

現地波浪データのウェーブレット解析による 非定常スペクトル特性

森 信人*・安田孝志**・山田道夫***

1. 緒 言

不規則な時系列データから周期性や相似性を検出する方法としてフーリエ解析が広く用いられている。

正弦・余弦関数が C^∞ 級で完全直交な周期関数であり、水面波の波動解がフーリエ積分で表されるなど扱い易い関数系であるため、フーリエ解析は幅広い適用性を持っている。フーリエ解析は、データの持つ周期性や相似性を明瞭に捉えることができ、時系列データの解析手法として非常に強力なものとなっているが、現象の生じた時間(場所)を特定することができないという欠点を持つ。これは時間(場所)に関する情報はフーリエ変換の位相情報のみに反映され、一般的に用いられるフーリエスペクトルには全く含まれないためであり、積分核が周期関数であることに起因している。

このため、局所的な相似構造の解析に当り、時間(場所)的に局在化した関数を積分核として選ぶことにより、積分変換を行う手法としてウェーブレット変換が提案され、注目を集めている。もともとウェーブレット変換は、石油探査において人工地震波の中に含まれる不連続性を検出することを目的として開発された解析手法であるが、数年の間に数学的にかなり洗練され[山田, 1992]、その応用が様々な分野で試みられている[Farge, 1992]。

そこで、本研究では、現地波浪データにウェーブレット変換を用いることにより、フーリエ解析では得ることのできない波浪の局所相似性および非定常スペクトルの特性について明らかにする。

2. 解析手法

2.1 正規直交ウェーブレット展開

連続ウェーブレット変換は、基底が斜交基底かつ過剰な系であるため、基底が直交化されたウェーブレット変換を用いることにする。正規直交ウェーブレット変換は、次式のウェーブレット展開として表される。

$$\eta(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (j, k \in \mathbb{Z}) \quad \cdots \cdots (1)$$

ここで、 $\alpha_{j,k}$ はウェーブレット係数、 $\psi_{j,k}$ はウェーブレットである。ウェーブレット $\psi_{j,k}$ は、フーリエ級数展開における基底 $\{\exp(i\omega t)\}$ に相当するアナライジング・ウェーブレット $\phi(t)$ を離散的な平行移動と (k) とスケール変換 (j) することによって次式のように作られる(ここでは、通常行われる2のべきで離散化を行っている)。

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k) \quad (j, k \in \mathbb{Z}) \quad \cdots \cdots (2)$$

$\psi_{j,k}$ が完全直交系であるならば、次式が成り立つ。

$$\alpha_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{j,k}(t - 2^{-j}k) dt \quad \cdots \cdots (3)$$

正規完全直交となるアナライジング・ウェーブレットは、Daubechies と Meyer の2種類が示されているが、ここでは、フーリエ解析との対応を考慮し、フーリエ空間でサポートコンパクトとなる Meyer のアナライジング・ウェーブレットを採用する。Meyer の構成方法(1989)は、i) $\phi(t)$ のフーリエ変換 $\tilde{\phi}(\omega)$ がフーリエ空間上でサポートコンパクト、ii) $\phi(t)$ が実関数、iii) $\phi(t)$ とその微分関数が $|t| \rightarrow \infty$ で急速に減少する、iv) 各オーダーでのモーメントがゼロであることを基本条件とし、 C^∞ 級な実関数 $\tilde{\phi}(\omega)$ に対して次の3条件を満たすものを選ぶ。

$$\text{i) } \left. \begin{aligned} &\tilde{\phi}(\omega) \geq 0, \quad \tilde{\phi}(\omega) = \tilde{\phi}(-\omega), \\ &\tilde{\phi}(\omega) \text{ は } \omega \geq 0 \text{ で単調減少関数である} \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (4)$$

$$\text{ii) } \tilde{\phi}(\omega) = 1 \quad (|\omega| \leq 2\pi/3) = 0 \quad (|\omega| \geq 4\pi/3) \cdots \cdots (5)$$

$$\text{iii) } \{\tilde{\phi}(\omega)\}^2 + \{\tilde{\phi}(\omega - 2\pi)\}^2 = 1 \quad (2\pi/3 \leq |\omega| \leq 4\pi/3) \cdots \cdots (6)$$

この $\tilde{\phi}(\omega)$ より、 $\tilde{\phi}(\omega)$ は

$$\tilde{\phi}(\omega) = e^{(-i\omega/2)} \sqrt{\{\tilde{\phi}(\omega/2)\}^2 - \{\tilde{\phi}(\omega)\}^2} \quad \cdots \cdots (7)$$

と定義され、この $\tilde{\phi}(\omega)$ をフーリエ変換して得られる

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad \cdots \cdots (8)$$

が求めるアナライジング・ウェーブレットを与える。

ここでは、 $\tilde{\phi}(\omega)$ として、

$$\tilde{\phi}(\omega) = \sqrt{g(\omega)g(-\omega)}, \quad \cdots \cdots (9)$$

* 学生会員 工修 岐阜大学大学院 工学研究科(日本学術振興会 特別研究員)

