

ゼロクロス法で定義した不規則波の波高の確率特性について

木 村 晃*・太 田 隆 夫**

1. はじめに

ゼロクロス法で定義した不規則波の波高の確率分布は、Rayleigh 分布と良好な適合性を持つことが数多くの観測、実験を通じて確かめられている。この分布は狭帯域スペクトルの不規則波の“振幅”の確率分布として、Longuet-Higgins (1952) によりはじめて適用されたものである。したがって厳密には狭帯域スペクトルの場合であっても、Rayleigh 分布は理論的に求められた“波高”の確率分布ではない。Tayfun (1983) は Rayleigh 分布の前提条件を再検討し、スペクトル形状を考慮した定義に忠実なゼロクロス波の“波高”の確率分布を導くことを試みた。しかし、ゼロクロス波の定義すべてを数学的な普遍性を持つ表現に置き換えることが困難であるため、その分布は Rayleigh 分布とかけ離れたものとなっている。ゼロクロス波の波高の確率分布としては、Rayleigh 分布で十分とする意見も多い。しかし、データとの適合性が確認できているのは分布形状の主要部分のみであり、波高の非常に大きな、発生確率の小さな部分での適合性は確認できていない。構造物の耐久設計、信頼性解析のためには、たとえば最高波として用いられることの多い $H_{\max}=1.8H_{1/3}$ あるいは Freak Wave と定義される $H>2H_{1/3}$ の波のように、波高の大きな波の信頼できる発生確率が必要である。この付近の波高をもつ波の出現頻度は非常に小さくなるため、データと確率分布との適合性の検討は困難である。波高の大きな部分での確率特性を明らかにするには、定義に忠実な波高の確率分布をできるだけ厳密に求めていくことがむしろ近道といえよう。この研究は、ゼロクロス波高の定義の内、理論的に取り扱える部分は理論的に、それが困難な部分は多くの数値シミュレーションで検討し、できる限り正確な波高の分布を求めることを目指したものである。

2. ゼロクロス波の波高の定義

図—1 に不規則波形 $\eta(t)$ とそれに対する包絡線 $R(t)$ 、および η がゼロクロス点間で最大値を示す時刻 t_j

近傍の η と R の拡大図を示す。図中の $R_{mj}(j=1, 2, 3)$ は η がゼロクロス点間で最大あるいは最小となる時刻 t_j における包絡線の振幅 ($R_{mj}>0$) である。ゼロクロス波の波高は、1 周期内の水位の最大値と最小値の差で定義される。すなわち、ゼロダウncross法の場合、図—1 の 1 波めの波高 H_1 は、

$$H_1 = \eta(t_1) + \eta(t_2) \quad (\eta(t_2) > 0) \dots\dots\dots (1)$$

で定義される。従来より波高の確率特性を論じる際には包絡線法が用いられている。これは、不規則波形の包絡線がほぼゼロクロス波の最小点と最大点を通ることから、それらの水位を包絡線振幅で置き換えて波高の確率特性を導くという方法である。Longuet-Higgins (1952) は、狭帯域スペクトルの不規則波の場合、 η の最大(小)点と同じ点における包絡線振幅とが等しいとおいて波の振幅の確率分布として Rayleigh 分布を与えた。その後、狭帯域スペクトルの場合には

$$H_1 \approx 2R_{m1} \dots\dots\dots (2)$$

とし、波高の確率分布として Rayleigh 分布が用いられた。これがよい結果を与えたところから、長い間波高の確率分布は Rayleigh 分布であるということが定説となっていた。しかし、最近 Tayfun (1983) はゼロクロス波の本来の定義が

$$H_1 = R_{m1} + R_{m2} \dots\dots\dots (3)$$

であるとしてゼロクロス波の波高の確率分布を導いた。彼の理論では R_{m1} と R_{m2} の相関特性でスペクトル形状の影響が導入されている。著者ら(1990)は Tayfun の理論の不備を指摘し、彼の理論を修正するかたちで波高の確率分布を導いた。しかし、結果の分布とデータとの対応はまだ十分ではなかった。これらの研究で考慮されていないのは、ゼロクロス波の最大(小)点の水位と、それと同時刻の包絡線振幅との差である。すなわち、不規則波形を Longuet-Higgins(1957)にならって次のように示す。

