

Boussinesq 方程式による構造物近傍の非線形平面波の解析

喜 岡 渉*・長 嶋 禎 泰**

1. はじめに

浅海域における構造物周辺の波動場の解析には、波の非線形性に加えて分散性を考慮した長波方程式である Boussinesq 方程式が有用であると考えられる。Boussinesq 方程式によると、波と構造物の干渉問題に対して非線形干渉の効果とともに圧力分布において鉛直加速度の効果も考慮することができるために、構造物への波の打ち上げや波力の予測精度が線形回折理論などの従来の計算モデルと比べて向上することが期待できる。さらに、漂砂問題に密接に関連する平均水位の変動や海浜流、不規則波に対しては長周期波の変形なども構造物による波変形と同時に計算することが可能である。しかしながら、Boussinesq 方程式の非線形項や高次微分の分散項の近似上、短周期の波変形の解析に適用できる数値計算法の開発は容易なものではなく、適用例はきわめて少ない。

Isaacson (1977) ならびに喜岡 (1988) は、構造物近傍の波動場に対してクノイド波の第 1 次近似解を求めているが、弱非線形干渉の仮定のもとに線形回折波理論を用いた近似的な解析法となっており、Boussinesq 方程式に本来含まれている有限振幅性の効果は厳密に考慮されていない。構造物近傍の波動場に対して Boussinesq 方程式を差分法により直接解く試みは Wang et al. (1992) および Wang (1993) によってなされている。彼らは、構造物境界の近似精度を高めるために Boussinesq 方程式を曲線座標系で書き換え、構造物近傍では密な格子配置になるように計算法を工夫している。

本研究は、Boussinesq 方程式による構造物近傍の波動場の効率的な計算法を有限要素法に基づき開発するとともに、構造物まわりの回折波と打ち上げ高を具体的に計算することによって Boussinesq 方程式の適用性について検討を加えるものである。有限要素法を用いることにより高次微分の分散項の処理が比較的容易となり、構造物近傍の波動場の解析には合理的な計算法となることを示す。解析例としては角柱まわりの回折波と打ち上げ高を取りあげることとし、線形長波方程式による計算結果

と比較することによって回折に及ぼす非線形性と分散性の影響を明らかにする。

2. 基礎方程式

$x-y$ 平面が静水面に一致するように座標系をとり、水深の変動に対して緩勾配を仮定すると、Boussinesq 方程式は次の連続式 (1) と運動量方程式 (2), (3) で与えられる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{ (h + \eta)u \} + \frac{\partial}{\partial y} \{ (h + \eta)v \} = 0 \quad \cdots \cdots (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{h^2}{3} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y \partial t} \right) \quad \cdots \cdots (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{h^2}{3} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial t} \right) \quad \cdots \cdots (3)$$

ここで、 η は水面変動量、 u , v はそれぞれ x , y 方向の水深平均流速、 h は静水深、 g は重力加速度である。構造物近傍の波動場の解析には、構造物表面における流速に対しての境界条件式が上式に加えられ、ここでは不透過の構造物を考えるものとするとして次式で与えられる。

$$un_x + vn_y = 0 \quad \cdots \cdots (4)$$

ここで、 n_x , n_y はそれぞれ構造物表面に立てた外向法線ベクトルの x , y 方向成分を示す。なお、基礎方程式 (1) ~ (3) は基本的には一定水深下で導かれた方程式であるが、パラメータ $\mu^2 (= \omega^2 h / g)$, ω は波の角周波数) について水深の変動が $O(|\nabla h|) \leq O(\mu^2)$ であるような緩勾配仮定下では同様な方程式になる (Liu et al., 1985)。水深の変動を $O(|\nabla h|) \leq O(\mu)$ で考慮した Boussinesq 方程式は Peregrine (1967) によって導かれている。

Boussinesq 方程式 (1) ~ (3) の分散特性は、方程式を 1 次元の線形方程式に書き換えることによって調べることができて、波数を k とすると次式で表される。

$$\omega^2 = \frac{ghk^2}{1 + \frac{1}{3}k^2 h^2} \quad \cdots \cdots (5)$$

上式から許容誤差を 5% 以内に設定して分散性に関する実用上の適用限界を求めるとおよそ $\mu^2 \leq 1.4$ となり、分

* 正会員 Ph.D 名古屋工業大学教授 工学部社会開発工学科

** 正会員 工修 鹿島建設(株)関東支店

散性に対して修正を加えていない Boussinesq 方程式系の中では最も適用範囲が広い (Madsen et al., 1991).

