

エネルギー損失を考慮した多列柱体列による波の透過と反射に関する研究

角 野 昇 八*・仲 田 義 弘**

1. 緒 言

柱体列を複数に並べた多列柱体列は、基本構成要素として各種の海岸・海洋構造物にみられる構造物であり、それによる波の散乱の問題は重要でかつ興味深い問題である。このような背景から、この問題については既にいくつか研究例がみられる(例えば、萩原, 1985)。なかでも、Darlymple ら (1988) は、この問題の線形境界値問題を円柱の断面形状を厳密に考慮して wide-spacing 近似の仮定の下に行っている。しかるにそこでの対象は円柱に限られ、しかも渦の剝離に伴う粘性減衰の影響の導入の可否については何も示されていない。また、著者らも任意断面の柱体列について同様の仮定の下に解析を行ったが、理論的に説明が困難な定数を導入しなければならない弱点があり、さらに粘性減衰の影響についても触れていなかった(角野・小田・阿部, 1985)。

本研究では、柱体列周辺の波動場をより厳密に解析できる最近の著者らの手法(Kakuno・Liu, 1993)を適用して上記の弱点を克服し、任意断面(各列内では断面は同じである必要がある)の多列の柱体列の透過・反射特性を線形理論としてより厳密に解明するとともに、解に与える非線形損失エネルギーの影響量を評価し、また2列、3列の場合の理論値と実験値との比較によってこの手法の妥当性を検証する。なお、本理論でも wide-spacing 近似の仮定を設け、各列による減衰定常波の影響は無視できるものとした。さらに、隣接柱体中心間隔は波長よりもかなりの程度短いとの仮定を設ける必要がある。

2. 理論解析

(1) 問題の定式化

一定水深 h の水域に設置された m 列の多列柱体列を考える(図-1 参照)。隣接柱体中心間隔を $2B$ とし、スリット幅を $2a$ とする(したがって、 a/B は開口率)。 x 軸を波の進行方向にとり、最沖側列に沿って y 軸を、 z 軸を鉛直上向きにとる。列には、沖側より順次番号を付す。

したがって、例えば a_1/B_1 は1列目の開口率を表すことになる。また、最前列から r 番目の列までの列中心間隔を l_r とする ($l_1=0$)。この柱体列に微小振幅波が直角に入射するものとし、その透過率と反射率を考える。

領域全体の支配方程式は3次元のラプラスの方程式であり、その解としての速度ポテンシャルを水底での境界条件を満足させる形で

$$\Phi = \phi(x, y) \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{-i\omega t} \dots\dots\dots (1)$$

のようにおく。ここに、 ω は角振動数、 k は波数であり、水面における境界条件より、分散関係式

$$\omega^2 = gk \tanh kh \dots\dots\dots (2)$$

を満足する固有値である。式(1)を支配方程式に代入すれば、

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0 \dots\dots\dots (3)$$

のヘルムホルツの式を得る。境界条件には、ほかに各柱体表面における水粒子不透過の条件

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

が課されなければならない。ここに $\vec{n}$ は柱体表面への法線成分を表す。

入射波の速度ポテンシャルを

$$\phi_{inc} = e^{ikx} \dots\dots\dots (5)$$

と表すとき、放射条件を

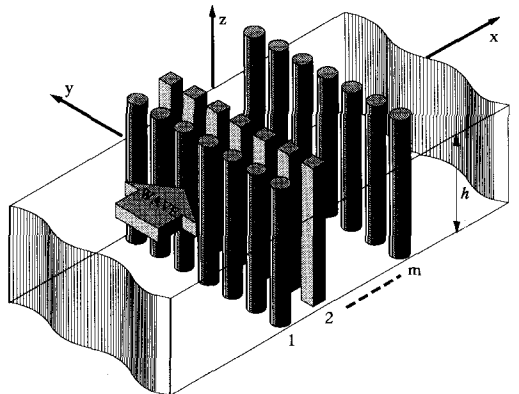


図-1 多列多柱列

* 正 会 員 工博 大阪市立大学助教授 工学部土木工学科
 ** 学生会員 大阪市立大学大学院 工学研究科

$$\phi \rightarrow \phi_{inc} \rightarrow R_1 e^{-ikx}, \quad (x \rightarrow -\infty) \dots\dots\dots (6)$$

$$\phi \rightarrow T_m e^{ikx}, \quad (x \rightarrow \infty) \dots\dots\dots (7)$$