$$\eta = R \cos \phi \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 R は η に対する包絡線、 ϕ は、

$$\phi(t) = 2\pi f_m + \theta(t) \dots\dots\dots (5)$$

であり、 f_m は η のスペクトルの平均周波数、 θ は時間的に変化する位相角である。このようにおくとスペクトル

* 正会員 工博 鳥取大学教授 工学部社会開発システム工学科

** 正会員 工修 鳥取大学助手 工学部社会開発システム工学科

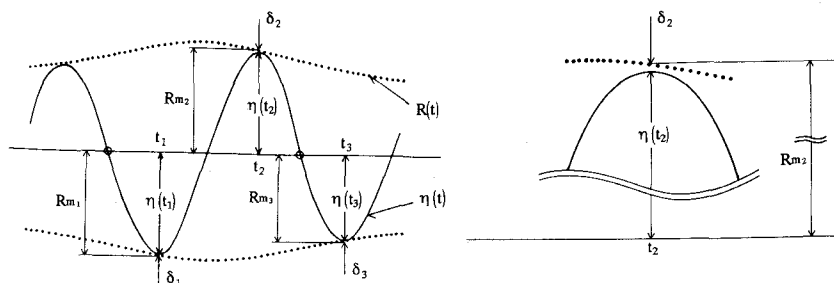


図-1 波高を定義する諸量

幅が狭い場合 η の極大 (小) 点は

$$\eta' = R' \cos \phi - R\phi' \sin \phi = 0 \quad \cdots \cdots (6)$$

となる位置で発生し、その振幅は

$$\eta_m = R[1 + (R'/R\phi')^2]^{-1/2} \quad \cdots \cdots (7)$$

で与えられる。ここで、' は時間に関する微分を意味する。式 (7) を展開すると、

$$\eta_m = R[1 - (R'/R\phi')^2/2 + \dots] \quad \cdots \cdots (8)$$

$$= R + O(\nu^2)$$

となる。 $O(\nu^2)$ は ν^2 のオーダーであることを意味する。ここに ν は

$$\nu = \{s_0 s_2 / (s_1)^2 - 1\}^{1/2} \quad \cdots \cdots (9)$$

であり、 s_n はスペクトルの n 次モーメントである。

式 (8) からわかるように η_m として包絡線の値を用いる ($\eta_m = R$ とする) と振幅の値に ν^2 のオーダーの誤差が含まれる。さらに、式 (3) の定義を用いると波高に含まれる誤差はその 2 倍となる。

図-1 にゼロクロス点間の η の最大 (小) 値と同時刻における R の値との差 δ_j ($j=1, 2, 3$) の定義を示した。したがって厳密に定義すれば、ゼロクロス波の波高は包絡線振幅の和からその差の分を引いたものとなる。たとえば波高 H_1 は

$$H_1 = (R_{m1} + R_{m2}) - (\delta_1 + \delta_2) \quad (\delta_j > 0) \quad \cdots \cdots (10)$$

と表される。式 (10) のように波高を定義してその確率分布を導こうとする場合、まず R_m と δ の確率分布を明らかにする必要がある。従来、 R_m の確率分布としては Rayleigh 分布が用いられているが (Tayfun, 1983)、これには次のような問題がある。まず包絡線振幅 R の理論的確率分布が Rayleigh 分布となることには問題はない。しかし、この時系列から不等間隔でサンプリングした R_{mj} が Rayleigh 分布に従うかどうかは明かでない。すなわち、 $R(t)$ からの等間隔なサンプルデータの確率分布が Rayleigh 分布となることは計算でも確認できるが、振幅の最大 (小) 点の間隔は $O(\nu)$ のばらつきをもつため (Longuet-Higgins, 1957)、 R_m が Rayleigh 分布をする保証はない。さらに、 η の最大 (小) 点が R の極大 (小) 値を外す可能性もある (Tayfun, 1993) ので、 R_m の分布を Rayleigh 分布で近似する理論的妥当性はない。と