3. 数値計算法

(1) 有限要素方程式

有限要素としてここでは空間方向に対して、2次元シンプレックス要素を用いる。このとき、未知変数を ϕ で代表させて ϕ の節点での値を Φ_i, Φ_j, Φ_k とし、3点の座標を $(X_i, Y_i), (X_j, Y_j), (X_k, Y_k)$ とすると、未知変数 ϕ は基底関数を用いて式 (6) のように近似することができる。

$$\phi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k \quad \cdots \cdots \cdots (6)$$

ここで、

$$N_i = \frac{1}{2A} [a_i + b_i x + c_i y] \quad \cdots \cdots \cdots (7)$$

$$\begin{cases} a_i = X_j Y_k - X_k Y_j \\ b_i = Y_j - Y_k \\ c_i = X_k - X_j \end{cases}$$

ただし、このままでは式 (2), (3) の右辺に含まれる空間方向への2階微分項に対して式 (6) の内挿式を用いることができない。そこで弱形式を利用するために、要素方程式の定式化の方法として Galerkin 法を用いる。まず、基礎方程式に対し未知変数と同じく式 (6) で表される重み関数をかける。次に関数定義域で積分を行うが、このとき2階微分項にグリーンの公式を適用することにより、導関数の階数を下げることができる。こうして要素ごとに得られた要素方程式を重み関数に従って重ね合わせることで次式を得る。

$$M_{ki} \dot{\eta}_i = Q_{kij} H_i u_j + R_{kij} H_i v_j + Q_{kij} u_i H_j + R_{kij} v_i H_j \quad \cdots \cdots \cdots (8)$$

$$\begin{aligned} & \left(M_{ki} + \frac{h^2}{3} U_{ki} \right) \dot{u}_i + \frac{h^2}{3} W_{ki} \dot{v}_i \\ & = -Q_{kij} u_i u_j - R_{kij} v_i u_j - g S_{ki} \eta_i \quad \cdots \cdots \cdots (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(M_{ki} + \frac{h^2}{3} V_{ki} \right) \dot{v}_i + \frac{h^2}{3} X_{ki} \dot{u}_i \\ & = -Q_{kij} u_i v_j - R_{kij} v_i v_j - g T_{ki} \eta_i \quad \cdots \cdots \cdots (10) \end{aligned}$$

ここに、 $H_i = (h + \eta)_i$ で、流体境界を S とすると各係数は次式で与えられる。

$$M_{ki} = \iint N_k N_i dx dy, \quad Q_{kij} = \iint N_k N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} dx dy,$$

$$R_{kij} = \iint N_k N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} dx dy,$$

$$U_{ki} = \iint \frac{\partial N_k}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} dx dy - \int N_k \frac{\partial N_i}{\partial x} n_x dS,$$

$$W_{ki} = \iint \frac{\partial N_k}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial y} dx dy - \int N_k \frac{\partial N_i}{\partial y} n_y dS,$$

$$S_{ki} = \iint N_k \frac{\partial N_i}{\partial x} dx dy,$$

$$V_{ki} = \iint \frac{\partial N_k}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} dx dy + \int N_k \frac{\partial N_i}{\partial y} n_x dS,$$

$$X_{ki} = \iint \frac{\partial N_k}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial x} dx dy + \int N_k \frac{\partial N_i}{\partial x} n_x dS,$$

$$T_{ki} = \iint N_k \frac{\partial N_i}{\partial y} dx dy$$

(2) 時間積分の計算

式 (8) ~ (10) は時間に対して線形微分方程式となっている。この解法としてここではオイラーの前進差分を用いることとする。このとき時間に対する微分は

$$\dot{\phi} = \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} \quad \cdots \cdots \cdots (11)$$