のように表すことができる。ここに式中の i は虚数単位、 R は反射率、 T は透過率を表し、添え字は列番号を表している。また、 r と $(r+1)$ 番目の列間では、

$$\phi = T_r e^{ikx} + R_{r+1} e^{-ikx}, \quad (l_r \ll x \ll l_{r+1}) \dots\dots (8)$$

のように速度ポテンシャルを表す。

(2) 漸近展開接合法の適用

漸近展開接合法を適用するにあたり、領域を内部領域と外部領域に分割する。内部領域は列近傍の領域で、そこでの長さのスケールはほぼ $O(B)$ 程度と見なされる領域である。また、外部領域は列から離れた領域で、すなわち $O(|x|/B) \gg 1$ であって、そこでの長さのスケールは波長程度と考えられる領域である。 $\varepsilon = kB \ll 1$ の仮定の下に漸近展開接合法が適用される。多列柱体列を対象とするここでは、 B は1列目のものをもって、 $\varepsilon = kB_1$ とする。

a) 外部解

内部領域の長さのスケール B_1 で $(\bar{x}, \bar{y}) = (x/B_1, y/B_1)$ のように無次元化操作を行えば、式(8)は一般的に、

$$\phi = T_r e^{i\varepsilon \bar{x}} + R_{r+1} e^{-i\varepsilon \bar{x}} \quad (\bar{l}_r \ll \bar{x} \ll \bar{l}_{r+1}), \dots\dots (9)$$

のようになる。ただし、柱体列の最沖側領域では、 $T_0 = 1$ 、また同じく最岸側領域では $R_{m+1} = 0$ と考える必要がある。

ここで、反射率および透過率を微小量 ε の級数展開形に表す。例えば、 r 番目の列からの反射率と透過率は

$$R_r = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j R_{r,j}, \quad T_r = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j T_{r,j} \dots\dots\dots (10)$$

である。さらに、 $e^{i\varepsilon \bar{x}}$ および $e^{-i\varepsilon \bar{x}}$ を $\bar{x} = \bar{l}_1 (=0), \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_m$ の近傍でテーラー展開し、それらを上式とともに先の式(9)に代入すれば、外部解の内部極限における形を得ることができる。 r 番目の列の沖側および岸側では、それぞれ