にかく、 R_m の確率の理論分布は導かれていない。また、 δ の確率分布についても事情は同じである。そこで本研究では、 R_m と δ の確率分布を数値シミュレーションデータを用いて検討し、それらの近似的な分布を求めて、波高の確率分布の誘導に用いた。

3. 波高を定義する諸量の確率特性

2. で述べたように、 R_m と δ の確率分布を検討するために、不規則波形 $\eta(t)$ の数値シミュレーションを行った。これには

$$\eta(j\Delta t) = \sum_{n=1}^N a_n \cos(2\pi f_n j\Delta t) + b_n \sin(2\pi f_n j\Delta t) \quad (11)$$

なる関係を用いた。ここに、

$$a_n = \sqrt{2S(f_n)} d\bar{f} \cos \phi_n, \quad b_n = \sqrt{2S(f_n)} d\bar{f} \sin \phi_n \quad \cdots (12)$$

であり、 ϕ_n は一様乱数 ($0 \sim 2\pi$) を用いて計算した。式 (11) は逆 FFT を用いて計算し、サンプリング間隔 $\Delta t = 0.05S$ 、 $N=8192$ 、期待スペクトルのピーク周波数は $f_p = 1.0\text{Hz}$ とし、乱数をかえて 15 回同じスペクトルのシミュレーションを行った。期待スペクトル $S(f)$ としては次式の Wallops 型スペクトルを用いた。

$$S(f) = (f/f_p)^{-r} \exp[r/4\{1 - (f/f_p)^4\}] \quad \cdots \cdots (13)$$

形状パラメータ r は 4, 5, 6, 8, 10, 20 と 6 種類変えて計算した。不規則波形はゼロダウクロス法で処理し、ゼロクロス点間の最小値と最大値およびそれらが出現した時刻 $t_1, \dots, t_j, \dots$ を求めた。また、不規則波の包絡線は次式により計算した。

$$R(t) = \{\eta^2(t) + \bar{\eta}^2(t)\}^{1/2} \quad \cdots \cdots (14)$$

ここに、 $\bar{\eta}$ は

$$\bar{\eta}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(t)}{t - \tau} d\tau \quad \cdots \cdots (15)$$

で与えられる η のヒルベルト変換である。前述したように、 $R(t_1), \dots, R(t_j), \dots$ が $R_{m1}, \dots, R_{mj}, \dots$ であり、 $\delta_1 = R_{m1} - \eta(t_1), \dots, \delta_j = R_{mj} - \eta(t_j), \dots$ である。図-2 に $R(t)$ の頻度分布をヒストグラムで示す。データ数は 16384 個、スペクトルの形状パラメータは $r=5$ であり、これは十分発達した風波のスペクトルに対応するものである。 $R(t)$ の理論的確率分布は Rayleigh 分布であるが、データとの

対応性の検証には次式で与えられるより一般的な Weibull 分布を用いた (Kimura, 1981).

