

任意断面を有する鉛直柱体に働く 2 次変動波圧に関する研究

増田 光一*・後藤 暁**・永井 孝志***

1. 緒 言

海洋・海岸構造物の耐波設計において波面の非線形性により生じる 2 次の波力及び波圧の特性や影響を明確にすることは、設計の高精度化という観点において非常に重要である。2 次波力に関しては、数多くの研究が既になされているが、2 次変動波圧に関して理論及び実験の両面から系統的に研究された例は著者らの知る限りほとんどない。そこで、本研究は種々の断面形状を有する固定式鉛直柱状構造物を取り上げ、それに働く 2 次変動波圧の特性及び分布性状などを数値計算と水槽実験により明確にすることを目的とする。

一般に 2 次変動波圧の理論的評価法としては、a) 非斉次自由表面条件を含む 2 次散乱波ポテンシャルに関する境界値問題を解き、1 次及び 2 次の速度ポテンシャルから 2 次変動圧力をベルヌーイの圧力方程式より直接求める方法 (Kim. & Yue 1989 ; Chau. & Eatock Taylor 1992)、b) 物体表面を有限個の要素に分割し、それぞれの要素に働く 2 次波力を拡張された Haskind の公式により求め、その 2 次波力から要素に働く 2 次変動波圧の平均値を逆算する手法 (Eatock Taylor, Hung and Chau 1989) などが考えられる。前者を直接法、後者を間接法と呼ぶことにする。本論では、著者等が既に拡張された Haskind の公式により 2 次波力を評価する数値計算プログラム (増田ら, 1991) を有しているため、プログラムの若干の修正で 2 次変動波圧の算定が可能となる間接法を採用した。一方、水槽実験に関しては、間接法の任意形状構造物への適用性を検討するためにテンションレグプラットフォームの要素浮体等を想定したコラム・フーティング型浮体を取り上げた。さらに、円柱、楕円柱、角柱に働く 2 次変動波圧を間接法で計算し、その特性及び分布性状等について考察した。

2. 境界値問題

流体は非粘性、非圧縮性の完全流体であり、流体の運

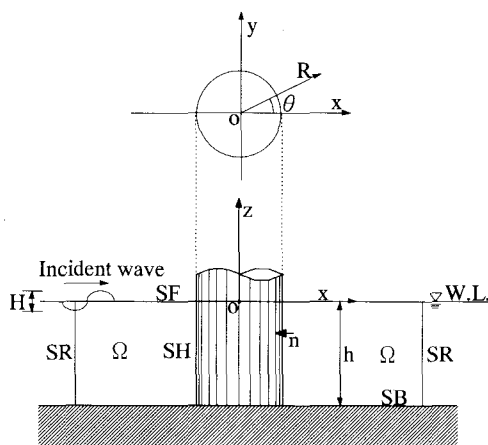


図-2.1 座標系

動は非回転で速度ポテンシャルの存在が保証される。入射波は x 軸の負の方向から入射する。座標系を図-2.1 に示す。ここで、 Ω は流体領域、 S_F は自由表面、 S_B は水底、 S_H は物体表面、 S_R は無限遠方での境界を示す。

速度ポテンシャル ϕ は摂動展開により摂動パラメータ ε の 2 乗の項まで考えると次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z) &= \text{Re}[\varepsilon \bar{\phi}^{(1)} e^{-i\omega t} + \varepsilon^2 (\bar{\phi}_0^{(2)} + \bar{\phi}^{(2)}) e^{-2i\omega t}] \\ &= \text{Re}[\phi^{(1)} e^{-i\omega t} + \phi_0^{(2)} + \phi^{(2)} e^{-2i\omega t}] \dots (1)\end{aligned}$$