$$\begin{aligned} \phi &= T_{r-1} e^{i\varepsilon \bar{x}} + R_r e^{-i\varepsilon \bar{x}} \\ &= (T_{r-1,0} e^{i\varepsilon \bar{l}_r} + R_{r,0} e^{-i\varepsilon \bar{l}_r}) \\ &\quad + \varepsilon \{ i(T_{r-1,0} e^{i\varepsilon \bar{l}_r} - R_{r,0} e^{-i\varepsilon \bar{l}_r})(\bar{x} - \bar{l}_r) \\ &\quad + (T_{r-1,1} e^{i\varepsilon \bar{l}_r} + R_{r,1} e^{-i\varepsilon \bar{l}_r}) \} \\ &\quad + \varepsilon^2 \left\{ -(T_{r-1,0} e^{i\varepsilon \bar{l}_r} + R_{r,0} e^{-i\varepsilon \bar{l}_r}) \frac{(\bar{x} - \bar{l}_r)^2}{2} \right. \\ &\quad + i(T_{r-1,1} e^{i\varepsilon \bar{l}_r} - R_{r,1} e^{-i\varepsilon \bar{l}_r})(\bar{x} - \bar{l}_r) \\ &\quad + T_{r-1,2} e^{i\varepsilon \bar{l}_r} + R_{r,2} e^{-i\varepsilon \bar{l}_r} \} \\ &\quad + \varepsilon^3 \left\{ i(-T_{r-1,0} e^{i\varepsilon \bar{l}_r} + R_{r,0} e^{-i\varepsilon \bar{l}_r}) \frac{(\bar{x} - \bar{l}_r)^3}{6} \right. \\ &\quad \left. - (T_{r-1,1} e^{i\varepsilon \bar{l}_r} + R_{r,1} e^{-i\varepsilon \bar{l}_r}) \frac{(\bar{x} - \bar{l}_r)^2}{2} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ i(T_{r-1,2} e^{i\varepsilon \bar{l}_r} - R_{r,2} e^{-i\varepsilon \bar{l}_r})(\bar{x} - \bar{l}_r) \\ &\left. + (T_{r-1,3} e^{i\varepsilon \bar{l}_r} + R_{r,3} e^{-i\varepsilon \bar{l}_r}) \right\} + \dots, \\ &(\bar{x} \rightarrow \bar{l}_r) \dots\dots (11-a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi &= T_r e^{i\varepsilon \bar{x}} + R_{r+1} e^{-i\varepsilon \bar{x}} \\ &= (T_{r,0} e^{i\varepsilon \bar{l}_r} + R_{r+1,0} e^{-i\varepsilon \bar{l}_r}) \\ &\quad + \varepsilon \{ i(T_{r,0} e^{i\varepsilon \bar{l}_r} - R_{r+1,0} e^{-i\varepsilon \bar{l}_r})(\bar{x} - \bar{l}_r) \\ &\quad + (T_{r,1} e^{i\varepsilon \bar{l}_r} + R_{r+1,1} e^{-i\varepsilon \bar{l}_r}) \} \\ &\quad + \varepsilon^2 \left\{ -(T_{r,0} e^{i\varepsilon \bar{l}_r} + R_{r+1,0} e^{-i\varepsilon \bar{l}_r}) \frac{(\bar{x} - \bar{l}_r)^2}{2} \right. \\ &\quad + i(T_{r,1} e^{i\varepsilon \bar{l}_r} - R_{r+1,1} e^{-i\varepsilon \bar{l}_r})(\bar{x} - \bar{l}_r) \\ &\quad + T_{r,2} e^{i\varepsilon \bar{l}_r} + R_{r+1,2} e^{-i\varepsilon \bar{l}_r} \} \\ &\quad + \varepsilon^3 \left\{ i(-T_{r,0} e^{i\varepsilon \bar{l}_r} + R_{r+1,0} e^{-i\varepsilon \bar{l}_r}) \frac{(\bar{x} - \bar{l}_r)^3}{6} \right. \\ &\quad \left. - (T_{r,1} e^{i\varepsilon \bar{l}_r} + R_{r+1,1} e^{-i\varepsilon \bar{l}_r}) \frac{(\bar{x} - \bar{l}_r)^2}{2} \right. \\ &\quad + i(T_{r,2} e^{i\varepsilon \bar{l}_r} - R_{r+1,2} e^{-i\varepsilon \bar{l}_r})(\bar{x} - \bar{l}_r) \\ &\quad \left. + (T_{r,3} e^{i\varepsilon \bar{l}_r} + R_{r+1,3} e^{-i\varepsilon \bar{l}_r}) \right\} + \dots, \\ &(\bar{x} \rightarrow \bar{l}_{r+1}) \dots\dots (11-b) \end{aligned}$$

となる。

b) 内部解

内部領域でも速度ポテンシャルを式(10)と同様の ε の級数形に展開し、無次元化したヘルムホルツの式

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{y}^2} + \varepsilon^2 \phi = \nabla^2 \phi + \varepsilon^2 \phi = 0 \dots\dots\dots (12)$$

に代入する。その結果、一連の支配方程式が

$$\nabla^2 \phi_j = 0, \quad (j=0, 1) \dots\dots\dots (13-a)$$

$$\nabla^2 \phi_j + \phi_{j-2} = 0, \quad (j=2, 3, 4, \dots) \dots\dots\dots (13-b)$$

のように、ラプラスの式およびポアソンの式の形で得られる。この場合の境界条件は $\partial \phi_j / \partial \vec{n} = 0 (j=0, 1, 2, \dots)$ である。