$$p(x) = m/(2\gamma)x^{m-1} \exp[-x^m/(2\gamma)] \cdots \cdots (16)$$

ここに

$$(x = R/\bar{R})$$

$$\gamma = 1/2[\Gamma\{(1+m)/m\}]^{-m}$$

m は Weibull 分布の形状母数, Γ はガンマ関数である. シミュレートしたデータに対して Weibull 分布を当てはめる際には確率紙を用いた. その結果, 図-2 の頻度分布に対しては $m=2.027$, $\gamma=0.6389$ を得た. 図-2 の実線は, これらの値をもつ Weibull 分布である. 式 (16) において, $m=2.0$, $\gamma=2/\pi=0.637$ の場合が Rayleigh 分布であるから, R の確率分布はほぼ理論と一致しているといえる. また, 他のスペクトル形状の場合でも r の値にかかわらず $m=2.0$, $\gamma=0.64$ 付近の値が得られ, $R(t)$ の分布がいずれの場合も Rayleigh となることは確認できた. 図-3 に R_{mj} の頻度分布を示す. $r=5$ のケースの結果であり, データ数は約 8000 個である. この頻度分布に対して Weibull 分布による近似を試みたところ, $m=1.869$, $\gamma=0.6245$ という値を得た. 図中の実線がこれらの値をもつ Weibull 分布である. 図-4 に δ_j の頻度分布を示した. これもデータ数約 8000 個, $r=5$ の場合である. この頻度分布に対しても Weibull 分布の当てはめを試みたところ, $m=0.6491$, $\gamma=0.0626$ を得た. 図中にこれらの値をもつ Weibull 分布を実線で示したが, データとの対応は非常に良好である. $r=4, 6, 8, 10, 20$ の場合についても R_{mj} と δ_j の頻度分布に対して同様な検討を行い, 図-5 に示すような結果を得た. 図中の○印は δ_j の頻度分布に対する形状母数 m_1 , ●印は R_{mj} の頻度分布に対する形状母数 m_2 である. また, 図の横軸は ν の値であり, この値の大きい方から $r=4, 5, 6, 8, 10, 20$ のケースのデータである. 図からもわかるように, ν の値が大きくなるにつれ m_1 , m_2 ともに減少する傾向がみられる. 表-1 にシミュレーションデータから計算した m_1 , m_2 , γ_1 (δ_j に対する γ の値), γ_2 (R_{mj} に対する γ の値), $\bar{\delta}_j$ および $\bar{R}_{mj}$ の値を示した.

これらの解析より従来 Rayleigh 分布で近似していた R_m の頻度分布 (Tayfun, 1983) は著者らが先に指摘したように, その平均値が η の最大 (小) 値の分布のものと異なるばかりでなく, 分布形状そのものも Rayleigh 分布と異なり, これより若干平坦な分布形をとることがわかった. この点が最初に指摘した $R(t)$ からの不等間隔サンプリングの影響であると考えられる.

4. 波高の確率分布

3. で R_{mj} と δ_j の確率分布が十分な精度で Weibull 分布で近似できることを確認したが, 式 (10) のように波

高を定義して, その確率分布を導くためには, さらに次の 3 点について検討しなければならない. すなわち,

- ① 隣合う包絡線振幅 R_{mj} と R_{mj+1} との結合確率分布,
- ② 隣合う δ_j と δ_{j+1} との結合確率分布,
- ③ $(R_{mj} + R_{mj+1})$ と $(\delta_j + \delta_{j+1})$ との結合確率分布である.

まず, ①については, R_{mj} と R_{mj+1} とともに表-1 に示した m_2 をもつ Weibull 分布で近似する. また, R_{mj} と R_{mj+1} との時間間隔はゼロクロス波の平均周期の半分程度であり, この程度の間隔では相互に相関をもつ. 周辺分布として式 (16) を満たし, かつ相互に相関をもつという条件だけでは結合確率分布を特定することはできないが, 本研究ではこれらの条件を満たす次の 2 次元

