

効率的な 3 次元潮流計算法とその適用性について

佐藤勝弘*・松岡道男*・小林一光**

1. はじめに

水質変化, 漂砂, シルテーション現象を解析する上でその外力となる潮流の 3 次元分布を精度よく予測することは重要である。数値計算による予測はこのための有効な方法であり, 従来より多くの計算法が提案されている。

3 次元潮流計算における計算時間ステップ間隔の制限は, 通常表面重力波の CFL 条件と運動方程式中の鉛直粘性項に関する安定条件の 2 つが最も厳しい場合が多い。例えば, Leendertse ら (1977) は, 当初リープフロッグ法による計算モデルを開発したが, 計算時間・安定性の問題から運動方程式の鉛直粘性項を implicit な形として安定性の向上を図った計算法を提案した。このモデルでは水位はリープフロッグ法で計算されるため CFL 条件が最も厳しい安定条件となった。一方, 堀江 (1983) は Leendertse ら (1977) と異なり水位勾配項を implicit な形とした運動方程式と連続式を組み合わせ, これを ADI 法で解き水位・流量を求める方法を開発している。この場合には, CFL 条件の制限はないが, 層厚を小さくした時に鉛直粘性項の安定条件の制限が残る。また, 佐藤ら (1992) は修正 ADI 法を用いたさらに効率的な計算法を提案している。いずれの方法も格子間隔・層厚を小さくした場合にはどちらかの安定条件から時間ステップ間隔が制限され計算時間の増大が予想される。このため, 従来は計算時間の制限から鉛直層数を抑えたり, いわゆる Mode Split 法のような準 3 次元的な計算が行われることが多く (例えば, Blumberg ら (1987)), 精度上の問題が残った。

そこで本研究では, 3 次元潮流計算の精度の向上と計算の効率化を目的として 3 次元レベルモデルの効率的な計算法を開発した。モデル形状に対する本計算法による計算結果と従来の計算法, 準 3 次元計算法によるものを比較することにより本計算法の有効性を調べた。さらに, 東京湾の潮流計算を行い計算法の適用性を検討した。

2. 効率的な計算法の開発

(1) 基礎式

本研究では, 鶴谷 (1989) がシルテーション問題の解析に用いた 3 次元レベルモデルと同様に次の連続式と運動方程式を基礎式とした。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \sum_{k=1}^K M_k + \frac{\partial}{\partial y} \sum_{k=1}^K N_k = 0 \quad \cdots (1)$$

$$\frac{\partial M_k}{\partial t} + g H_k \frac{\partial \zeta}{\partial x} - (\tau_{xz})_{k-1/2} + (\tau_{xz})_{k+1/2} = F_{xk} \quad \cdots (2)$$

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} + g H_k \frac{\partial \zeta}{\partial y} - (\tau_{yz})_{k-1/2} + (\tau_{yz})_{k+1/2} = F_{yk} \quad \cdots (3)$$

ここに, x, y, z, t は図-1 に示す空間座標と時間, ζ は水位, M, N は水平流量成分, H は層厚, K は層数, g は重力加速度, 添字 (k) は第 k 層での値を表す。

τ_{xz}, τ_{yz} は海面摩擦, 表面内部摩擦, 底面摩擦項成分であり, τ_{xz} の場合は次式のように表す。

$$(\tau_{xz})_{1/2} = \tau_{wx}, \quad (\tau_{xz})_{k-1/2} = \left(A_z \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{k-1/2}$$

$$(\tau_{xz})_{K+1/2} = \gamma_b^2 \sqrt{u_K^2 + v_K^2} u_K \quad \cdots (4)$$

ここに, τ_w は風応力, u, v は水平流速成分, A_z は鉛直渦動粘性係数, γ_b^2 は底面摩擦係数である。 F_x, F_y は移流項等の成分であり, 密度一定の場合には F_x は次のように表される。

$$F_{xk} = -\frac{\partial u_k M_k}{\partial x} - \frac{\partial v_k M_k}{\partial y} - (uw)_{k-1/2} + (uw)_{k+1/2} + f N_k + A_H \frac{\partial^2 M_k}{\partial x^2} + A_H \frac{\partial^2 M_k}{\partial y^2} \quad \cdots (5)$$