により近似される。ここに、添字 n は時間ステップを表す。以上により、次の有限要素方程式 (12) ~ (14) が得られる。

$$M_{ki} \eta_i^{n+1} = M_{ki} \eta_i^n + \Delta t \{ Q_{kij} H_i^n u_j^n + R_{kij} H_i^n v_j^n + Q_{kij} u_i^n H_j^n + R_{kij} v_i^n H_j^n \} \quad \cdots \cdots \cdots (12)$$

$$\begin{aligned} & \left(M_{ki} + \frac{h^2}{3} U_{ki} \right) u_i^{n+1} + \frac{h^2}{3} W_{ki} v_i^{n+1} \\ & = \left(M_{ki} + \frac{h^2}{3} U_{ki} \right) u_i^n + \frac{h^2}{3} W_{ki} v_i^n - \Delta t Q_{kij} u_i^n u_j^n \\ & \quad - \Delta t R_{kij} v_i^n u_j^n - g \Delta t S_{ki} \eta_i^n \quad \cdots \cdots \cdots (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(M_{ki} + \frac{h^2}{3} V_{ki} \right) v_i^{n+1} + \frac{h^2}{3} X_{ki} u_i^{n+1} \\ & = \left(M_{ki} + \frac{h^2}{3} V_{ki} \right) v_i^n + \frac{h^2}{3} X_{ki} u_i^n - \Delta t Q_{kij} u_i^n v_j^n \\ & \quad - \Delta t R_{kij} v_i^n v_j^n - g \Delta t T_{ki} \eta_i^n \quad \cdots \cdots \cdots (14) \end{aligned}$$

上式 (12) は半陽解法となっているが、このままでは不安定となり解を得ない。そこで、鄭・川原 (1992) にならって左辺の係数行列を集中化して次のようなアルゴリズムを用いる。

$$\bar{M}_{ki} \eta_i^{n+1} = \bar{M}_{ki} \eta_i^n + \Delta t \{ Q_{kij} H_i^n u_j^n + R_{kij} H_i^n v_j^n + Q_{kij} u_i^n H_j^n + R_{kij} v_i^n H_j^n \} \quad \cdots \cdots \cdots (15)$$

ここに、 $\bar{M}$ は集中質量行列を示す。ただし、右辺第1項に集中質量行列を用いると、計算が不安定になるため、かわりに次のような係数行列 $\bar{M}$ を用いる。

$$\bar{M} = e \bar{M} + (1 - e) M \quad \cdots \cdots \cdots (16)$$

ここに e は選択係数で、計算の安定化と人工粘性による誤差を最小化するように決める。ここでは予備計算の結果から $e = 0.80$ とした。

(3) 境界条件

構造物表面および反射壁に対しては、式 (4) で示される不透過の境界条件式を適用する。透過境界としては、線形長波を仮定した次の境界条件式を与える。

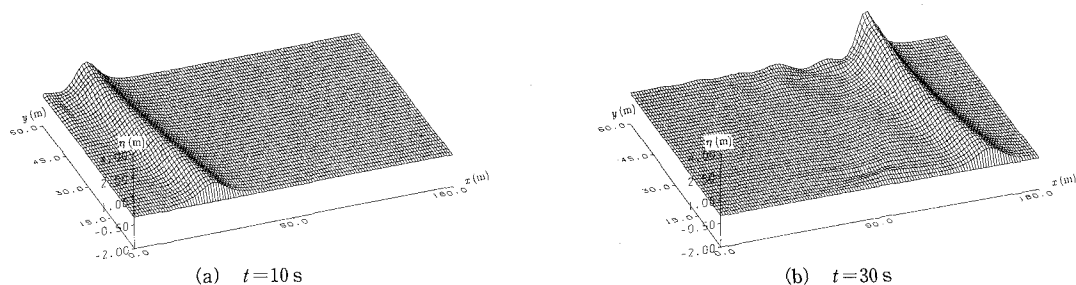


図-1 壁面前面のステム波の計算結果

$$un_x + vn_y = \sqrt{\frac{g}{h}} \eta \dots \dots \dots (17)$$

入射波としては、計算条件として与えられるアーセル数 $U_r = \varepsilon / \mu^2 (\varepsilon = a_0 / h, a_0$ は入射波の代表振幅) に対応するクノイド波の第1次近似解を用いる。

4. 鉛直壁前面のステム波の計算

計算精度の検証のために、反射波との非線形干渉の効果が卓越して現れる鉛直壁前面のステム波の解析を行った。水深は一定で $h=10$ m とし、直線状の鉛直壁方向に対して 20° の角度で波を入射させた。入射波の周期は $T=19.4$ s で、波高は $H=2$ m および 4 m の2種類とした。要素分割は計算領域で一様で、一辺が 3 m の正三角形要素を用いた。

