値付近において Morison 式の適合性が悪いこと等が分った。さらに、剥離が発生する位相において、水平圧力の変化に衝撃的变化が見られる等の興味深い結果も得られた。

2. 基本方程式

円柱のまわりの 2 次元流を考えて、流れに垂直方向に y 軸、平行方向に x 軸を取ると、渦度方程式と流れ関数に関するポアソン方程式はそれぞれ式 (1), (2) で表わされる。ここで、“'” を付した値はそれぞれ有次元量を表わす。

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t'} = -\frac{\partial \psi'}{\partial y'} \cdot \frac{\partial \omega'}{\partial x'} + \frac{\partial \psi'}{\partial x'} \cdot \frac{\partial \omega'}{\partial y'} + \nu' \Delta' \omega' \quad \cdots (1)$$

$$\Delta' \psi' = -\omega' \quad \cdots (2)$$

ここで、 x' , y' はそれぞれ水平、鉛直軸の値であり、 ω' と ψ' はそれぞれ渦度および流れ関数である。また、 ν' は動粘性係数、 Δ' はラプラシアンである。

円柱から充分遠く離れた個所の流れに式 (3) で表わされる水平振動流を与えるものとする。

$$u' = \sigma' A' \sin \sigma' t', \quad v' = 0 \quad \cdots (3)$$

σ' : 水平振動流の振動数, A' : 振幅

また、円柱表面において“non-slip”の条件を適用して、

$$u' = v' = 0 \quad \cdots (4)$$

式 (3), (4) はこの問題の境界条件を表わす。

つぎに、各変数をそれぞれ、円柱の半径 R' と水平振動流の振動数 σ' により無次元化すると、それぞれ以下のよう表わされる。

$$x = x'/R', \quad y = y'/R', \quad A = A'/R', \quad t = \sigma'/t'$$

$$u = u'/\sigma'R', \quad v = v'/\sigma'R', \quad \psi = \psi'/\sigma'R'^2,$$

$$\omega = \omega'/\sigma', \quad \nu = \nu'/\sigma'R'^2$$

さらに、式 (5) を用いた等角座標として図-1 に示するような新しい座標系を導入すると、無次元化された渦度方

$$x = e^r \cos \theta, \quad y = e^r \sin \theta \quad \cdots (5)$$

程式およびポアソン方程式はそれぞれ式 (6), (7) となる。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = J^{-1} \left\{ -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) \right\} \quad \cdots (6)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -J\omega \quad \cdots (7)$$

ここで、 J は式 (5) のヤコビアンで式 (8) で表わされる。

$$J = e^{2r} \quad \cdots (8)$$

式 (6), (7) に対する境界条件として

円柱の表面上 $r=0$ では

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \quad \cdots (9)$$

円柱から遠く離れた $r=\infty$ では次のように表わされる。

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = A \sin t, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \omega = 0 \quad \cdots (10)$$

* 正 員 北見工業大学助教授 工学部土木開発工学科

** 学生会員 北海道大学大学院 工学部土木工学科

*** 正 員 工博 北海道大学助手 工学部土木工学科

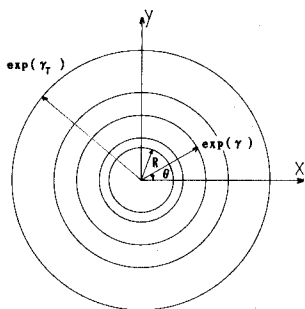


図-1 座標系の定義

3. 数値解析方法

式(6)、(7)を数値解析により解くために、簡単な有限差分法を使用し、時間微分は前進差分スキームを用い、また空間差分には中央差分スキームを使用した。この場合、新しい時間ステップにおける渦度 ω の値は式(6)より求められ、また、同じ時間ステップにおける流れ関数 ψ の値は式(7)より得られる。そして、このような計算を行うために、渦度 ω および流れ関数 ψ を θ 方向にフーリエ級数に展開した式(11)、(12)および(13)を使用した。

$$\omega = \sum_{m=1}^M m e^{im\theta} \dots\dots\dots (11)$$

$$\psi = \sum_{m=1}^M f_m e^{im\theta} \dots\dots\dots (12)$$

このとき、式(6)、(7)の ω 、 ψ の θ に関する微分は式(13)のように表わされる。

$$\frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \sum_{m=1}^M i m g_m e^{im\theta}, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} = \sum_{m=1}^M -m^2 g_m e^{im\theta} \dots\dots\dots \text{etc.} \quad (13)$$