ここで $\bar{\phi}^{(1)}$, $\bar{\phi}^{(2)}$ は 1 次、2 次の速度ポテンシャル ($\phi^{(1)}$, $\phi^{(2)}$ は ε を含む)、 $\bar{\phi}_0^{(2)}$ は流体粒子の定常的な移動速度に関係する ($\phi_0^{(2)}$ は ε を含む) が、2 次の圧力・波力などに関係の無い項である。また、円周波数 ω と波数 k との関係は、ストークスの 2 次近似理論の場合

$$\frac{\omega^2}{g} = k \tanh kh \dots (2)$$

のようになる。1 次、2 次の速度ポテンシャル $\phi^{(1)}$, $\phi^{(2)}$ は、入射波ポテンシャル $\phi_I^{(1)}$, $\phi_I^{(2)}$ と散乱波ポテンシャル $\phi_d^{(1)}$, $\phi_d^{(2)}$ の和で次式のように定義できる。

$$\begin{aligned}\phi^{(1)} &= \phi_I^{(1)} + \phi_d^{(1)} \\ \phi^{(2)} &= \phi_I^{(2)} + \phi_d^{(2)}\end{aligned} \dots (3)$$

入射波ポテンシャル $\phi_I^{(1)}$, $\phi_I^{(2)}$ はストークスの 2 次近似理論によると、次式のように表示できる。

* 正会員 工博 日本大学教授 理工学部海洋建築工学科
** (株)大林組技術研究所 (研究当時、日大大学院)
*** 正会員 工修 (株)大林組技術研究所

$$\phi_l^{(1)} = -i \frac{ag \cosh k(h+z)}{\omega \cosh kh} e^{ikx} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\phi_d^{(2)} = -i \frac{3}{8} a^2 \omega \frac{\cosh 2k(h+z)}{\sinh^4 kh} e^{2ikx} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 a ：線形理論の波振幅、 h ：水深、 g ：重力加速度である。散乱波ポテンシャル $\phi_d^{(1)}$ 、 $\phi_d^{(2)}$ に関する境界値問題は、

1 次の境界値問題：

$$\nabla^2 \phi_d^{(1)} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\frac{\partial \phi_d^{(1)}}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \phi_d^{(1)} = 0 \quad \text{on } S_F \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\frac{\partial \phi_d^{(1)}}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_l^{(1)}}{\partial n} \quad \text{on } S_H \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$-\frac{\partial \phi_d^{(1)}}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S_B \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left(\frac{\partial \phi_d^{(1)}}{\partial R} - ik \phi_d^{(1)} \right) = 0 \quad \text{on } S_R \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 $R = (x^2 + y^2)^{1/2}$ 。

2 次の境界値問題：

$$\nabla^2 \phi_d^{(2)} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{\partial \phi_d^{(2)}}{\partial z} - \frac{4\omega^2}{g} \phi_d^{(2)} = q_{1d} + q_{dd} \quad \text{on } S_F \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\frac{\partial \phi_d^{(2)}}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_l^{(2)}}{\partial n} \quad \text{on } S_H \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$-\frac{\partial \phi_d^{(2)}}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S_B \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\begin{aligned} \phi_d^{(2)} \sim & \frac{1}{\sqrt{R}} [F(\theta) e^{ik_2 R} \cosh k_2(h+z) \\ & + L(\theta) e^{ik_2 R(1+\cos\theta)} \cosh \{k(2+2\cos\theta)\}^{1/2} \\ & \cdot (h+z)] \quad \text{on } S_R \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