** 正 会 員 工博 岐阜大学教授 工学部土木工学科

*** 理博 東京大学大学院助教授 数理科学研究科

$$g(\omega) = h(4\pi/3 - \omega) / [h(\omega - 2\pi/3) + h(4\pi/3 - \omega)], \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$h(\omega) = \exp(-1/\omega^2) (\omega > 0), = 0 (\omega \leq 0) \dots\dots (11)$$

を用いて、アナライジング・ウェーブレットを構成する。

図-1に示すのは、式(8)によって得られるアナライジング・ウェーブレットであり、式(5)～式(6)および図-1より、Meyerのウェーブレットはフーリエ空間でサポートコンパクト、実空間においても $|t| \rightarrow \infty$ で急速に減衰する局在した関数であることがわかる。

2.2 数値アルゴリズム

本研究では、Yamada・Ohkitani (1991)の手法に習い、高速かつ簡便な計算手法を用いることにする。初めに、フーリエ解析同様なデータが周期性を持つと仮定し、 $\phi_{j,k}(t)$ のフーリエ変換を考える。

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{j,k}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{j,k}(t) \exp(-i\omega t) dt \\ &= 2^{-j/2} \tilde{\phi}(2^{-j}\omega) \exp(-ik2^{-j}\omega) \dots\dots (12) \end{aligned}$$

これより、ウェーブレット係数は、式(3)と比較して次式のように書ける。

$$\alpha_{j,k} = \frac{1}{2\pi} 2^{j/2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(2^j\omega) \tilde{\phi}^*(\omega)_{j,k} \exp(ik\omega) d\omega \dots (13)$$

ここで、

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \dots\dots\dots (14)$$

$f(t)$ が周期 T の周期関数である仮定すると、デルタ関数 δ を用いてフーリエ級数表示することが出来る。

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i \frac{2\pi n}{T} t\right) \\ \tilde{f}(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi a_n \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

式(13)および式(15)より最終的に次式を得る。

$$\alpha_{j,k} = 2^{-j/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i \frac{2\pi n}{T} k\right) \tilde{\phi}^*\left(\frac{2\pi n}{2^j T}\right) \dots (16)$$

また、簡単のために $T=1$ とし、 $\tilde{\phi}(\omega)$ が領域 $[-8/3\pi, -2/3\pi] \cup [+8/3\pi, +2/3\pi]$ でサポートコンパクトであることを考えると、式(16)の有限級数表示は、

$$\begin{aligned} \alpha_{j,k} &= 2^{-j/2+1} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{2^j-1} a_n \tilde{\phi}^*\left(\frac{2\pi n}{2^j}\right) a_{n+2^j} \tilde{\phi}^*\left(\frac{2\pi n}{2^j} + 2\pi\right) \right\} \\ &\quad \cdot \exp\left(i \frac{2\pi n}{2^j} k\right) \left\} \right. \\ &\quad (0 \leq j \leq n-1, 0 \leq k \leq 2^j-1) \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

となる。これは、FFTを用いるのに適した形となっており、実際、FFTを2回用いることによりウェーブレット係数を容易に得ることが出来る。

2.3 フーリエ解析との対応

実際の解析に入る前に、ウェーブレット係数とフーリエスペクトル $S(\omega)$ の関係について少し触れる。式(1)

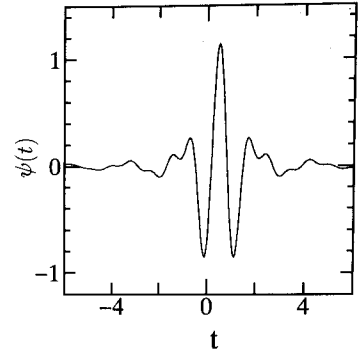
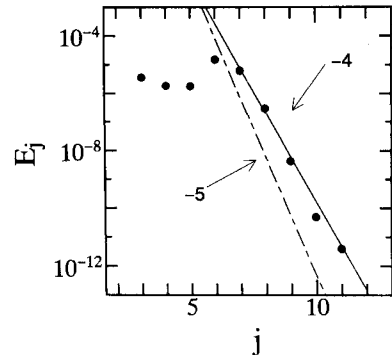
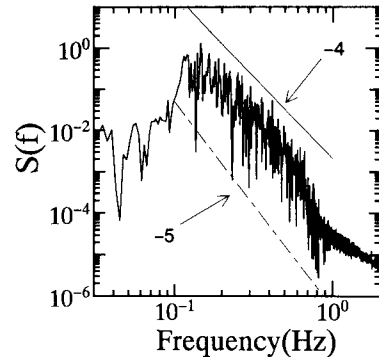