ここで、 M は θ 軸上の格子点の数である。この方法を使用すると、2次元ポアソン方程式の式(7)は一次元の方程式に帰着される。したがって、式(7)を数値的に解くことは、各々の形態についての一組の線形方程式を解く結果となる。この方法は一般にスペクトル法と云われる。

さらに、円柱の表面近くで細かいメッシュを設定するために、新しい座標軸 ξ を導入する。

$$r = r_T \frac{e^{-b\xi} - 1}{e^b - 1} \dots\dots\dots (14)$$

ここで、 r_T は計算領域の最も外側の終端の r の値を示す(図-1参照)。なお、式(7)の境界条件として使用される式(9)の $\partial\psi/\partial\theta=0$ はフーリエ係数を使用すると次のように表される。

$$r=0 \quad \text{において} \quad f_m=0 \dots\dots\dots (15)$$

また、もう一つの境界条件として、円柱表面における渦

度 ω の値を得るために、Thom'sスキームによる次式を使用した。

$$r=0 \quad \text{上で} \quad \omega = -J^{-1} \frac{\partial \xi}{\partial r} \left\{ \frac{2\psi(\Delta\xi)}{(\Delta\xi)^2} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

4. 圧力場

ナビエ-ストークスの方程式を使用して、2と同様の無次元化を行なうことにより圧力場を与える式は次のように表される。

$$\Delta p = 2 \left\{ \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \dots\dots\dots (17)$$

ここで、

$$p = \frac{\rho'}{\rho'(\sigma'R')^2}, \quad \rho': \text{流体の密度}$$

式(17)の境界条件は、 $\gamma-\theta$ 軸に関して、円柱表面において、

$$r=0 \quad \text{上で} \quad \frac{\partial p}{\partial r} = -\nu \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \dots\dots\dots (18)$$

である。また、円柱より充分遠い個所の圧力はポテンシャル流の圧力に等しいと仮定して、

$$p = -A(e^r + e^{-r}) \cos \theta \cdot \cos t \dots\dots\dots (19)$$

により表すと、式(17)は円柱表面上の渦度 ω と流れ関数 ψ の値が求められると、その後は前述の流れ関数を求めるときと同様の方法により解くことが出来る。

5. 計算結果および考察

2.の無次元化された変数を使用すると、この問題の特徴は2つの無次元パラメーターによって表わすことが出来る。無次元化された振動流の振幅 A と無次元動粘性係数 ν により、レイノルズ数 Re とストローハル数 S は

$$Re = \frac{U'D'}{\nu} = 2 \frac{A}{\nu}, \quad S = \frac{U'T'}{D'} = \pi A \dots\dots\dots (20)$$

ここで、 U' :振動流の最大流速、 D' :円柱の直径($D'=2R'$)、 T' :振動流の周期である。

まず、図-2、図-3は特徴のある剥離を伴った流れの場の様子を示したものであり、図-2は $Re=160$ 、 $S=12.5$ の場合の渦度のcontours図、図-3は同じ Re 、 S の値の流れ関数 ψ のcontours図である。図中の(a)~(h)の図は図-4に示すように1周期を8分割した $2\pi \cdot 1/8$ 毎の位相における状態を示している。

図-2、図-3において太線は正の値、細線は負の値を示す。また、図-2より剥離渦の発生は振動流の減速時(c)において特に大きく見られ、その渦は振動流の停止時(d)に円柱近傍から遊離する状態となる。この状況は図-3の流れの関数 ψ のcontours図においても明確に見ることが出来る。図-4は $x=0$ ($\theta=\pi/2$)の位置において円柱から充分遠い個所の振動流の流速 U_∞ 、圧力 P_∞ お

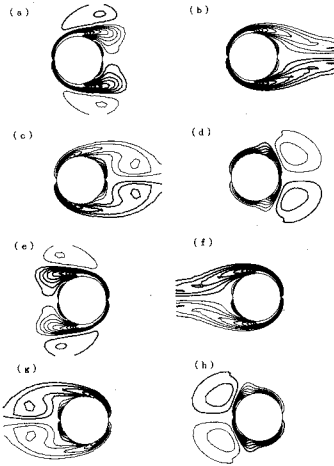


図-2 渦度の contours, $Re=160$, $S=12.5$, $\Delta\omega=3$, 太線 (+), 細線 (-)