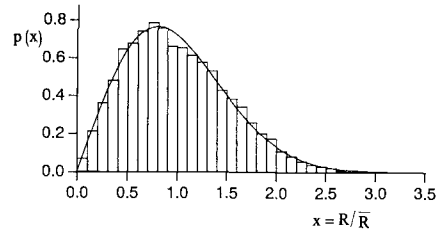


図-2 R の確率分布

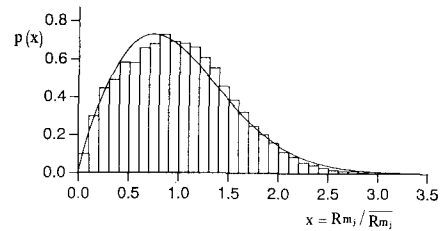


図-3 R_{mj} の確率分布

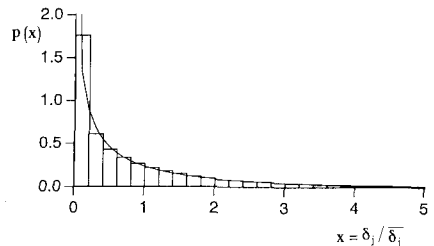


図-4 δ_j の確率分布

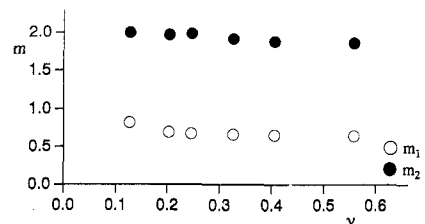


図-5 形状母数の推定値

表—1 Weibull 分布の母数の推定値

r	ν	m_1	m_2	γ_1	γ_2	$\bar{\delta}_j$	$\overline{R_{mj}}$
4	0.5571	0.6396	1.8482	0.0851	0.8165	0.0844	1.1583
5	0.4041	0.6491	1.8694	0.0626	0.7002	0.0541	1.0631
6	0.3747	0.6590	1.9045	0.0484	0.6245	0.0378	0.9972
8	0.2444	0.6686	1.9760	0.0341	0.5208	0.0234	0.9050
10	0.2018	0.6889	1.9594	0.0257	0.4505	0.0170	0.8407
20	0.1256	0.8185	1.9907	0.0086	0.2992	0.0078	0.6848

Weibull 分布 (Kimura, 1981) を R_{mj} と R_{mj+1} との結合確率分布として用いた。

$$p(R_{mj}, R_{mj+1}) = \frac{m_2^2}{4(\gamma_2^2 - \rho^2)} R_{mj}^{m_2-1} R_{mj+1}^{m_2-1} \cdot \exp\left\{-\frac{\gamma_2^2}{2(\gamma_2^2 - \rho^2)}(R_{mj}^{m_2} + R_{mj+1}^{m_2})\right\} \cdot I_0\left(\frac{R_{mj}^{m_2/2} R_{mj+1}^{m_2/2}}{\gamma_2^2 - \rho^2} \rho\right) \dots (17)$$

ここに、 I_0 は 0 次の第 1 種変形ベッセル関数である。 ρ は R_{mj} と R_{mj+1} の相関に関するパラメータで次式で表される。

$$\rho = \kappa \gamma_2 \dots (18)$$

ここで、 κ は次式で与えられる (Kimura ら, 1992)。

$$\kappa = (\mu_{13}^2 + \mu_{14}^2)^{1/2} / s_0 \dots (19)$$

$$\mu_{13} = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cos 2\pi(f - \bar{f}) t_m df$$

$$\mu_{14} = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \sin 2\pi(f - \bar{f}) t_m df$$

$$\bar{f} = s_1 / s_0$$

$$f_d = (-0.186r + 0.735)f_p$$

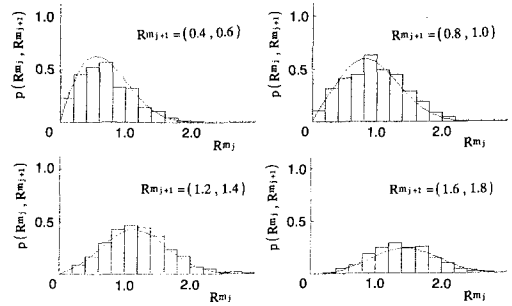
$$f_u = (1.61r + 1.62)f_p$$

ここに、 $S(f)$ は不規則波のスペクトル、 t_m は $(m_0/m_2)^{1/2}$ で定義されるゼロクロス波の平均周期である。また、ここでは R_{mj} をその平均値 $\overline{R_{mj}}$ で正規化していないので、式 (17)、(18) の γ_2 は次式で与えられる。

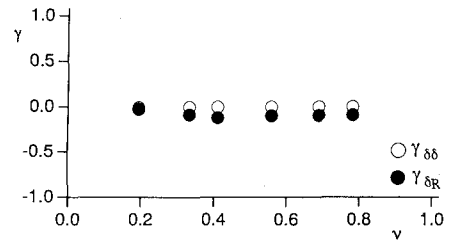
$$\gamma_2 = 1/2[\Gamma\{(1+m)/m\}]^{-m} \overline{R_{mj}}^m \dots (20)$$

図—6 に数値シミュレーションのデータと 2 次元 Weibull 分布との比較を示す。これは $r=5$ の場合であるが、両者の対応は良好である。この他のスペクトル形においても同様の良好な適合性が確認された。

つぎに②については、 δ_j と δ_{j+1} はともに表—1 に示した m_1 をもつ Weibull 分布で近似できる。また、両者間の相関係数を求めたところ、図—7 に○印で示したように、ほとんど 0 であった。したがって δ_j と δ_{j+1} とは互いに独立であると考えてよいので、両者の結合確率分布をそれぞれの分布の積で与えた。



