

潮汐の調和解析への最小 AIC 推定法の適用

池谷 毅*

1. 結 論

潮汐現象は、主として、太陽、地球、月の間に作用する重力によって引き起こされる。この潮汐を引き起こす力は、これら 3 天体の相互の位置関係に応じて変化する。それ故、普通潮汐現象に関連した諸量は、分潮と呼ばれる規則的に変化する成分の和として調和表現されることが多い。

潮汐の調和解析は、各分潮の調和定数(振幅と位相差)を観測された潮汐に関連した信号から解析する技術である。潮汐の調和解析の歴史は大変古く、多くの方法が提案されている。近年では電子計算機を利用するのに適した計算法も考案され、広く実用に使われている。(例えば、Delft Hydraulics Laboratory (1987))。

しかしながら、従来の方法はある分潮の組を与え、それらの分潮に対応した調和定数を計算するものであり、分潮の与え方の良否についての情報を与えるものはほとんどない。それ故、分潮の選択は、間接的な方法や経験を元になされることが多い。一般には、実測データの長さが長いほど、またデータの精度が高いほど、解析結果の精度が高く、また抽出できる分潮の数も多くなる性質が期待される。

近年、AIC (赤池情報量規準) を最小にするようモデルを選択する最小 AIC 推定法 (MAICE) と呼ばれる推定方

法が統計学の分野で開発され、様々な分野で実用に供され始めている。ここでは、この最小 AIC 推定法を潮汐の調和解析法に適用し、調和定数の推定だけでなく、与えたモデル (分潮の組) の質に関する判断を行い、より良い分潮の組の抽出をも行える調和解析法を導き、その基本的な特性を知ることとする。

2. 調和表現モデル

潮汐の調和表現は、一般に次式で表現されることが多い。

$$y(t)=H_0+\sum_{k=1}^K f_k H_k \cos (V_k+u_k-x_k) \cdots \cdots (1)$$

ここに、

y : 潮位、潮流速等の潮汐信号の時系列、 A_0 : ある観測期間の潮汐信号の平均値、 V_k, u_k : k 番目の分潮に対する定まった時刻の関数、 f_k : ノーダルフアクター、 H_k : 番目の分潮の振幅、 x_k : k 番目の分潮の位相差である。

主要な分潮に対する V, u, f の関数形は Cartwright・Eden (1973), Doodson (1921), Schureman (1976) 等の研究により、例えば表-1 のような関数となることが知られている。この表中、

$$\begin{aligned} s &= 277.02 + 129.3848(Y - 1900) + 13.1764(D + i) \\ h &= 280.19 - 0.2387(Y - 1900) + 0.9857(D + i) \\ p &= 234.39 + 40.6625(Y - 1900) + 0.1114(D + i) \end{aligned}$$

表-1 主要分潮に対する V, u, f の関数形 (Doodson (1921), Schureman (1976) の研究成果より)

記号	V_i (deg)	u_i (deg)	f_i
S_a	h	0.0	1.00
M_f	$2s$	$-23.7 \sin N + 2.7 \sin 2N - 0.4 \sin 3N$	$1.043 + 0.414 \cos N$
K_1	$15t + h + 90$	$-8.9 \sin N + 0.7 \sin 2N$	$1.006 + 0.115 \cos N - 0.009 \cos 2N$
O_1	$15t + h - 2s - 90$	$10.8 \sin N - 1.3 \sin 2N + 0.2 \sin 2N$	$1.009 + 0.187 \cos N - 0.015 \cos 2N$
P_1	$15t - h - 90$	0.0	1.00
M_2	$30t + 2h - 2s$	$-2.1 \sin N$	$1.000 - 0.037 \cos N$
S_2	$30t$	0.0	1.000
N_2	$30t + 2h - 3s + p$	$-2.1 \sin N$	$1.000 - 0.037 \cos N$
K_2	$30t + 2h$	$-17.7 \sin N + 0.7 \sin 2N$	$1.024 + 0.286 \cos N + 0.008 \cos 2N$

* 正 会 員 工 博 鹿 島 技 術 研 究 所

$$N=259.16-19.3282(Y-1900)-0.0530(D+i)$$

t : グリニッジ標準時, Y : 西暦年, D : その年の1月1日からの経過日数, i : 1900年以降の閏年の数である.