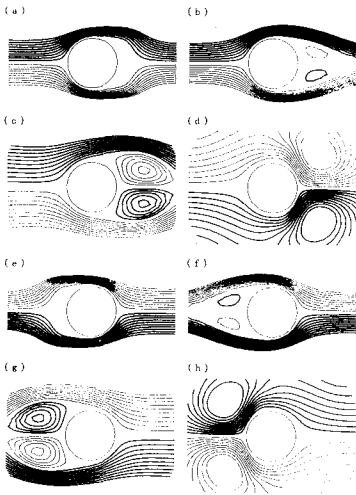


図-3 流れ関数の contours, $Re=160$, $S=12.5$, $\Delta\phi=0.25$, 太線 (+), 細線 (-)

および圧力勾配 $\partial P_\infty / \partial x$ の時間変化の模式的図を示したもので、図よりポテンシャル流の場合の各々の最大値が現われる点の位相の違い、あるいは時間変化の基本的パターンが見られる。

図-5 は厳密ではないが大略剥離渦が発生しているか否かの範囲をストローハル数 S およびレイノルズ数 Re の値について示したものであるが、小さな剥離渦の発生ではそれ程圧力の変化に大きく影響を与えないことから図中の破線はおおよその区別を示したものである。

図-6 は図-2、図-3 と同一条件のときの圧力分布の contours を示したものである。図より剥離渦を伴う場合とポテンシャル流の場合では圧力分布の様子が明確に

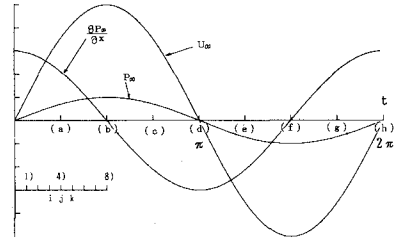


図-4 水平振動流の流速・圧力の時間変化

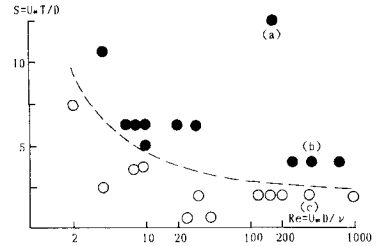


図-5 剥離渦発生の有無を示す概略図

異なっているのが分かる。すなわち、ポテンシャル流では振動流が最大となる (b) の位相で圧力が零となるのに対して剥離を伴う場合には (b) ~ (c) の時間帯に位相がズレて来ていることが推測される。

つぎに、円柱に作用する水平圧力については図-5 に示した (a), (b), (c) の各条件について、図-6 に示した圧力分布の値から、特に円柱表面上のせん断力および圧力の水平成分を円柱のまわり 1 周 ($\theta=0 \sim 2\pi$) について積分して求めた。この積分を 1 周期を細分化した各位相について行ない、水平圧力の時間変化を求めた。図-7 に (a), (b), (c) について示した。(a) は図-6 と同じ条件の $Re=160$, $S=12.5$ の場合であり、(b), (c) はそれぞれ、 $Re=400$, $S=4$ と $Re=392$, $S=2$ の場合である。図-7 より (c) の条件は、レイノルズ数が $Re=392$ で大きく、またストローハル数は $S=2$ で小さい値である。このような剥離を伴わない流れはポテンシャル流に近づくと考えられる。そして、数値計算の結果もポテンシャル理論によく一致していると云える。したがって、この意味からも数値計算の有効性が確認出来る。

さらに、水平圧力について数値計算とポテンシャル理論との差異は図-7 より (c) ~ (a) に移るに従って、すなわちストローハル数の増加と共に大きくなる。この事は剥離渦の出現により引き起こされるものと考えられる。

また、不一致性の特徴的なものは (a) に見られるように、剥離を伴う場合は位相のズレが生じること、高周波成分が現われること、そして最大値が衝撃的に突出することなどが見られる。