ここで、 q_{1d} 、 q_{dd} は、

$$\begin{aligned} q_{1d} = \frac{1}{g} = & \left[2i\omega \left(\frac{\partial \phi_l^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \phi_d^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_l^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial \phi_d^{(1)}}{\partial y} \right. \right. \\ & + \left. \frac{\partial \phi_l^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \phi_d^{(1)}}{\partial z} \right) - \frac{i\omega}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \phi_l^{(1)}}{\partial z^2} \phi_d^{(1)} + \frac{\partial^2 \phi_d^{(1)}}{\partial z^2} \phi_l^{(1)} \right. \\ & \left. \left. - \frac{i\omega^2}{2g} \left(\frac{\partial \phi_l^{(1)}}{\partial z} \phi_d^{(1)} + \frac{\partial \phi_d^{(1)}}{\partial z} \phi_l^{(1)} \right) \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{dd} = \frac{1}{g} \left[i\omega (\nabla \phi_d^{(1)})^2 - \frac{i\omega}{2} \frac{\partial^2 \phi_d^{(1)}}{\partial z^2} \phi_d^{(1)} + \frac{i\omega^2}{2} \left(\frac{\partial \phi_d^{(1)}}{\partial z} \phi_l^{(1)} \right) \right] \\ \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

となる。また、 $\frac{4\omega^2}{g} = k_2 \tanh k_2 h$ である。

3. 変動波圧

波浪による変動圧 P を

$$\begin{aligned} P = & \text{Re}[\varepsilon p^{(1)} e^{-i\omega t} + \varepsilon^2 p^{(2)} e^{-2i\omega t}] \\ = & \text{Re}[p^{(1)} e^{-i\omega t} + p^{(2)} e^{-2i\omega t}] \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

のように1次、2次の変動圧力を用いて定義すると、 ε を

含む1次の変動波圧 $p^{(1)}$ 及び2次の変動波圧 $p^{(2)}$ は、ベルヌーイの圧力方程式より下式のように与えられる。

$$p^{(1)} = i\omega \rho \phi^{(1)} \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$p^{(2)} = 2i\omega \rho \phi^{(2)} - \frac{\rho}{4} (\nabla \phi^{(1)})^2 \quad \dots\dots\dots (20)$$

さらに、2次の変動波圧を、線形の1次ポテンシャル $\phi^{(1)}$ に依存する $p^{(2)}$ と2次ポテンシャルに依存する $p_d^{(2)}$ に分けて考えると

$$p^{(2)} = -\frac{\rho}{4} (\nabla \phi^{(1)})^2 \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$p_d^{(2)} = 2i\omega \rho (\phi_l^{(1)} + \phi_d^{(2)}) \quad \dots\dots\dots (22)$$

のように表示できる。また、2次の変動波圧を2次の入射波ポテンシャルによる成分 $p_d^{(2)}$ と2次散乱波ポテンシャルによる成分 $p_{sd}^{(2)}$ に分けて次式のように表示する。

$$p_d^{(2)} = p_{dl}^{(2)} + p_{sd}^{(2)} \quad \dots\dots\dots (23)$$

式(23)の第1項は、式(5)の入射波ポテンシャルにより直接求めることができるが、第2項 $p_{sd}^{(2)}$ は2次の境界値問題を解き散乱波ポテンシャルを求める必要がある。本論では、 $p_{sd}^{(2)}$ を拡張された Haskind の公式を用いて逆算する。すなわち、変動波圧を求めようとする物体表面上の点を重心点とする微小要素 de に働く法線方向の2次波力の散乱波ポテンシャルによる成分 $\partial F_d^{(2)}$ は、次式のように定義できる。

$$\begin{aligned} \partial F_d^{(2)} = & -2i\omega \rho \iint_{de} \phi \frac{\partial \phi_l^{(2)}}{\partial n} dS + \iint_{S_F} q_{1d} \phi dS \\ & + \iint_{S_F} q_{dd} \phi dS \quad \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

ここで、(24)式中の ϕ の境界値問題は、

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi &= 0 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{4\omega^2}{g} \phi &= 0 & \text{on } S_F \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0 & \text{on } S_B \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} &= 1 & \text{on } de \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} &= 0 & \text{on } S_H - de \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left(\frac{\partial \phi}{\partial R} - ik_2 \phi \right) &= 0 & \text{on } S_R \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