図-1は $H=2$ m としたときの計算結果で、 $y=60$ m に置かれた反射壁に沿って発達するステム波の空間波形を示す。図の (b) では壁面による反射波は見かけ上現れず、伝播に伴って壁面に垂直にステム波が発達している。入射角が小さくステム波が形成されるような条件下では放物型近似を用いたスペクトル法 (Liu et al., 1985) が適用できることから、ここではスペクトル法により同様な計算を行った Yoon・Liu (1989) の結果と比較することによって計算精度を調べることとした。スペクトル法では差分近似を用いるものの、非線形項や分散項を精度良く評価することが可能である。壁面に沿う波高の変化を2波長にわたって比較したところ、 $H=2$ m および 4 m のケースとともに彼らの計算結果と良く一致したことから、本計算法の妥当性が確かめられた。

5. 角柱まわりの回折波の計算

図-2に示すような幅 150 m の水路中央に置かれた一辺が $b=21$ m の正方形断面の角柱まわりの非線形平面波の挙動を解析した。角柱壁面と水路の両側壁は不透境界とし、境界条件式 (4) を与えた。計算に用いた三角形要素の一辺は 3 m で、計算領域において一様にとった。水深は一定で $h=5$ m とし、入射波の周期は $T=12$ s で、波高は $H=1$ m および 2 m の2種類とした。

図-3に $H=1$ m のケースの空間波形の計算結果を示す。また比較のために、図-4と図-5にそれぞれ線形長波方程式および弱非線形干渉を仮定した疑似クノイド波第1次解による計算結果を示す。線形長波方程式による計算にも同様に有限要素法を用いたが、このときの有限要素方程式は2段階陽的解法によって効率良く解くことができる (Kawahara et al., 1982)。クノイド波第1次近似解の計算には、Isacson (1977) の理論を任意断面の柱状構造物に拡張した喜岡 (1988) の計算法を用いた。計算に用いた周波数についてのフーリエ級数展開の次数は $N=8$ である。クノイド波第1次近似解は周波数領域で解かれるため、図-5の空間波形は図-3の結果にほぼ対応するように通過波の波峰の位相 δ (角柱中心に波峰があるときを基準) を合わせている。なお、図-5の結果は完全な開領域で求められており、水路側壁の影響は考慮されていない。

図-3の (a) に示した非線形平面波では角柱前面に特徴的な円弧状の回折散乱波が現れているのに対し、図-4および図-5の (a) では角柱前面でのへこみは見られるものの円弧状の波模様は現れていない。入射波の波峰が角柱通過後の回折波形については、図-3の (b) では背面付近の水面変動が大きく水面が盛り上がり見え、角柱背後の位相速度が見かけ上遅くなるのに対し、図-4および図-5の (b) ではこうした傾向は明確ではない。計