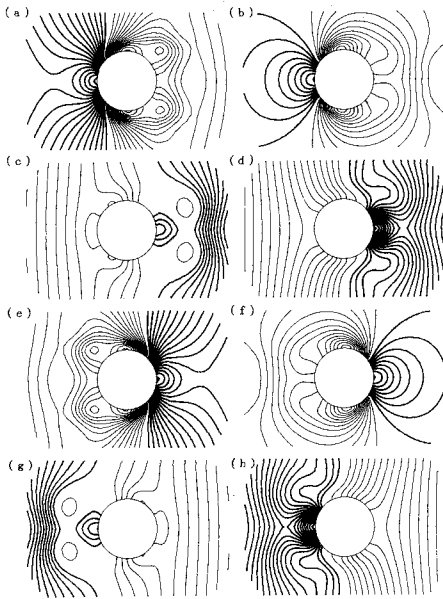
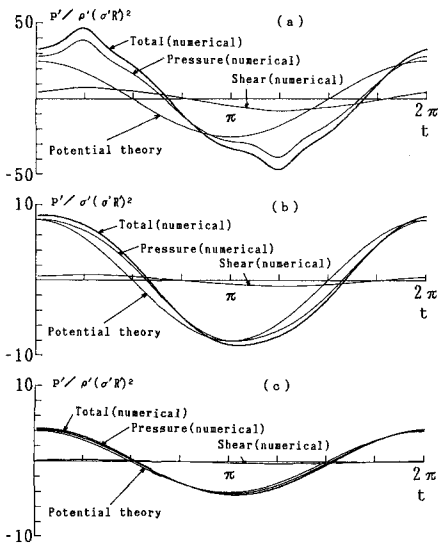

 図-6 圧力分布の contours, $Re=160$, $S=12.5$

 図-7 水平圧力の時間変化, (a): $Re=160$, $S=12.5$, (b): $Re=400$, $S=4$, (c): $Re=292$, $S=2$

図-7の水平圧力の時間変化の値より Morison 式の抗力係数 C_D と質量係数 C_M を最小 2 乗法を使用して求めることが出来るが、剥離渦を伴う場合はポテンシャル理論の場合と圧力変化に位相のズレがある。本研究では一応、ポテンシャル流の場合と $t=0$ において位相を合わせて C_D , C_M を求めた。図-8 は本研究の結果 ($S=4$, $2, 0.5$), と他の理論および実験との比較を示したもので、結果は Justesen の解析によく適合しているのが見られる。図-9 は最小 2 乗法により求めた C_D , C_M の値を使

用して再度水平圧力を見積って示したもので、剥離が大きい (a) を除いてはほぼポテンシャル流に沿った値を示している。したがって剥離を伴う場合は位相のズレを考慮に入れた最適な C_D , C_M を求める必要があると考えられる。

つぎに、図-7 (a) の最大圧力が衝撃的に変動する点を考えて見ることにする。図-10 は図-4 に示した 1) ~8) までの $1/32$ 周期毎の時間変化に対応した円柱表面上の $\theta=0 \sim \pi$ における圧力変化を示したものであり、図

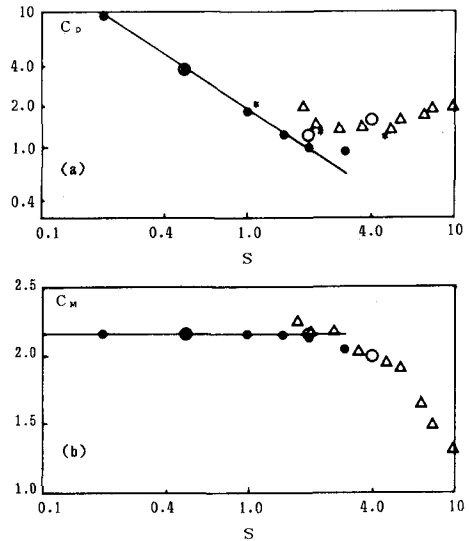


図-8 Morison 式の係数, (a) 抗力係数 C_D , (b) 質量係数 C_M
 ○; 本研究の値, ●; Numerical method by Justesen, *; Discrete vortex method by Graham et al., △; Experiments by Bearman et al., —; Asymptotic theory by Wang