3. 最小AIC推定法による調和解析

(1) 線形回帰モデルへの帰着

今時刻 $t_i: i=1, n$ において, 潮汐信号 $y_i: i=1, n$ を計測したとする. そして, 式(1)を計測データにあてはめることを考える. すなわち, 以下の式が成り立つと考える.

$$y_i = H_0 + \sum_{k=1}^K f_k(t_i) H_k \cos \{V_k(t_i) + u_k(t_i) - \kappa_k\} + \varepsilon_i \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで, ε_i は正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従う確率変数と仮定する.

潮汐の調和解析は上式において振幅 H_k 及び位相差 κ_k を求める回帰問題と考えることが出来る.

式(2)は,

$$\begin{aligned} y_i = & H_0 + \sum_{k=1}^K f_k(t_i) H_k \cos \{V_k(t_i) + u_k(t_i)\} \cos \kappa_k \\ & + \sum_{k=1}^K f_k(t_i) H_k \sin \{V_k(t_i) + u_k(t_i)\} \\ & \cdot \sin \kappa_k + \varepsilon_i \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

と書き換えることができる. さらに, 新しい変数

$$\begin{cases} a_1 &= H_0 \\ a_{2k} &= H_k \cos \kappa_k : k=1, \dots, K \quad \dots\dots\dots (4) \\ a_{2k+1} &= H_k \sin \kappa_k : k=1, \dots, K \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{i1} &= 1 \\ &: i=1, \dots, n \\ z_{i2k} &= f_k(t_i) \cos \{V_k(t_i) + u_k(t_i)\} \quad \dots\dots (5) \\ &: i=1, \dots, n, k=1, \dots, K \\ z_{i2k+1} &= f_k(t_i) \sin \{V_k(t_i) + u_k(t_i)\} \\ &: i=1, \dots, n, k=1, \dots, K \end{cases}$$

を導入することにより, 次式のように書ける.

$$y_i = \sum_{j=1}^m Z_{ij} a_j + \varepsilon_i \quad : i=1, \dots, n \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに, $m=2K+1$ である. この式は m 個のパラメーターを有する線形の回帰式である. 明かなように, $a_1, \dots, a_m$ が求まれば, 式(4)を利用して潮汐の調和定数を求めることができる. 一般に行われる潮汐調和解析の場合, データ数 m の方がパラメータ数より, 十分大きいため, MAICE により解析することができる. 以下に, 坂本ら(1982)の著書に従い MAICE による定式化を示す.

(2) 尤度関数

式(6)において, ε_i が正規分布に従うと仮定したので, y の確率分布は次式で表される.

$$\begin{aligned} f(y_i | a_1, a_2, \dots, a_m, \sigma^2) \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (y_i - z_{i1}a_1 - \dots - z_{im}a_m)^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

今 n 個の観測値 $(t_i, y_i), i=1, \dots, n$, を得たとき, 式(7)より, 尤度関数は以下のようになる.

$$\begin{aligned} L(y_1, \dots, y_n | a_1, \dots, a_m, \sigma^2) \\ = \prod_{i=1}^n f(y_i | a_1, \dots, a_m, \sigma^2) \\ = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

(3) 対数尤度関数とその最大化

対数尤度関数は以下の通り定義される.

$$\begin{aligned} l(y_1, \dots, y_n | a_1, \dots, a_m, \sigma^2) \\ = \ln L(y_1, \dots, y_n | a_1, \dots, a_m, \sigma^2) \\ = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 \\ - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - z_{i1}a_1 - \dots - z_{im}a_m)^2 \quad \dots\dots (9) \end{aligned}$$

最小AIC推定法では, パラメータ $a_1, \dots, a_m, \sigma^2$ を対数尤度関数を最大にするよう決定される. このとき, 以下の式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial a_1} &= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_{i1} (y_i - z_{i1}a_1 - \dots - z_{im}a_m) = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial l}{\partial a_m} &= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_{im} (y_i - z_{i1}a_1 - \dots - z_{im}a_m) = 0 \\ \frac{\partial l}{\partial \sigma^2} &= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^n z_{im} (y_i - z_{i1}a_1 - \dots - z_{im}a_m) = 0 \end{aligned}$$