これらの式の解の漸近形(外部極限における形)は、柱体間通過後の一様流に相当すると考えられ

$$\phi' = U_r'(x \pm C_r') + F_r', \quad (x \gtrless l_r) \dots\dots\dots (14)$$

のように表される。ここに、プライム記号は有次元量であることを表し、 U_r' は速度振幅、 F_r' は任意定数。 C_r' は blockage coefficient (閉塞係数) とよばれ、柱体列断面のみによって純理論的に求められる量である。その具体的式表現については例えば、Kakuno・Liu (1993) にみられる。上式を内部領域の座標で無次元化すれば

$$\phi = U_r \left(\bar{x} \pm \frac{C_r}{\varepsilon} \right) + F_r, \quad (\bar{x} \gtrless \bar{l}_r) \dots\dots\dots (15)$$

を得る。ここに

$$C_r = kC_r' \dots\dots\dots (16)$$

は無次元閉塞係数である。ここで、 U_r および F_r も ε の級数形に展開して

$$U_r = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j U_{r,j}, \quad F_r = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j F_{r,j} \quad \dots\dots\dots (17)$$

とする。上式を式(15)に代入することによって、内部解の外部極限における形を得ることができる。 r 番目の列については、

$$\phi_j \sim U_{r,j}(\bar{x} - \bar{l}_r) \pm U_{r,j+1} C_r + F_{r,j}, \\ (j=0, 1, \bar{x} \geq \bar{l}_r) \quad \dots\dots\dots (18)$$

となる。

c) 接合

各列において、式(11)の外部解の内部極限表現と式(18)の内部解の外部極限表現を ε の同じ次数の項ごとに接合することによって未知係数を順次確定することができる。 ε^0 の項(1次項)の接合により、 r 番目の列について、

$$U_{r,0} = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$T_{r-1,0} e^{ie\ell_r} + R_{r,0} e^{-ie\ell_r} = -U_{r,1} C_r + F_{r,0} \quad \dots\dots\dots (20-a)$$

$$T_{r,0} e^{ie\ell_r} + R_{r+1,0} e^{-ie\ell_r} = U_{r,1} C_r + F_{r,0} \quad \dots\dots\dots (20-b)$$

の関係が得られ、 ε^1 の項(2次項)の接合により、同様に、

$$i(T_{r-1,0} e^{ie\ell_r} - R_{r,0} e^{-ie\ell_r}) = U_{r,1} \quad \dots\dots\dots (21-a)$$

$$T_{r-1,1} e^{ie\ell_r} + R_{r,1} e^{-ie\ell_r} = -U_{r,2} C_r + F_{r,1} \quad \dots\dots\dots (21-b)$$

$$i(T_{r,0} e^{ie\ell_r} - R_{r+1,0} e^{-ie\ell_r}) = U_{r,1} \quad \dots\dots\dots (21-c)$$

$$T_{r,1} e^{ie\ell_r} + R_{r+1,1} e^{-ie\ell_r} = U_{r,2} C_r + F_{r,1} \quad \dots\dots\dots (21-d)$$

が得られる。これ以上の高次項の接合も、1列を対象とした Kakuno・Liu (1993) におけるのと同様に操作によって求めることができる。 ε^2 の項(3次項)の接合により、 r 番目の列について、

$$i(T_{r-1,1} e^{ie\ell_r} - R_{r,1} e^{-ie\ell_r}) = U_{r,2} + F_{r,0} M_r \quad (22-a)$$

$$T_{r-1,2} e^{ie\ell_r} + R_{r,2} e^{-ie\ell_r} = -U_{r,3} C_r + F_{r,2} \quad \dots\dots\dots (22-b)$$

$$i(T_{r,1} e^{ie\ell_r} - R_{r+1,1} e^{-ie\ell_r}) = U_{r,2} - F_{r,0} M_r \quad (22-c)$$

$$T_{r,2} e^{ie\ell_r} + R_{r+1,2} e^{-ie\ell_r} = U_{r,3} C_r + F_{r,2} \quad \dots\dots\dots (22-d)$$

が得られ、また ε^3 の項(4次項)の接合により、同様に、

$$i(T_{r-1,2} e^{ie\ell_r} - R_{r,2} e^{-ie\ell_r}) = U_{r,3} + F_{r,1} M_r \quad (23-a)$$

$$i(T_{r,2} e^{ie\ell_r} - R_{r+1,2} e^{-ie\ell_r}) = U_{r,3} - F_{r,1} M_r \quad (23-b)$$