図—6 2次元 Weibull 分布とデータの比較



図—7 δ と R の相関係数

$$p(\delta_j, \delta_{j+1}) = \frac{m_1^2}{4\gamma_1^2} \delta_j^{m_1-1} \delta_{j+1}^{m_1-1} \exp\left\{-\frac{1}{2\gamma_1}(\delta_j^{m_1} + \delta_{j+1}^{m_1})\right\} \dots (21)$$

ここでも δ_j をその平均値 $\bar{\delta}_j$ で正規化していないので、式 (21) の γ_1 は次式で与える。

$$\gamma_1 = 1/2[\Gamma\{(1+m)/m\}]^{-m} \bar{\delta}_j^m \dots (22)$$

つぎに③については、②と同様に R_{mj} と δ_j および R_{mj+1} と δ_{j+1} との相関係数を求めたところ、図—7 に●印で示したように、 -0.1 程度の負の相関がみられた。しかしこの値は小さいのでここでは R_{mj} と δ_j は独立であるとした。したがって $(R_{mj} + R_{mj+1})$ と $(\delta_j + \delta_{j+1})$ との結合確率分布は、それぞれの結合確率分布の積で与えた。以上の結果をもとに波高の確率分布を次のように導く。

まず、式 (10) において、 R_{mj} の項と δ_j の項に分けて考える。 R_{mj} の項を

$$R_m = R_{mj} + R_{mj+1}$$

とくと、 R_m の確率分布は $p(R_{mj}, R_{mj+1})$ を用いて次式のように表される。

$$p(R_m) = \int_0^{R_m} \frac{m_2^2}{4(\gamma_2^2 - \rho^2)} R_{mj}^{m_2-1} (R_m - R_{mj})^{m_2-1} \cdot \exp\left[-\frac{\gamma_2^2}{2(\gamma_2^2 - \rho^2)}\{R_{mj}^{m_2} + (R_m - R_{mj})^{m_2}\}\right] \cdot I_0\left[\frac{R_{mj}^{m_2/2}(R_m - R_{mj})^{m_2/2}}{\gamma_2^2 - \rho^2} \rho\right] dR_{mj} \dots (23)$$

つぎに、 δ_j の項を

$$\delta = \delta_j + \delta_{j+1}$$

とくと、 δ の確率分布は $p(\delta_j, \delta_{j+1})$ を用いて次式で表

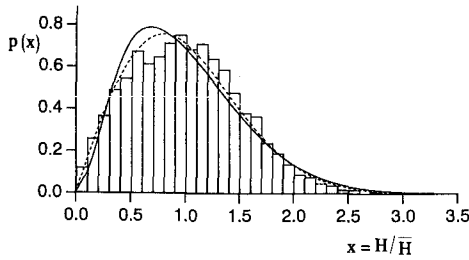


図-8(a) 波高の確率分布 ($r=5$)

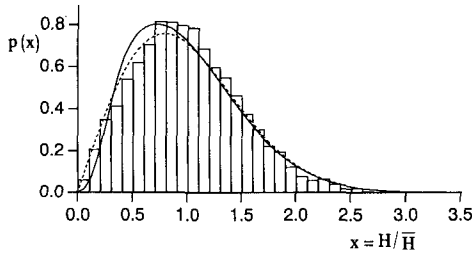


図-8(b) 波高の確率分布 ($r=10$)

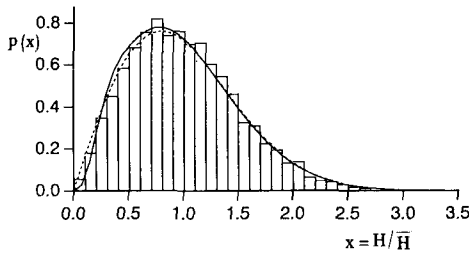


図-8(c) 波高の確率分布 ($r=20$)