これから, 求めるべきパラメータの最尤推定値 $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m$ は以下の一次式を解くことにより求められる.

$$\begin{bmatrix} \sum z_{i1}z_{i1} & \dots & \sum z_{i1}z_{im} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum z_{im}z_{i1} & \dots & \sum z_{im}z_{im} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i z_{i1} \\ \vdots \\ \sum y_i z_{im} \end{bmatrix} \quad \dots\dots (10)$$

ここに, $\Sigma = \sum_{i=1}^n$

この式は, 最小自乗法における正規方程式と同一である. よって, 最小自乗法と最尤推定法によるパラメータの推定値は同一となる.

また, 誤差分散の最尤推定値の $\hat{\sigma}^2$ は次式で示される.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - z_{i1}\hat{a}_1 - \dots - z_{im}\hat{a}_m)^2 \quad \dots\dots\dots (11)$$

(4) AICの最小化

式(11)を式(9)に代入し対数をとることにより, 最大対数尤度は次式で与えられる.

$$l(y_1, \dots, y_n | \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{\sigma}^2) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \hat{\sigma}^2 - \frac{n}{2} \dots \dots \dots (12)$$

自由パラメータの数が $m+1$ 個であることから、AIC は次式で示される。

$$\begin{aligned} AIC &= -2(\text{最大対数尤度}) + 2(\text{自由パラメータ数}) \\ &= n \ln 2\pi + n \ln \hat{\sigma}^2 + n + 2(m+1) \dots \dots \dots (13) \end{aligned}$$

最小 AIC の原理から、最も質の良いモデルは最小の AIC を与えるモデルである。すなわち、いくつかの分潮の組み合わせに対して調和解析を行い、解析結果から AIC を評価し、そのうち最小の AIC を与えるモデルを最適なモデルと考えればよい。

以上より、MAICE 法による調和解析の手順をまとめれば、以下の通りとなる。

- 1. 当てはめようとするモデル（潮汐分潮の組）をいくつか準備する。
- 2. 潮汐信号時系列を用意する。
- 3. 式(5)に従い、 Z_{ij} を各モデルに対して計算する。
- 4. パラメータ a_j 及び σ^2 を最尤推定法により求める。
- 5. 式(13)に従って、AIC を評価し、最小値を与えるモデルを最良のモデルとして選択する。

なお、手順 4 の計算にあたっては、直行変換法に基づく方法(坂本ら(1982))により、最小自乗解を求めている。

4. 数値シミュレーション

前節で紹介した、MAICE を用いた潮汐調和解析法の特徴を知るために、数値的に作成した潮汐信号を作成し、この信号に対して調和解析を行い以下の 2 点の基本特性を検討した。

- もし、潮汐信号の長さが同じなら、小さなノイズを有する信号の方が、より多くの分潮を抽出できる。
- もし、ノイズのレベルが同じなら、より長い信号の方が多くの分潮を抽出出来る。

(1) 潮汐信号の作成

解析に用いる潮汐信号を以下の要領で合成した。はじめに、表-2 に示す 4 分潮の振幅と位相差を与え、1992 年 8 月 1 日 0:00 から 8 月 28 日 23:30 までの 28 日間、30 分間隔、1344 データの潮位の変動を作成した。

表-2 合成信号を作成するのに用いた分潮と調和定数

記号	振 幅	位相差
S_2	0.12220	221.0
N_2	0.14810	182.4
M_2	0.88644	204.6
S_2	0.24360	263.4