が得られる。ただし、式(23)では3次の項までの解を求めるために必要な式のみを記した。式中の M_r は、式(13-b)のポアソンの方程式の解を求める際に、その特解中の1項によって解の中に現れる円柱周囲を通過する mass flux を相殺するために必要とされる量であり、

$$2M_r = - \int \frac{\partial(-\bar{x}^2/2)}{\partial n_r} ds_r = -S_r/B_r^2 \quad \dots\dots\dots (24)$$

で求められる (Martin・Dalrymple, 1988)。ここに、 S_r は柱体断面積の1/2である。

結局、 m 列の柱体列の各列において、未知係数は $R_{r,j}$, $T_{r,j}$, $U_{r,j+1}$, $F_{r,j}$ の4つとなるので、 $4m$ 元の連立方程式を各次数において解く必要がある。低次数における連立方程式を解くことによって、順次、高次数の方程式中

の係数値が確定され、同時にその次数の透過率および反射率が求められていくことになる。柱体列全体の3次項までの透過率および反射率は、

$$T = T_{m,0} + \varepsilon T_{m,1} + \varepsilon^2 T_{m,2} \quad \dots\dots\dots (25-a)$$

$$R = R_{1,0} + \varepsilon R_{1,1} + \varepsilon^2 R_{1,2} \quad \dots\dots\dots (25-b)$$

で表される。

(3) エネルギー損失の影響

スリット開口部での渦の剝離にともなうエネルギー損失の影響の導入方法は、1列の柱体列のみを対象とした Kakuno・Liu (1993) と基本的に同様であり、実部に閉塞係数 C_r を、虚部に未知係数 $C'_{i,r}$ をもつような複素係数で各列の閉塞係数を置き換えればよい。虚部の係数は損失係数 f が与えられれば、

$$\frac{C'_{i,r}}{B_r} = \frac{|\tau_r|(H/L)}{(9\pi/4)(a_r/B_r)^2(B_r/L)} \left(\frac{\sinh^2 kh + 3}{\sinh 2kh + 2kh} \right) f \quad \dots\dots\dots (26)$$

で決定される。ここに、 H は入射波高、 L は波長であり、 τ_r は一様流流速の入射波の水粒子速度に対する比で、

$$\tau_r = T_r - R_{r+1} \quad \dots\dots\dots (27)$$

で求めることができる。 f は角柱列および円柱列に対しては既に求められており (Kakuno・Liu, 1993)、それぞれ、

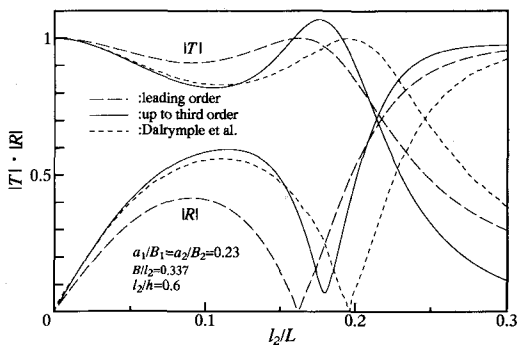
$$f = 1.5, \quad f = 0.75 \quad \dots\dots\dots (28)$$

のように与えられる。

3. 結 果

(1) 高次項の影響

図-2には、2列の円柱列について、本手法による1次項および3次項までの損失を考慮しない透過率・反射率の計算値の例を Dalrymple ら (1988) による解とともに示した。1列の場合の高次項の影響は解全体を増減させるように現れたが (Kakuno・Liu, 1993)、2列の場合には解全体を増減させるとともに、短波長側へ移動させる



円柱 ($B/L=0.337$)

図-2 高次項の影響

効果をもつことが示されている。このように3次までの高次項は解をかなりの程度補正する効果をもつが、Darlympleらの解はさらに短波長側に位置している。

(2) 理論の実験的検証 (2列円柱列)

理論の妥当性を検証するために、計算値を実験値(角野・小田・阿部, 1985)と比較した。図-3はその結果の図である。損失係数の値は、既述の1列の円柱列に対する $f=0.75$ を用いた。図によれば、ほとんどのケースについて実験値とエネルギー損失を考慮した3次項までの理論値はよく一致していて、本手法におけるエネルギー損失の評価法および1列の場合の係数値を2列の場合につい