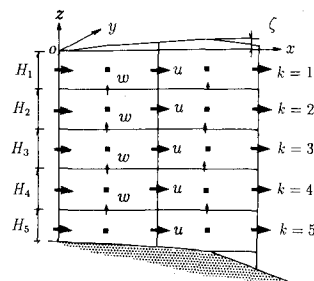


図-1 記号の定義

* 正会員 工修 日本テトラポッド(株)応用水理研究所

** 正会員 日本テトラポッド(株)応用水理研究所

ここに, w は鉛直流速, f はコリオリ係数, A_H は水平混合係数である。

(2) 差分式

計算は差分法で行い, 変数配置は通常のスタaggerド配置を用いた。ここでは, 計算の安定性を考慮して, 運動方程式中の水位勾配項と鉛直粘性項の両項を implicit に差分化した。格子点 $(i+1/2, j, k)$ での x -方向の運動方程式の差分式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{M_k^* - M_k}{\Delta t} + \theta_1 g H_k \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^* + (1 - \theta_1) g H_k \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \\ & - \theta_2 \frac{A_{zk-1/2}}{H_{k-1/2}} \left(\frac{M_{k-1}^*}{H_{k-1}} - \frac{M_k^*}{H_k} \right) \\ & + \theta_2 \frac{A_{zk+1/2}}{H_{k+1/2}} \left(\frac{M_k^*}{H_k} - \frac{M_{k+1}^*}{H_{k+1}} \right) \\ & + (1 - \theta_2) \{ -(\tau_{xz})_{k-1/2} + (\tau_{xz})_{k+1/2} \} = F_{zk} \cdots \cdots (6) \end{aligned}$$

ここで, 水平方向の添字 $(i+1/2, j)$ は省略しており, 上付き(*)印のあるものは未知の時間ステップの値, 無いものは既知時間ステップの諸量を表す。 Δx は x -方向格子間隔, Δt は時間ステップ間隔, $H_{k-1/2} = (H_k + H_{k-1})/2$, θ_1, θ_2 は水平, 鉛直方向の時間重みである。また, 水位勾配項は次のように表した。

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^*_{i+1/2, j} = (\zeta_{i+1, j}^* - \zeta_{i, j}^*) / \Delta x \cdots \cdots (7)$$

なお, $(\tau_{xz})_{1/2}^*$ は境界値として与え, $(\tau_{xz})_{k+1/2}^*$ は次のように線形化した。

$$(\tau_{xz})_{k+1/2}^* = \gamma_b^2 \sqrt{u_k^2 + v_k^2} M_k^* / H_k$$

既知時間の水位勾配, 鉛直粘性項の差分は未知量の場合と同様である。 F_{zk} 項はここでは explicit に差分化し, 移流項には一次の風上差分法を用いた。同様に, y -方向の運動方程式の $(i, j+1/2, k)$ 点での差分式が得られる。

連続式の (i, j) 点での差分式は次式とした。

$$\begin{aligned} & \frac{\zeta_{i, j}^* - \zeta_{i, j}}{\Delta t} + \theta_1 \left(\sum_{k=1}^K M_k^* (i+1/2, j) - \sum_{k=1}^K M_k^* (i-1/2, j) \right) / \Delta x \\ & + \theta_1 \left(\sum_{k=1}^K N_k^* (i, j+1/2) - \sum_{k=1}^K N_k^* (i, j-1/2) \right) / \Delta y \\ & + (1 - \theta_1) \left(\frac{\partial}{\partial x} \sum_{k=1}^K M_k + \frac{\partial}{\partial y} \sum_{k=1}^K N_k \right)_{(i, j)} = 0 \cdots \cdots (8) \end{aligned}$$

ここに, Δy は y -方向格子間隔である。

以上より, 時間重み θ_1, θ_2 を 0.5 以上に採れば, 表面重力波の CFL 条件と鉛直粘性項からの安定条件による Δt に関する制限を緩和できる。

(3) 計算方法

まず, 式(6)を整理して次式で表す。

$$-a_k M_{k-1}^* + b_k M_k^* - c_k M_{k+1}^* = d_k (\partial \zeta / \partial x)^* + e_k \cdots \cdots (9)$$