次に、この信号に、ノイズを付加した信号を 3 通り作成した。信号 1 には範囲 $[-0.25, 0.25]$ 、信号 2 には $[-$

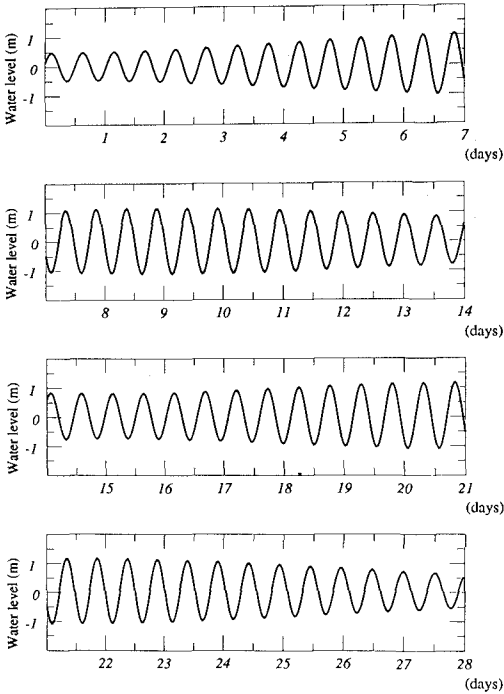


図-1 ノイズを付加する前の潮汐信号

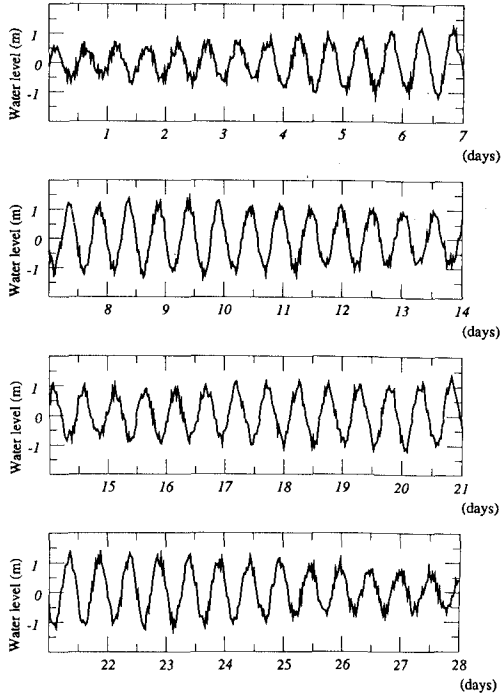


図-2 合成された潮汐信号 (信号 1 : 一様乱数ノイズ $[-0.25, 0.25]$ を含む)

0.5, 0.5], 信号3には $[-0.75, 0.75]$ の一様乱数を加えたものとした。ノイズを付加する前の潮汐信号を図-1に示す。ノイズを付加した後の信号の例として、信号-1を図-2に示す。

(2) あてはめモデル

調和解析に用いた分潮の組としては表-2に示す5通りを用意した。model 1からmodel 4へと、振幅の大きい順に分潮を増やし、model 5には、信号に含まれていない K_2 を加えている。

(3) ノイズの影響

はじめに、調和解析の結果に与えるノイズ大きさの影響を調べた。信号1, 2, 3を観測信号と考え、表-3に示した分潮の組に対してMAICEの手順に従って調和解析を行った。結果を表-4から表-6に示す。

信号1に対する解析結果である表-4をみると、どのモデルとも、長周期の分潮である S_a を除いて、振幅と位相差の推定値は真値とそれほどおおきくずれることはないことがわかる。また、最小のAICを与えるモデルはmodel 4となり、信号合成に使用した分潮の組と同じ組み合わせである。

信号2に対する解析結果である表-5をみると、やはり最小のAICを与えるモデルはmodel 4となり、この程度のノイズに対しても、元の信号に含まれる成分を見分けることが可能である。

表-3 解析に用いたモデル (分潮の組)

	分潮名称
model 1	M_2
model 2	M_2, S_2
model 3	M_2, S_2, N_2
model 4	M_2, S_2, N_2, S_a
model 5	M_2, S_2, N_2, S_a, K_2

表-4 信号1に対する調和解析結果

信号1	model 1	model 2	model 3	model 4	model 5	真値
M_2 振幅	0.895	0.883	0.885	0.885	0.887	0.886
位相差	204.3	203.9	203.8	203.9	203.8	204.6
S_2 振幅	—	0.241	0.245	0.244	0.239	0.244
位相差	—	262.2	261.6	261.6	267.0	263.4
N_2 振幅	—	—	0.149	0.148	0.147	0.148
位相差	—	—	185.2	185.1	185.4	182.4
S_a 振幅	—	—	—	0.134	0.131	0.122
位相差	—	—	—	216.9	222.7	221.0
K_2 振幅	—	—	—	—	0.020	0.0
位相差	—	—	—	—	127.7	0.0
σ^2	0.06046	0.03147	0.02091	0.02059	0.02057	—
AIC	51.1	-822.9	-1369.2	-1385.9	-1383.1	—
AICの差	1436.9	563.0	16.7	0.0	2.8	—