となり線形1次ポテンシャルの境界値問題を解くのと全く同じ手法で解析できる。

微小要素 de に働く2次波力 $\partial F_d^{(2)}$ と、2次変動波圧 $p_d^{(2)}$ の関係は、微小要素の面積を dS とすると、

$$\partial F_d^{(2)} = p_d^{(2)} \cdot dS \quad \dots\dots\dots (26)$$

のように表すことができる。 $\partial F_d^{(2)}$ が式(24)より求めることができるならば、微小要素に働く散乱波ポテンシャルによる2次変動波圧 $p_{sd}^{(2)}$ は近似的に下式のように与えら

れる。

$$p_d^{(2)} = \partial F_d^{(2)} / \partial S \dots\dots\dots (27)$$

最終的に、(27)式より $p_d^{(2)}$ が与えられるならば、式(23)から $p_s^{(2)}$ が得られ、 $p_s^{(2)}$ と $p_l^{(2)}$ より $p^{(2)}$ が得られる。

4. 水槽実験

実験は、日本大学理工学部海洋建築工学科の平面水槽(全長×幅×深さ；19.0 m×7.0 m×1.5 m)で実施した。実験に使用した模型は、図-4.1 に示すコラム・フーティング型浮体であり、三分力計を介して吃水が0.59 m になるように固定した。また、圧力計は図-4.2 に示すようにフーティング上面及び下面の入射波と正対する位置($\theta=\pi$)に取り付けた。水深 h は1.0 m とし、波周期0.70 ~1.6 s の範囲で波振幅 $a=0.03$ m の規則波を造波し、波力及び波圧を計測した。計測されたデータは、定常な5波をサンプリング数2048点でAD変換した後、高速フーリエ変換により各周波数成分に分離した。

5. 結果及び考察

5.1 計算精度の確認

本論における変動波圧評価手法の精度を確認するために、水深・半径比 $h/r=3.0$ の固定鉛直円柱について2次散乱波ポテンシャルを式(27)より求め、Eatock Taylorら(1989)の解析解と比較した。その結果を図-5.1 に示

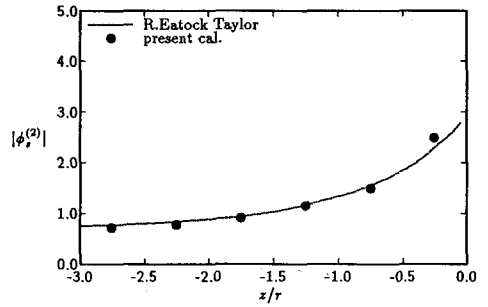


図-5.1 2次散乱波ポテンシャル ($\theta=\pi$, $h/r=3.0$, $kr=1.0$)

す。解析解と数値計算結果はよく一致しており、本評価法の妥当性が確認された。なお、1次ポテンシャルの計算は、8節点アイソパラメトリック要素を用いたハイブリッド境界要素法により行った。

5.2 実験との比較

コラム・フーティング型浮体に働く1次及び2次変動波圧の本法による計算値と実験値の比較を図-5.2, 5.3 に示す。図-5.2, 5.3 から分かるように2次変動波圧において無次元波数 $kr=1.5$ 以上でフーティング上面の実験値が計算値より若干大きな値を示すのを除いて、全体的に計算値と実験値は良好な一致を示している。従って、本論に示した2次変動波圧の評価法は、近似的な手法で

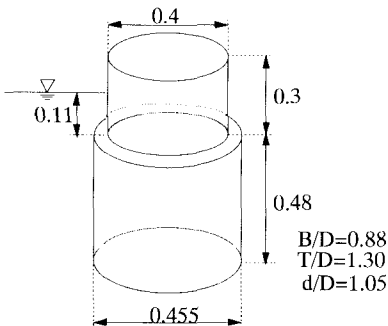


図-4.1 実験模型(B：コラム直径，T：吃水，d：フーティング高さ，D：フーティング直径，単位：m)