ここに, $a_k \sim f_k$ は既知量による係数である。連続式(式

(8)) と組み合わせるためには, この式を次式の形にしておく必要がある。

$$M_k^* = F_k (\partial \zeta / \partial x)^* + G_k \cdots \cdots (10)$$

ここに, F_k, G_k は循環係数である。式(9)から F_k, G_k を求める際, 従来は大きさ(層数×層数)行列の逆行列を計算する必要があった(Casulli ら(1992))。本研究では, 3重対角係数の場合のトーマス・アルゴリズムと同様な手順で係数 F_k, G_k を求める効率的な計算法を開発した。つまり, Forward Sweep では, 式(9)の解として次の関係式を仮定する。

$$M_k^* = E'_k M_{k+1}^* + F'_k (\partial \zeta / \partial x)^* + G'_k \cdots \cdots (11)$$

ここに, E'_k, F'_k, G'_k は第2の循環係数である。式(11)で k を $k-1$ としたものを式(10)に代入すると次の漸化式を得る。

$$\left. \begin{aligned} E'_k &= \frac{c_k}{b_k - a_k E'_{k-1}}, F'_k = \frac{d_k + a_k F'_{k-1}}{b_k - a_k E'_{k-1}}, \\ G'_k &= \frac{e_k + a_k G'_{k-1}}{b_k - a_k E'_{k-1}} \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (12)$$

第1層では $a_1 = 0$ なので式(11)と比較して

$$E'_1 = c_1 / b_1, F'_1 = d_1 / b_1, G'_1 = e_1 / b_1 \cdots \cdots (13)$$

となり, この値が Forward Sweep の開始値となる。以降第 $(K-1)$ 層まで順次式(11)より (E'_k, F'_k, G'_k) が求められる。Return Sweep では先の式(10)の関係式を仮定する。式(10)を式(11)に代入して, (F_k, G_k) に関する次の漸化式を得る。

$$F_k = F'_k + E'_k F_{k+1}, G_k = G'_k + E'_k G_{k+1}, \cdots \cdots (14)$$

第 K 層で $c_K = 0$ であることに注意して, $k = K-1$ とした式(11)を式(10)に代入し式(10)と比較すると, 次の Return Sweep の開始値が求まる。

$$F_K = \frac{d_K + a_K F'_{K-1}}{b_K - a_K E'_{K-1}}, G_K = \frac{e_K + a_K G'_{K-1}}{b_K - a_K E'_{K-1}} \cdots \cdots (15)$$

Forward Sweep とは逆方向に式(14)より第1層まで順次 (F_k, G_k) が求められる。同様な方法で, y -方向の各層の流量についても式(10)と同形の関係式が得られる。

次に, これらの各層の流量式を式(6)に代入して次の水位 ζ^* を未知数とする2次元の楕円型方程式を得る。

$$\begin{aligned} & \zeta_{i, j}^* - D_{xi+1/2, j} (\zeta_{i+1, j}^* - \zeta_{i, j}^*) + D_{xi-1/2, j} (\zeta_{i, j}^* - \zeta_{i-1, j}^*) \\ & - D_{yi, j+1/2} (\zeta_{i, j+1}^* - \zeta_{i, j}^*) + D_{yi, j-1/2} (\zeta_{i, j}^* - \zeta_{i, j-1}^*) = h_{i, j} \\ & \cdots \cdots (16) \end{aligned}$$