表-5 信号2に対する調和解析結果

信号2	model 1	model 2	model 3	model 4	model 5	真値
M_2 振幅	0.894	0.882	0.884	0.885	0.887	0.886
位相差	203.5	203.2	203.1	203.1	202.9	204.6
S_2 振幅	—	0.242	0.245	0.245	0.235	0.244
位相差	—	260.4	259.9	259.9	270.7	263.4
N_2 振幅	—	—	0.149	0.149	0.147	0.148
位相差	—	—	187.9	187.8	188.4	182.4
S_a 振幅	—	—	—	0.147	0.141	0.122
位相差	—	—	—	213.6	224.2	221.0
K_2 振幅	—	—	—	—	0.040	0.0
位相差	—	—	—	—	127.7	0.0
σ^2	0.12253	0.09338	0.08271	0.08234	0.08227	—
AIC	1001.2	639.9	480.7	478.7	481.4	—
AICの差	522.5	161.2	2.0	0.0	2.7	—

表-6 信号2に対する調和解析結果

信号3	model 1	model 2	model 3	model 4	model 5	真値
M_2 振幅	0.893	0.881	0.883	0.884	0.889	0.886
位相差	202.0	201.6	201.6	201.6	201.3	204.6
S_2 振幅	—	0.244	0.248	0.247	0.230	0.244
位相差	—	256.8	256.4	256.4	278.4	263.4
N_2 振幅	—	—	0.152	0.152	0.148	0.148
位相差	—	—	193.2	193.2	194.5	182.4
S_a 振幅	—	—	—	0.174	0.160	0.122
位相差	—	—	—	208.4	226.6	221.0
K_2 振幅	—	—	—	—	0.080	0.0
位相差	—	—	—	—	127.7	0.0
σ^2	0.3705	0.3409	0.3299	0.3294	0.3291	—
AIC	51.1	2381.4	2341.2	2343.3	2346.0	—
AICの差	2290.1	40.2	0.0	2.1	4.8	—

表-7 信号1の初めの673データに対する調和解析結果

673 data	model 1	model 2	model 3	model 4	model 5	真値
M_2 振幅	0.888	0.874	0.892	0.893	0.899	0.886
位相差	198.1	197.6	203.6	203.6	204.0	204.6
S_2 振幅	—	0.274	0.253	0.253	0.198	0.244
位相差	—	268.0	261.6	261.6	253.2	263.4
N_2 振幅	—	—	0.148	0.148	0.154	0.148
位相差	—	—	184.3	184.1	182.7	182.4
S_a 振幅	—	—	—	2.223	2.240	0.122
位相差	—	—	—	138.7	138.8	221.0
K_2 振幅	—	—	—	—	0.052	0.0
位相差	—	—	—	—	214.6	0.0
σ^2	0.0632	0.0258	0.0200	0.0199	0.0199	—
AIC	59.85	-540.64	-706.65	-704.99	-701.5	—
AICの差	766.5	166.0	0.0	1.7	5.2	—

表一8 信号1の初めの145データに対する調和解析結果

145 data	model 1	model 2	model 3	model 4	model 5	真値
M_2 振幅	0.554	0.705	0.738	0.862	0.889	0.886
位相差	214.7	202.9	240.4	231.0	201.3	204.6
S_2 振幅	—	0.210	0.314	0.194	24.69	0.244
位相差	—	254.4	283.8	298.0	95.29	263.4
N_2 振幅	—	—	0.139	0.271	2.384	0.148
位相差	—	—	305.6	261.1	338.5	182.4
S_0 振幅	—	—	—	65.11	4.687	0.122
位相差	—	—	—	131.7	2.266	221.0
K_2 振幅	—	—	—	—	18.377	0.0
位相差	—	—	—	—	190.6	0.0
σ^2	0.0219	0.0192	0.0191	0.0188	0.0186	—
AIC	-134.3	-149.8	-146.7	-144.6	-142.1	—
AIC の差	15.5	0.0	3.1	5.2	7.7	—