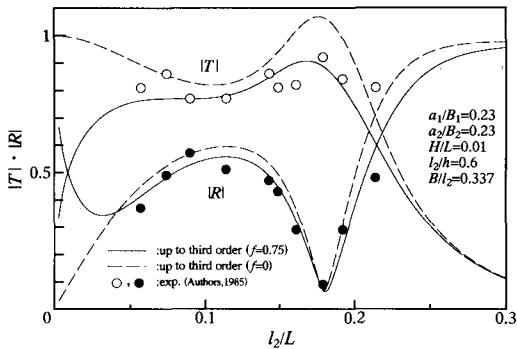


図-3(a) 計算値と実験値の比較 (2列円柱列)

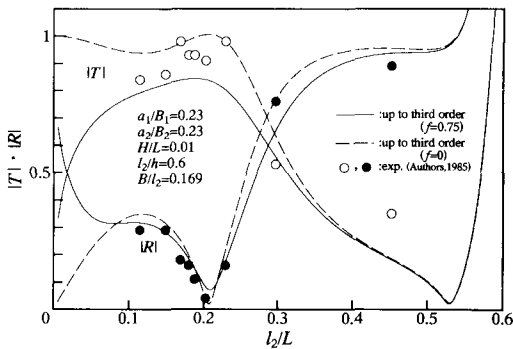


図-3(b) 計算値と実験値の比較 (2列円柱列)

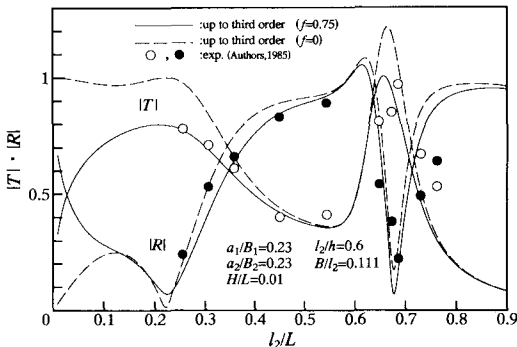


図-3(c) 計算値と実験値の比較 (2列円柱列)

て用いることの妥当性が確認できる。また、図-3(a)と同条件の図-2を比較すれば、実験値はDarlympleらの解の特性よりはむしろ本手法の3次項までの計算値の特性とよく合致していることがわかる。

(3) 理論の実験的検証 (3列円柱列)

沖側より順次開口率が小さくなっていくような配列の3列の円柱列の実験値(萩原, 1985)と本手法の計算値を比較した。各列の損失係数の値はここでも $f=0.75$ とした。図-4はその2例を示すが、実験値とエネルギー損失を考慮した3次項までの理論値がよく一致していることから、3列の場合についても上記と全く同じ結論が導ける。また、3列のこの柱体配置の場合には、極めて大きなエネルギー損失の効果が透過率に現れているのが認められる。したがって、回折散乱項のみならず、エネルギー損失項の評価なくしては現象の正確な記述が困難であることがこの場合にはいえる。なお、図中には示されていないが、3列のこの配列では、1列の場合と同じく高次項の影響は解全体を増減させるように現れた。

(4) 3列円柱列の各列開口率の最適値

図-5は、図-4と同条件下で3列の開口率を0.1~0.3まで種々変化させた場合の計算値の比較の結果を示したものである($H/L=0.015$)。図によれば、透過率・反射率

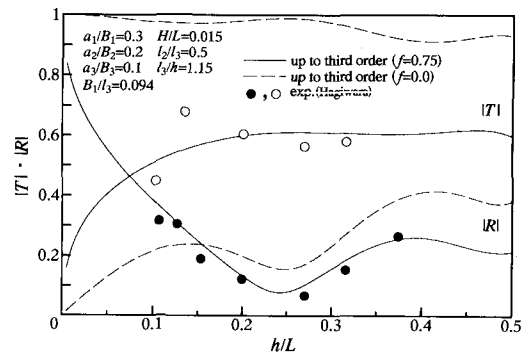


図-4(a) 計算値と実験値の比較 (3列円柱列)