ここに, D_x, D_y, h は既知の値による係数である。この式の解法には, 単層の場合と同様な方法が適用できる。ここでは山下ら(1991)と同様に Iterative ADI 法を用いた。すなわち, 式(16)を x, y 方向に分割した式(17), 式(18)の解 Z_1, Z_2 が一致した時の収束解 ($\zeta^* = Z_1 = Z_2$) を求めるべく調整量 q を媒介として ADI 法を繰り返す方法である。

$$Z_{1i,j}/2 - D_{xi+1/2,j}(Z_{1i+1,j} - Z_{1i,j}) + D_{xi-1/2,j}(Z_{1i,j} - Z_{1i-1,j}) = h_{xi,j} - q_{i,j} \dots (17)$$

$$Z_{2i,j}/2 - D_{yi,j+1/2}(Z_{2i,j+1} - Z_{2i,j}) + D_{yi,j-1/2}(Z_{2i,j} - Z_{2i,j-1}) = h_{yi,j} + q_{i,j} \dots (18)$$

ここに、 h_x , h_y は h を x , y -方向に分離した成分である。これらの式は1次元であるため q が与えられれば適当な境界条件のもとでトーマス・アルゴリズムにより簡単に解ける。したがって、収束解が得られる方向に調整量 q を効率的に修正することがこの解法のポイントとなる。ここでは共役勾配法を導入し調整量の収束性を高めた。計算は Dinh ら (1986) に習い次の様に行った。

ステップ0：[初期値の設定] 調整量の初期値 q^0 を設定し、式(17)、式(18)を解き、残差 $r^0 = Z_1^0 - Z_2^0$ を求める。 q の修正方向の初期値を $p^0 = r^0$ とする。以下、ステップ1以降は繰り返し計算部となり、繰り返し計算回数を m とする。

ステップ1：[修正量(α^m)設定] 式(17)、(18)の h_x , h_y をゼロとした式を解き、この解を y_1^m , y_2^m とする。修正量(α^m)を次式より求める。

$$\alpha^m = (r^m \cdot r^m) / (p^m \cdot y_1^m - y_2^m)$$

ステップ2：[q , Z_1 , Z_2 , r の新しい修正値を次式より求める。

$$q^{m+1} = q^m - \alpha^m p^m, \quad Z_1^{m+1} = Z_1^m - \alpha^m y_1^m$$

$$Z_2^{m+1} = Z_2^m - \alpha^m y_2^m, \quad r^{m+1} = Z_1^{m+1} - Z_2^{m+1}$$

ここで、誤差 r^{m+1} が所要精度の範囲であれば収束解となる。

ステップ3：[修正方向 p の修正] p の新しい修正値を次式より求める。

$$p^{m+1} = r^{m+1} + \beta^m p^m, \quad \beta^m = (r^{m+1} \cdot r^{m+1}) / (r^m \cdot r^m)$$

所要の精度を得るまでステップ1へ戻り、各ステップの計算を繰り返す。

なお、境界条件として水位が与えられる場合はディクレ問題となる。この時、ステップ0では水位 ξ^* が式(17)、式(18)の境界条件となるが、ステップ1では y_1 , y_2 の境界値はゼロとして解く。また、流量境界条件の場合はノイマン問題となり、ステップ0、ステップ1共に境界での勾配をゼロとして解く。

Benqué ら (1982) が述べているように共役勾配法を用いた Iterative ADI 法は通常の SOR 法や共役勾配法と比較して収束が速く、クラン数が10~20程度であれば数10回の繰り返し計算で効率的に収束解が得られる。

最後に、求められた水位を式(10)等に代入して各層の流量が求められ、次の時間ステップに進む。

3. 適用性の検討

まず、本計算法の有効性、適用性を調べるために、図-2に示すモデル地形を対象とした潮流計算を行った。層厚

は1m、層数は最大10である。境界条件として左端で振幅50cmの半日周潮の潮汐を与え、上げ・下げ流速最強時の流速分布の様子を調べた。用いた γ_B^2 , A_z , A_H はそれぞれ0.003, 1 cm²/s, 10000 cm²/sである。また、同一条件でリープフロッグ法と Mode Split 法による計算を行い比較した。 Δt はリープフロッグ法で30s, Mode Split 法では通常の単層モデルから流量と水位を求める external mode は30s, 運動方程式から流速の鉛直方向を求める internal mode は600s, 本計算法では600sとした。図-3に流速分布の計算結果を示す。図より本計算法と他計算法の結果とで僅かに差が見られるが、本計算法は Δt をかなり大きく採っても他の計算法と同程度の精度を保っていることが分かる。このケースでは、計算時間はリープフロッグ法の場合を1.0とすると、Mode Split 法では0.2, 本計算法では0.1程度であり、本計算法が Mode Split 法と同程度の効率的な計算法であることが分かる。また、本計算モデルで同条件で層数を1(単層)として計算した場合の計算時間は今回の約半分程度であった。なお、ここには示されていないが Mode Split 法では鉛直流速分布に10⁻⁵cm/sのオーダーの差異があった。Mode Split 法の internal mode では連続式が直接使用されていないために複雑な海底地形に適する場合はこの差異は大きくなると予想され、鉛直流の分布が重要と