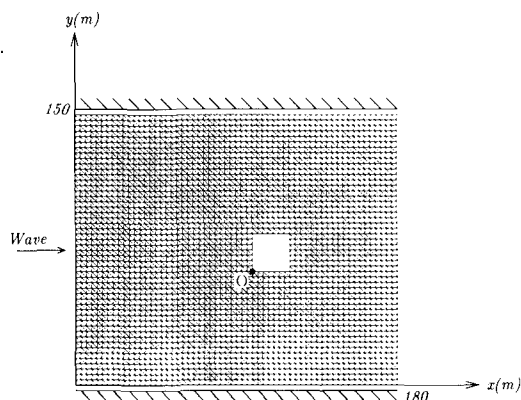


図-2 計算領域と要素分割

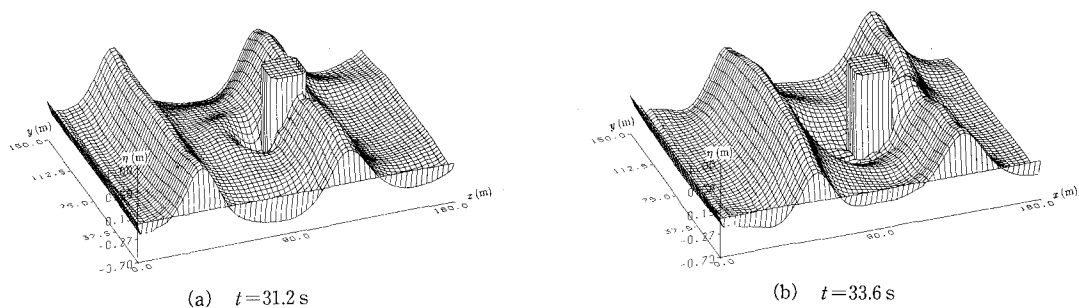


図-3 Boussinesq 方程式による回折波の計算結果

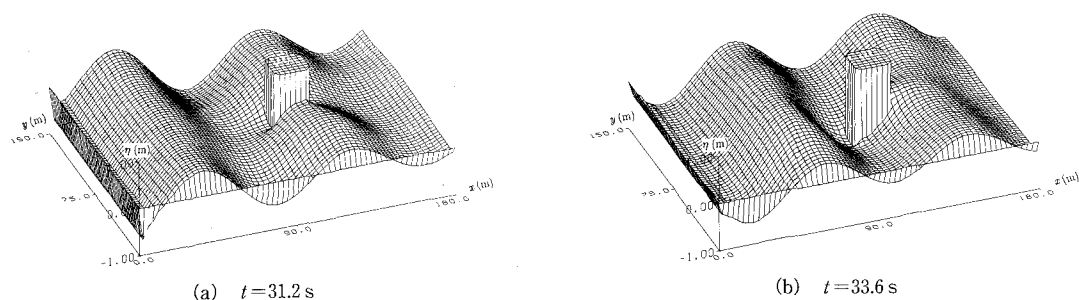


図-4 線形長波方程式による回折波の計算結果

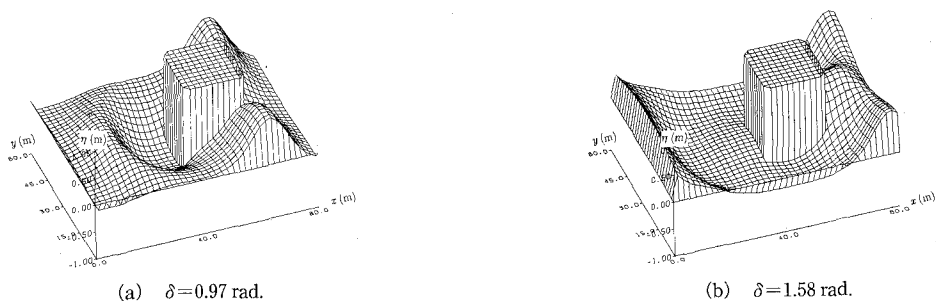


図-5 クノイド波の第1次近似解による回折波の計算結果

算と同一条件での模型実験により角柱前面の空間波形をVTRに撮って調べたところ、 z 方向の変動を強調した計算結果の図と直接比較することはできないが、実験結果においても円弧状の回折散乱波が見られた。なお、実験に用いた造波水路は幅1.5 m、長さ11.5 m、高さ0.6 mで、造波板から約4 m離れた水路中央に一辺が21 cmの角柱模型を設置した。

円弧状の平面波は線形長波方程式や弱非線形干渉を仮定した近似解では再現されなかったことから、構造物近傍の非線形回折波の計算にはBoussinesq方程式に含まれる非線形項および分散項の効果を無視することはできないことがわかる。なお、ここで述べた非線形回折波の特徴は、図-6に示すように $H=2 \text{ m}$ のケースではより明確に現れる。

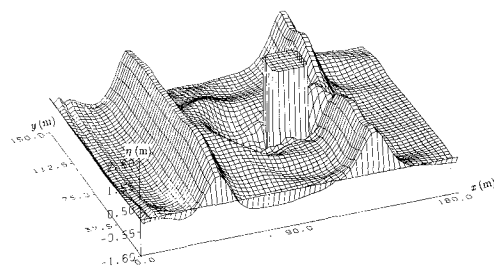
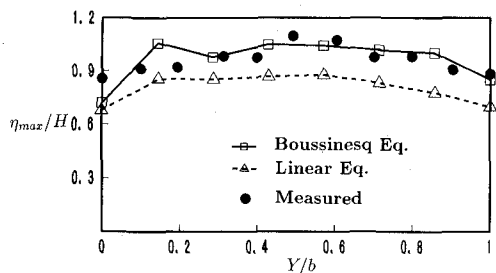
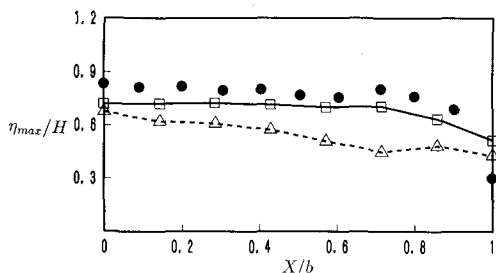