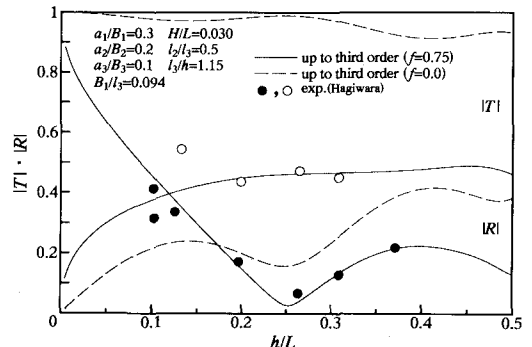


図-4(b) 計算値と実験値の比較 (3列円柱列)

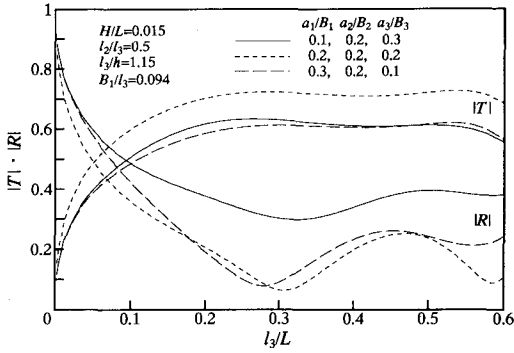


図-5 最適開口率配置の検討 (3列円柱列)

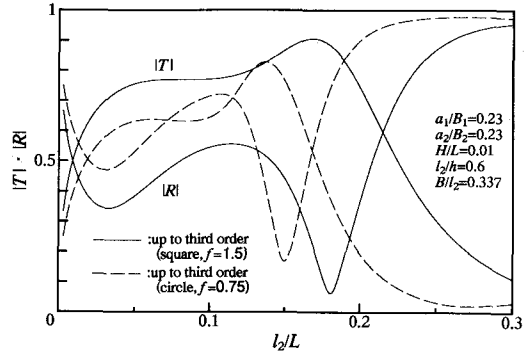


図-6 円柱列と角柱列の比較 (2列円柱列)

をとともに小さくできる配置は沖側より順次開口率を小さくした列であることがわかる。

(5) 円柱列と角柱列の比較

図-6 は、図-2 と同じ条件下にある 2 列円柱列と 2 列正方形断面角柱列の透過率・反射率の比較の結果の 1 例を示したものである。ただし、正方形の一辺長は円直径と同じとしている。図より、曲線の l_2/L に対する変化特性は大きく変わらないものの、角柱列の透過率は円柱列のそれに比べて大きく減少する一方で、反射率はかなり増加していることがわかる。

4. 結 言

多列柱体列による波の散乱の理論展開を著者らの従来のもよりも厳密に行い、同時にスリットにおけるエネルギー損失の理論への導入も行った。理論値は 2 列、3 列の場合について実験値と比較してその妥当性を検証した。開口率の小さい条件での実験値と、エネルギー損失を考慮に入れた、あるいは入れない同条件の計算値の比

較の結果からは、エネルギー損失の影響はきわめて大きく現れることがあり、影響を考慮にいれずに現象を正確に表現することは不可能であることを明らかにした。

参 考 文 献

- 角野昇八, 小田一紀, 阿部功 (1985): 任意列, 任意断面柱体列周辺波動場の境界値問題解析, 第 32 回海講論文集, pp. 589-593.
- 萩原運弘 (1985): 多重円筒型防波堤の反射率・透過率の解析と諸要因の影響, 土木学会論文集, 第 363/II-4 号, pp. 185-194.
- Darlymple, R. A., S. N. Seo, and P. A. Martin (1988): Water wave scattering by rows of circular cylinders, Proc. 21st ICCE, ASCE, pp. 2216-2228.
- Kakuno, S. and P. L.-F. Liu (1993): Scattering of water waves by vertical cylinders, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engrg., ASCE, Vol. 119, No. 3, pp. 302-322.
- Martin, P. A. and R. A. Dalrymple (1988): Scattering of long waves by cylindrical obstacles and gratings using matched asymptotic expansions, J. Fluid Mech., Vol. 188, pp. 465-490.