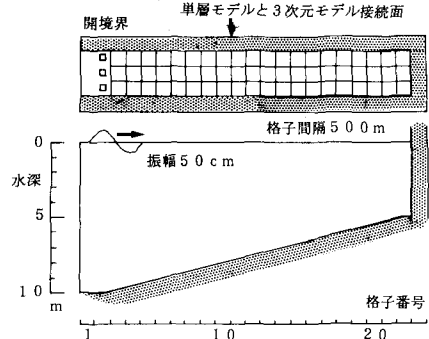


図-2 モデル地形

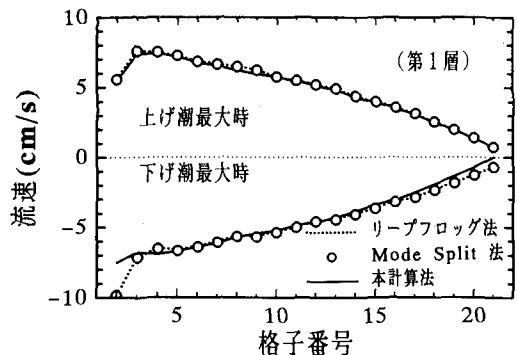


図-3 モデル地形での計算結果 (計算法の比較)

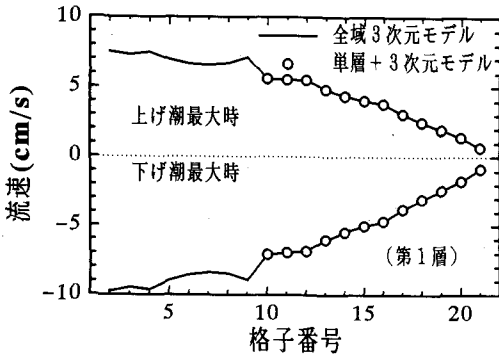


図-4 単層モデルとの接続計算結果

なる水質予測等に使用する場合は注意を要する。

次に、3次元レベルモデルと単層モデルとの領域接続の可能性について調べた。単層モデルでは式(10)に対応する流量と水位勾配の関係式が容易に導かれるので、式(16)を誘導する際の連続式中の線流量 $\sum M_k$, $\sum N_k$ を単層モデルの関係式で置き換えるだけで以降は同様なアルゴリズムが使用できる。この場合、単層モデルと整合性のある底面摩擦係数、鉛直粘性係数の設定法が問題となるが、ここでは単層モデルの底面摩擦係数を通常の方法でマンニングの粗度係数と水深より設定し、3次元モデルでは単層モデルでの値を層分けの状況に合わせてRobertら(1987)の提案方法で修正して与えた。鉛直粘性係数は一定値を与えた。図-2のモデル地形の左右半分を単層モデルと3次元モデルとした接続計算により得られた3次元モデル領域内の流速分布を図-4に示す。図中には比較のため全域3次元モデルで行った計算結果も示されている。計算条件はマンニングの粗度係数 n を0.03として底面摩擦係数を与えたこと以外は先のモデル地形の計算で使用したものと同一である。なお、この計算ではプログラミングの煩雑さを避けるために式(6)中の F_x の項は省略した。図-4より、単層モデルと接続した場合の流速分布は全域3次元計算した結果と良く一致しており、使用した接続方法が有効であることが分かる。