 図-6 Boussinesq 方程式による回折波の計算結果 ($H=2 \text{ m}$, $t=32.0 \text{ s}$)

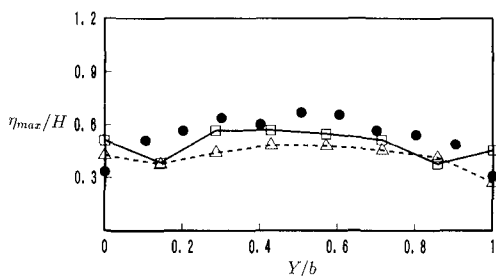
図-7は角柱前面、側面および後面における打ち上げ高の計算結果を線形長波方程式による計算値およびVTRから読みとった実験値と比較したものである。図で X , Y は図-2のO点を基準にした測定点の距離を示



(a) 前面



(b) 側面



(c) 後面

図-7 角柱への打ち上げ高の比較

す。造波装置の都合上、実験は $H=1\text{ m}$ のケースのみとしたため、図には $H=1\text{ m}$ の結果を示している。角柱前面においては両計算値の差異は大きく、後面ではほぼ一致している。実験値とは Boussinesq 方程式による計算結果が良く一致している。

6. おわりに

有限要素法の Galerkin 法を用いることにより Boussinesq 方程式の高次微分項の微分階数を下げることができることから、計算アルゴリズムを簡略化することができて、特に構造物近傍の波動場の解析には効率的な計

算手法となることを示した。ただし、長時間発展の計算や構造物からの回折の影響が広領域に及ぶ場合には、ここで用いた透過境界の取り扱い方では不十分で、より合理的な開境界の処理方法を検討する必要がある。

計算例として取りあげた角柱まわりの回折波には非線形平面波として特徴的な水面変動が現れ、その挙動の解析には Boussinesq 方程式が有用であることを示した。Boussinesq 方程式には圧力分布に対する補正項が含まれているために、構造物に作用する動水圧や波力の予測精度も他の長波モデルに比べて向上することが期待されるが、動水圧・波力についての適用性の検討については今後の課題としたい。

なお、本研究は土木学会海岸工学委員会研究現況レビュー小委員会（委員長 西村仁嗣 筑波大学教授）における「構造物近傍の波動場と波力の計算法 WG」の作業の一環として行われたものである。

参考文献

- 喜岡 渉 (1988): クノイド波による回折波力の算定方法と適用性について, 第 35 回海岸工学講演会論文集, pp. 617-621.
- 鄭 榮裕・川原睦人 (1992): 有限要素法による Boussinesq 方程式の解析, 土木学会第 47 回年次学術講演会概要集 II, pp. 622-623.
- Isaacson, M. (1977): Shallow water diffraction around large cylinder, J. Waterway, Port and Ocean Div., ASCE, Vol. 103, No. WW1, pp. 69-82.
- Kawahara, M., H. Hirano, K. Tsubota and K. Inagaki (1982): Selective lumping finite element method for shallow water flow, Int. J. Num. Meth. Fluid, Vol. 2, pp. 89-112.
- Liu, P. L. -F., S. B. Yoon and J. T. Kirby (1985): Nonlinear refraction-diffraction of waves in shallow water, J. Fluid Mech., Vol. 153, pp. 185-201.
- Madsen, P. A., R. Murray and O. R. Sørensen (1991): A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, Coastal Eng., Vol. 15, pp. 371-388.
- Peregrine, D. H. (1967): Long waves on a beach, J. Fluid Mech., Vol. 27, pp. 815-827.
- Wang, K. -H., T. Y. Wu and G. T. Yates (1992): Three-dimensional scattering of solitary waves by vertical cylinder, J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng., Vol. 118, No. 5, pp. 551-566.
- Wang, K. -H. (1993): Diffraction of solitary waves by breakwaters, J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng., Vol. 119, No. 1, pp. 49-69.
- Yoon, S. B. and P. L. -F. Liu (1989): Stem waves along breakwater, J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng., Vol. 115, No. 5, pp. 635-648.