信号3に対する解析結果である表一6をみると、最小のAICを与えるモデルはmodel3となり、長周期の分潮である S_0 を抽出できなくなる。信号3では、分潮の振幅に比べてノイズレベルがかなり大きくなり、多く分潮を抽出することが統計的に妥当でないことを示している。また、調和定数の推定精度も低下することがわかる。

このように、MAICEによる調和解析では、データの質に応じた分潮の選択が可能となる。

(4) 観測期間の影響

次に、観測期間の調和解析に与える影響を調べた。ノイズレベルを一定にして、信号長を変化させるため、信号一1のはじめの673データ、145データ、49データを取り出し、それぞれに対して、表一3に示した分潮の組に対して調和解析を行った。解析結果を表一7から9に示す。これらの表からデータの数が増減すると最もAICの小さい、質の良いモデルと判断されるものの含む分潮の数が増減することがわかる。すなわち、MAICEによる調和解析では、観測データが蓄積するに従いより多くの分潮を合理的に抽出できることが可能となる。

5. 結 論

本研究では、MAICEと訂ばれるAICを最小にするようモデルを選択し、パラメータを評価する方法を、潮汐の調和解析に応用し、基本的な特性をしらべた。その結果以下の知見を得た。

1. MAICEによる調和解析は、調和定数の評価だけでなく、AICの推定値を通して、記録の長さ、データの質に応じて最適な分潮の組み合わせを判断することが可能である。すなわち、データの蓄積が増大するとともに、予測の精度や信頼性が向上

表一9 信号1の初めの49データに対する調和解析結果

49 data	model 1	model 2	model 3	model 4	model 5	真値
M_2 振幅	0.477	0.688	10.52	57.90	545.8	0.886
位相差	208.8	240.9	324.7	114.7	128.5	204.6
S_2 振幅	—	0.369	16.07	18.06	2035.8	0.244
位相差	—	343.9	333.1	175.9	192.5	263.4
N_2 振幅	—	—	10.52	39.66	263.7	0.148
位相差	—	—	324.7	102.9	116.2	182.4
S_0 振幅	—	—	—	42559.5	42559.5	0.122
位相差	—	—	—	129.9	129.9	221.0
K_2 振幅	—	—	—	—	1472.9	0.0
位相差	—	—	—	—	285.8	0.0
σ^2	0.0191	0.0182	0.0166	0.01558	0.01555	—
AIC	-46.85	-45.12	-45.79	-44.94	-40.96	—
AIC の差	0.0	1.73	1.06	1.91	5.89	—

することを合理的に示すものであり、海洋土木工事の情報化施工管理等の目的には有利な方法である。

2. MAICEによる潮汐調和解析における調和定数の評価は、最小自乗法と等価となる。よって、不均一の時間間隔を持つデータや一部欠測のあるデータに対しても適用することができる。

また、今後の研究課題としては、以下の点があげられる。

1. 実測データに対して解析する場合には、一定のルールに従って解析に用いる分潮の組を作り出す方法を開発すると、調和解析の自動化につながる。
2. 二つの分潮の調和定数間に何等かの関係を仮定して調和解析する場合、今回導いたものと自由パラメータの数が増減するため、改良が必要である。浅海分潮の解析等がこの例と考えられる。

参 考 文 献

坂本慶行, 石黒真木夫, 北川源四郎 (1982): 情報量統計学, 共立出版, pp. 149-154.

Cartwright, D. E and Edden, A. C. (1973): Corrected tables of tidal harmonics, *Geophys. Jour. of the Royal Astronomical Soc.*, Vol. 33, pp. 253-264.

Delft Hydraulics Laboratory (1987): *GETIJSYS*, A program package for processing of tidal records and tidal predictions, Delft Hydraulics Brochure Z-2.

Doodson, (1921): Harmonic development of tidegenerated potential, *Proc. Royal Soc. of London*, A100, pp. 305-329.

Schureman, P. (1976): *Manual of Harmonic Analysis and Predictions of Tides*, United States Government Printing Office, Washington, 317 p. (1st edn. 1924, reprinted 1940, 1958, 1976)