最後に、東京湾を対象とした潮流計算を実施し、適用性について調べた。ここでは、市原ら(1980)、Nakataら(1992)による東京湾の潮流シュミレーションを参考に計算領域、層分け、計算条件等を定めた。すなわち、計算範囲は神奈川県城ヶ島と千葉県富浦湾を結ぶ線以北の東京湾内全域とし、格子間隔1kmとした。層数は4層とし、第1層から4層までの層厚をそれぞれ2m、3m、5m、残りとした。境界条件は振幅36cmの M_2 潮を与えた。風応力、淡水流入量は無視した。 γ_b , A_z , A_H はそれぞれ0.0026, $1\text{ cm}^2/\text{s}$, $10^5\text{ cm}^2/\text{s}$ である。 Δt は240sと600sの2種類で計算時間ステップの影響を調べた。 $\Delta t = 240\text{ s}$ の場合の第1層の潮汐残差流の計算結果を図-5

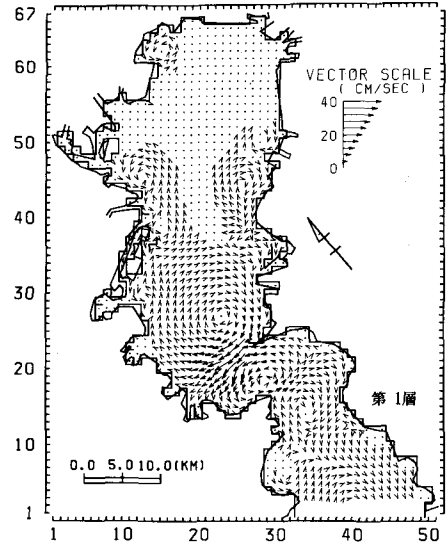


図-5 潮汐残差流の計算結果: $\Delta t = 240\text{ s}$

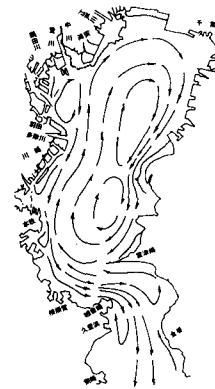


図-6 東京湾の恒流の模式図(村上ら(1984)による)

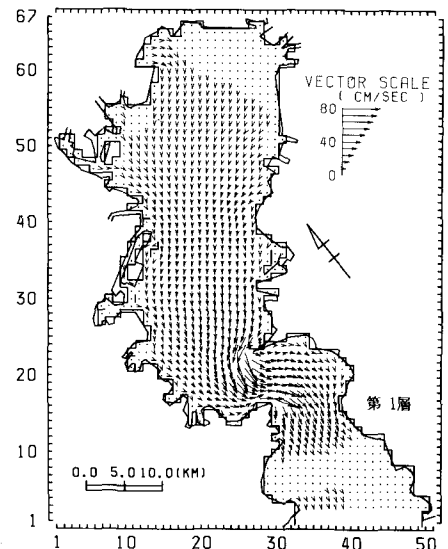


図-7 下げ潮最強時の流速分布: $\Delta t = 240\text{ s}$

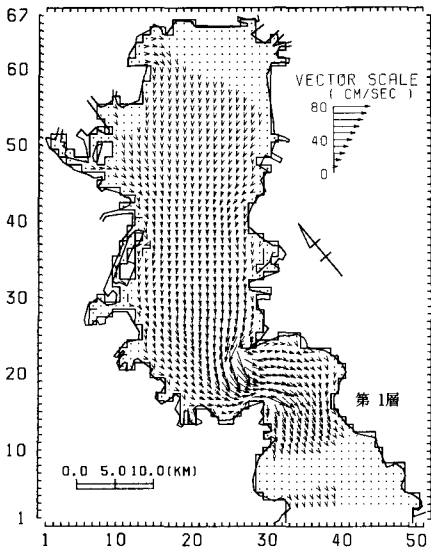


図-8 下げ潮最強時の流速分布: $\Delta t=600$ s

に示す。この結果と村上ら (1984) によってまとめられた東京湾の恒流の模式図 (図-6) と比較すると、再現されていない循環流はあるが全体のパターンは概ね再現されているものと考えられる。図-7、図-8に下げ潮最強時の第1層の流速の計算結果を示す。これらの図より Δt を 600 s とした結果は 240 s の場合の結果と殆ど同じであり、非常に安定した計算法であることが分かる。