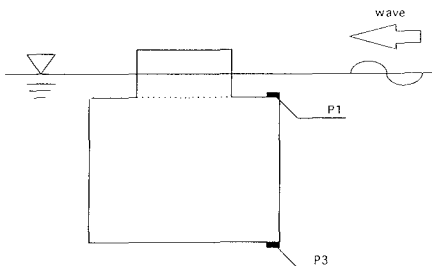


図-4.2 圧力センサーの取り付け位置

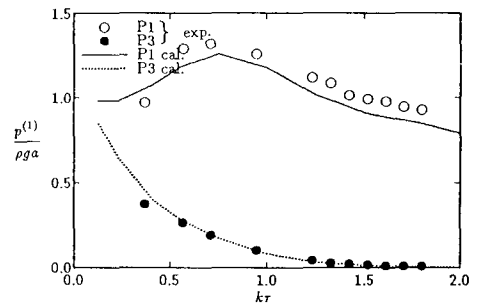


図-5.2 コラム・フーティング浮体に働く1次変動波圧 ($h/B=2.5$)

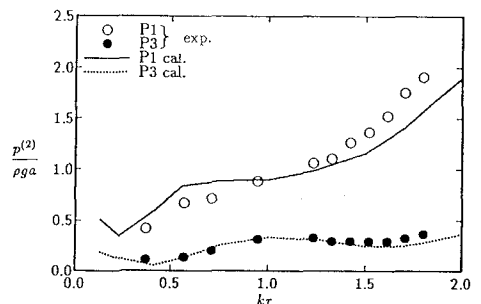


図-5.3 コラム・フーティング浮体に働く2次変動波圧 ($h/B=2.5$)

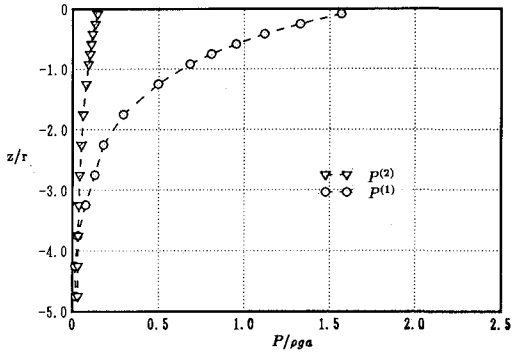


図-5.4 円柱に関する1次及び2次変動波圧の鉛直分布特性 ($\theta=\pi$, $h/r=5.0$, $k_r=1.0$)

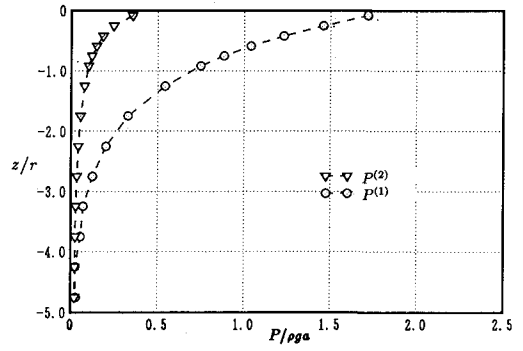


図-5.5 楕円柱に関する1次及び2次変動波圧の鉛直分布特性 ($\theta=\pi$, $h/r=5.0$, $k_r=1.0$)

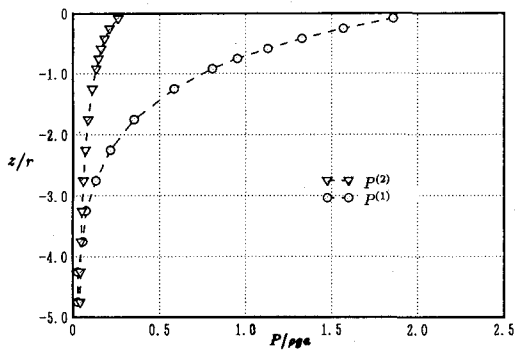


図-5.6 角柱に関する1次及び2次変動波圧の鉛直分布特性 ($\theta=\pi$, $h/r=5.0$, $k_r=1.0$)