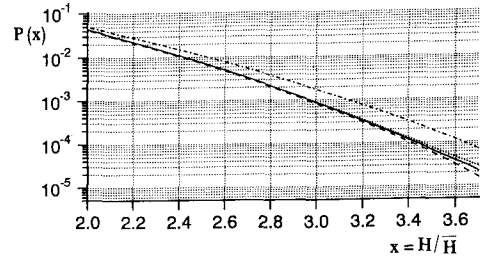


図-9 波高の超過確率(一点鎖線： $r=5$ ，点線： $r=10$ ，破線： $r=20$ ，実線：Rayleigh 分布)

式(25)を数値積分により計算した結果，図-8(a)～(c)に実線で示した波高の確率分布を得た。(a)が $r=5$ ，(b)が $r=10$ ，(c)が $r=20$ のケースであり，データとの比較を破線の Rayleigh 分布とあわせて示した。図-9には，式(25)の確率分布および Rayleigh 分布の超過確率を示した。図中の一点鎖線が $r=5$ ，点線が $r=10$ ，破線が $r=20$ ，実線が Rayleigh 分布の場合である。図より $r=5$ での波高の大きな波の出現確率は Rayleigh 分布よりかなり大きくなる。また，図-8(a)で実線とヒストグラムの対応があまり良くないが，これは頻度分布が図のように double-peak 型になっていることに起因するものと考えられる。ここに示したもののばかりでなく，他の研究者のデータにもこの特徴はみられる。この特性が何に起因するかはここでは明らかにすることができなかった。

参考文献

- 木村 晃・太田隆夫 (1990): 不規則波の波高の確率分布について，海岸工学論文集，第37巻，pp. 116-120.
- Kimura, A. (1981): Joint distribution of the wave heights and periods of random sea waves, Coastal Eng. in Japan, Vol. 24, pp. 77-92.
- Kimura, A. and T. Ohta (1992): On probability distributions of the zero-crossing irregular wave height, Proc. 6th IAHR Int'l Symp. on Stochastic Hydr., pp. 291-298.
- Longuet-Higgins, M. S. (1952): On the statistical distributions of the heights of sea waves, J. Marine Res., Vol. 11, No. 3, pp. 245-265.
- Longuet-Higgins, M. S. (1957): The statistical analysis of a random moving surface, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A, No. 966, Vol. 249, pp. 321-387.
- Tayfun, M. A. (1983): Effects of spectrum band width on the distribution of wave heights and periods, Ocean Eng., Vol. 10, No. 2, pp. 107-118.
- Tayfun, M. A. (1993): Sampling-rate errors in statistics of wave heights and periods, J. Wrtway, Port, Coast., and Oc. Engrg., ASCE, Vol. 119, No. 2, pp. 172-192.

される。

$$p(\delta) = \int_0^\delta \frac{m_1^2}{4\gamma_1^2} \delta_j^{m_1-1} (\delta - \delta_j)^{m_1-1} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2\gamma_1} \{ \delta_j^{m_1} + (\delta - \delta_j)^{m_1} \} \right] d\delta_j, \dots\dots\dots (24)$$

波高を H で表すと $H=R_m-\delta$ であり， R_m と δ は互いに独立であるから， H の確率分布は $p(R_m)$ と $p(\delta)$ を用いて次式で与えられる。

$$p(H) = \int_H^\infty \left\{ \int_0^{R_m} \frac{m_2^2}{4(\gamma_2^2 - \rho^2)} R_{mj}^{m_2-1} (R_m - R_{mj})^{m_2-1} \cdot \exp \left[-\frac{\gamma_2}{2(\gamma_2^2 - \rho^2)} \{ R_{mj}^{m_2} + (R_m - R_{mj})^{m_2} \} \right] \cdot I_0 \left[\frac{R_{mj}^{m_2/2} (R_m - R_{mj})^{m_2/2}}{\gamma_2^2 - \rho^2} \rho \right] dR_{mj} \right\} \cdot \left\{ \int_0^{R_m-H} \frac{m_1^2}{4\gamma_1^2} \delta_j^{m_1-1} (\delta - \delta_j)^{m_1-1} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2\gamma_1} \{ \delta_j^{m_1} + (\delta - \delta_j)^{m_1} \} \right] d\delta_j \right\} dR_m \dots\dots\dots (25)$$