4. おわりに

本研究で得られた結論は以下の通りである。

(1) 通常、3次元潮流計算での最も厳しい計算時間ステップの制限である CFL 条件と鉛直拡散項の安定条件に無関係な計算法を開発した。残った Δt の制限は移流項、水平拡散項の安定条件である。

(2) モデル地形での試算結果より、 Δt を大きく採っても、従来の計算結果と同程度の精度が保たれ、安定な計算法であることが確認された。計算時間は3次元計算の場合でも単層の場合より幾分多くなる程度で抑えられ、効率的な計算法であることが分かった。Mode Split 法は計算時間が抑えられ流速分布も3次元計算結果とほぼ同等な結果となったが、複雑な地形への適用にはさらに検討を加える必要がある。

(3) 水位分布を求める時の線流量を単層モデルのそ

れとすることにより両者をスムーズに接続できることが分かった。ただし、3次元モデルの底面摩擦係数を調整する必要があり、合理的な設定法は今後の課題である。

(4) 東京湾を対象とした潮流計算結果より現地で見られる恒流パターンが概ね再現されており、本計算法の現地への適用性が確認された。

参考文献

- 市原正史・大村哲夫・福代倫男・野澤良一 (1980): 東京湾の潮流観測とシミュレーション, 第27回海岸工学講演会論文集, pp. 448-452.
- 佐藤慎司・植田耕一郎 (1992): 風場の変動を考慮した湾水流動多層モデルの開発と東京湾への適用, 海岸工学論文集, 第39巻, pp. 251-255.
- 鶴谷公一 (1989): シルテーションによる港湾埋没の予測手法, 平成元年度港湾技術研究所講演会講演集, pp. 101-153.
- 堀江 毅 (1983): MAC 法による直投下土砂の初期拡散に関する数値解析, 港湾技術研究所資料, No. 471, pp. 1-34.
- 村上和男・森川雅行 (1984): 有限要素法による二層の潮流及び拡散計算, 港湾技術研究所資料, No. 495, pp. 1-45.
- 山下隆男・山中久生・土屋義人 (1991): エスチャリーにおける長周期波の数値計算—田辺湾の潮流・吹送流シミュレーション—京都大学防災研究所年報, 第34号, B-2, pp. 449-469.
- Benque J. P., J. A. Cunge, J. Feullet, A. Hauguel, F. M. Holly (1982): New method for tidal current computation, Proc., ASCE, Vol. 108, No. WW3, pp. 396-417.
- Blumberg A. F., G. L. Mellor (1987): A description of a three-dimensional coastal ocean circulation model, Three-Dimensional Shelf Models, Coastal and Estuarine Sciences, 5, A. G. U., pp. 1-16.
- Casulli V., R. T. Cheng (1992): Semi-implicit finite difference methods for three-dimensional shallow water flow, Int. J. Numer. Methods Fluids, Vol. 15, No. 6, pp. 629-648.
- Dinh Q. V., B. Mantel, J. Periaux, R. Glowinski (1986): On the numerical simulation of incompressible viscous fluids modelled by the Navier-Stokes equations, related domain decomposition methods, Proc. of Int. Symp. on Refined Modeling of Flows, pp. 275-317.
- Leendertse J. J., D. S. K. Liu (1977): A Three-Dimensional Model for Estuaries and Coastal Sea: Volume 4, Turbulent energy computation, Rand. Corp. Tech. Rep. R-2187-OWRT, pp. 1-59.
- Nakata K., T. Kuramoto (1992): A model of the formation of oxygen depleted waters in Tokyo bay, Pro. Adv. Mar. Tech. Conf., Vol. 5, pp. 107-132.
- Robert J. L., Y. Ouellet (1987): A three dimensional finite element model for the study of steady and non-steady natural flows, Three Dimensional Model of Marine and Estuarine Dynamics, Elsevier, pp. 359-372.