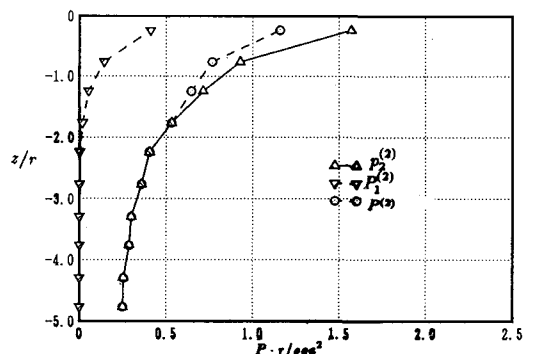


図-5.7 円柱に働く2次変動波圧 ($\theta=\pi$, $h/r=5.0$, $k_r=1.0$)

あるが実際の物理現象をよく説明しており実用に供し得る手法であることが確認された。

5.3 鉛直柱体に働く変動波圧

円柱、楕円柱、角柱に関する1次及び2次変動波圧の鉛直方向分布性状の比較を図-5.4～図-5.6に示す。各図とも入射波側 $\theta=\pi$, $kr=1.0$ に関する波圧分布であり、横軸は無次元波圧、縦軸は無次元化された深さを示す。各柱体とも $z/r > 3.0$ では、1次と2次の変動波圧が同程度の値をとることが分かる。また、1次変動波圧は、水深方向に急激に減衰するが、2次変動波圧は相対的に緩やかに減衰する。

図-5.7に円柱における2次ポテンシャルによる変動波圧 $p_2^{(2)}$ と1次ポテンシャルによる2次変動波圧 $p_1^{(2)}$ の鉛直方向分布の比較を示す。2次ポテンシャルによる $p_2^{(2)}$ は、水底近傍でも減衰せず、前述のように1次変動波圧と同程度かそれ以上の値を示す。これは、2次散乱波ポテンシャルによる成分の減衰が緩やかであるためである。一方、1次ポテンシャルによる成分 $p_1^{(2)}$ は、水深方向に対して急激に減衰し、 $z/r \geq 2.0$ ではほとんど零に収束する。

6. 結 論

本論で得られた結論を整理すると以下のとおりである。

1) 計算結果と実験結果の比較から、本論の計算手法は、任意形状構造物に働く2次変動波圧の実用計算法として有効な手法であることが確認された。

2) 円柱、角柱、楕円柱に働く2次変動波圧の鉛直方向分布性状をグラフ化して示した。

3) 2)の計算結果から2次変動波圧において、2次ポテンシャルによる成分は、水深方向に緩やかに減衰し、 $z/r > 3.0$ では1次変動波圧と同程度の値となる。これは2次散乱波ポテンシャルによる成分の減衰が緩やかであるからである。

謝辞：本論文の作成に際して多大なご協力を頂いた日本大学大学院居駒知樹君、八木紀君、日本大学学部生太田拓夫君に感謝します。

参考文献

- Eatock Talor, R.; S. M. Hung and F. P. Chau (1989): On the distribution of second-order pressure on a vertical circular cylinder, *Applied Ocean Research*, Vol. 11, No. 4, pp. 183-193.
- Kim, M. H. and D.K.P. Yue (1989): The complete second-order diffraction solution for an axisymmetric body, Part 1. Monochromatic incident waves, *J. Fluid Mech.* Vol. 200, pp. 235-264.
- 増田光一, 永井孝志, 柴山泰亮 (1991): 3次元海洋構造物に作用する非線形波力の計算について, *海岸工学論文集*, 第38巻, pp. 711-715.
- Chau, F. P. and R. Eatock Talor (1992): Second-order wave diffraction by vertical cylinder, *J. Fluid Mech.* Vol. 240, pp. 571-599.
- 後藤 暁 (1993): コラム・フーティング型浮体に働く2次周波数と波強制力に関する研究, 日本大学修士論文.
-