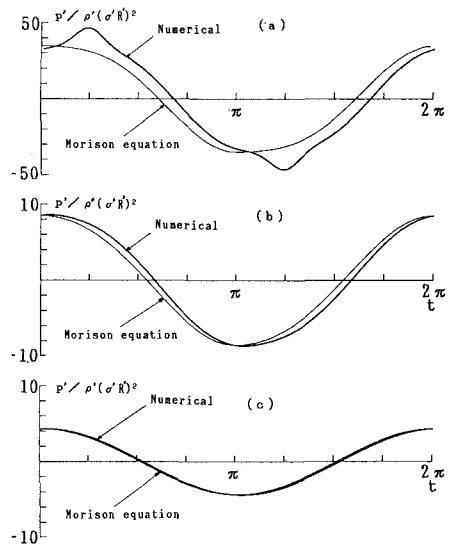


図-9 水平圧力の再現図

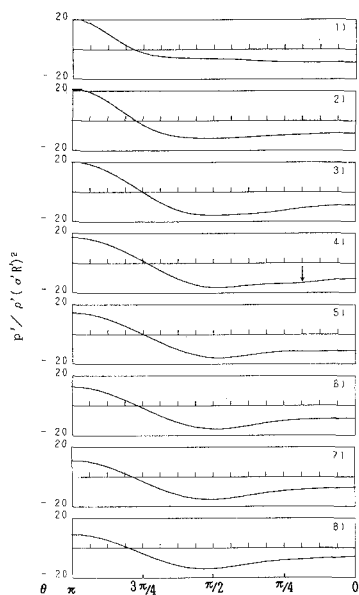


図-10 各位相における円柱表面上の圧力分布

より $\theta = \pi/2 \sim \pi$ までの円柱の上流側で時間変化に対して圧力変化はあまり見られないが、下流側 $\theta = 0 \sim \pi/2$ における負の圧力には変化が見られ、特に4)の $t = 2\pi/8$ の位相上に矢印で示した点では圧力が急に低くなるのが見られる。したがって、このような圧力変化が水平圧力の突出を引き起こすものと考えられる。さらに、図-4に示した突出が起る前後の位相 (i), (j), (k) における渦度と流れ関数の contours について見ると、図-11より突出が起る位相は剥離が発生しはじめる (j) の位相に一致し、この状態は図-12の流れ関数の contours においても剥離渦の存在が明確に現れているのが分る。最後に、数値計算の妥当性を検討するために、図-13に境界層内に発生する定常循環流に関する Stuart (1965) の解と本研究の数値計算による値を示した。両者の比較より数値計算の場合も境界層の流れの非線形性は良く評価されていることが分り、数値計算の有効性が確認されることが考えられる。以上の事より剥離が発生しているときの構造物

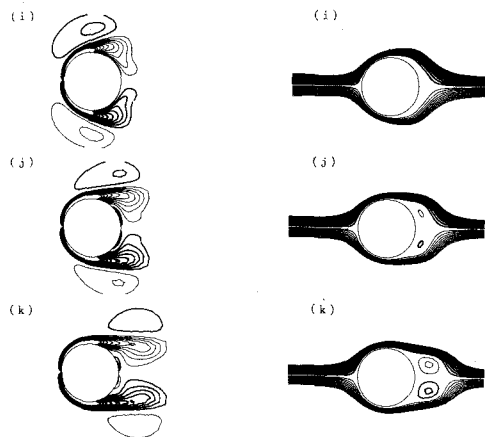


図-11 渦度の contours

図-12 流れ関数の contours

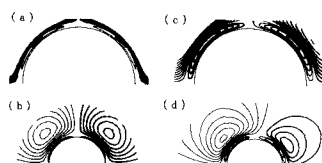


図-13 境界層内の定常循環流 ($Re=196$, $S=0.5$ の場合)
(a), (b); inner & outer layer (Stuart による),
(c), (d); 本研究

に作用する最大圧力については高周波成分、衝撃的突出部および位相のズレが現われるため、Morison 式の係数の推定方法に関しては系統的な計算および研究が必要であると考える。

参考文献

- Bird, H. W. K. & Shepherd, R. (1982): Wave interaction with large submerged structures, J. waterway, Part. Coastal and Ocean Division, ASCE Vol. 108, No. ww2, pp. 146-162.
- Justesen, P. (1991): A numerical study of oscillating flow around a circular cylinder, J. Fluid Mech., Vol. 222, pp. 157-196.
- Stuart, J. T. (1965): Double boundary layers in oscillatory viscous flow, J. Fluid Mech. Vol. 24, Part 4, pp. 673-687.