図-1 Meyerのアナライジング・ウェーブレット



(a) ウェーブレットスペクトル



(b) フーリエスペクトル

図-2 観測データより得られたウェーブレットおよびフーリエスペクトル

より、次の関係式を得ることが出来る。

$$E_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_{j,k}|^2 \sim \omega S(\omega), (\omega \sim 2^{j+2}\pi/3) \dots\dots (18)$$

ここで、 E_j はウェーブレットスペクトルと呼ばれ、式(18)より、ある時系列のスペクトルが何らかのべき乗則に従っている場合、式(18)よりウェーブレットとフーリエスペクトルは次式の関係を持つ。

$$E_j \sim 2^{-j(p-1)} \iff S(\omega) \sim \omega^{-p} \dots\dots\dots (19)$$

これより、ウェーブレットスペクトルとフーリエスペク

トルは対応づけることが可能となっている。以下では、ウェーブレット解析を実際の波浪データに適用する。

3. 波形データ解析への応用

ここでは、現地波浪データに対してウェーブレット解析を行い、その結果について検討を行う。このため 1989 年 1 月 12 日に日本海に面した大湊海岸に沖水深 38 m で観測された波浪観測データを用い、解析を進める。この時の海象は強い季節風下におけるものであり、有義波高が 2.6 m の発達した波浪であった。また、データのサンプリング間隔は 0.1 s、観測長は約 40 分である。

3.1 ウェーブレット解析によるべき乗則の表示

図-2 に、このデータ(データ数 4096)より直接求めたウェーブレットおよびフーリエスペクトルを示す。ウェーブレットスペクトルでは、 $j=7\sim 9$ までのモードが Pierson・Moskowitz スペクトルに代表される発達した風波のスペクトルである f^{-4} 則に良く従っているのに対し、フーリエスペクトルはこのことが必ずしも明白ではない。勿論、データウィンドウによる平滑化を行うことにより、べき乗則を明瞭にすることが可能であるが、ウェーブレットスペクトルはこの様なデータ処理を行うことなくべき乗則を調べることが可能である。これは、ウェーブレット解析が局在化された基底を用いているため、データの局所的な変化に対しても追従性が良く、相似則に対する分解性能が高いことによっている。この特

徴をさらに探るため、図-3 に観測データ中の 120 点(1.2 s、データ数 16364)が欠損している場合の波列に対してウェーブレットおよびフーリエ解析を行った結果を示す。フーリエスペクトルでは 0.8 Hz 以上の高周波モードに異常な振動が見られ、解析結果の信頼性に欠けているのに対し、ウェーブレットスペクトルは欠損のため $j \geq 12$ のモードのパワーが落ちているが、全体的には同じ形を保っていることがわかる。ウェーブレット解析では、現象の生じた時間(位置)に対して局所的な解析を行うため、このような異常なデータに対しても容易に解析を行うことが可能となっている。

3.2 ウェーブレット分布と局所ウェーブレットスペクトル

本節では、ウェーブレット解析の特徴の一つであるスペクトルの局所的な変化について、観測のデータのフーリエスペクトルから位相を乱数で与え、再合成したもの(合成波と略す)と比較検討する。

図-4 は、観測データおよび合成波のそれぞれのウェーブレット係数の 2 乗(エネルギーに相当)を実空間座標に変換してその分布を示したものである。合成波は、高次になるに従ってウェーブレット分布が一様になるのに対し、観測波の方はばらつきが見られる。これは、高次モードは低次のモードと何らかの関係を持ち、異なるスケールの間に相関があることを示している。

この関係をより明確にするため、局所的なスペクトルの変化を示す。局所ウェーブレットスペクトルを次式の様に定義する。

$$L_{j,k} = \sum |\alpha_{j,k}|^2 \quad (0 \leq k' \leq 2^{j_s}) \dots\dots\dots (20)$$

ここで、 j_s は求める局所ウェーブレットスペクトルの最小モード、 $\sum'$ は $k'/2^{j_s} \leq k2^j \leq (k'+1)/2^{j_s}$ を満たす k について積分することを意味する。

図-5 に示すのは、 $j_s=8$ のときの観測波および合成波の局所ウェーブレットスペクトルである。観測波の方は、低次から高次のモード全体に、山谷の折りなす様々な構造が続いているのに対し、合成波では高次モードになるに従って一様化し、低次モードの変動が高次モードに及んでいないことがわかる。観測波が発達した風波であることを考えると、この高次モードに至る分岐構造は非線形干渉による拘束モードや低次から高次モードへのエネルギーのカスケードによっていると思われるが、当然、合成波はこのような非線形構造を持っておらず、局所ウェーブレットスペクトルはこれを端的に示している。

3.3 水面変位の確率分布特性

水面波の変動が完全に確率過程に従う場合、水面変位の確率分布は中心極限定理によりガウス分布となるが、実際には非線形性によりグラム・シャリエ分布を取るこ

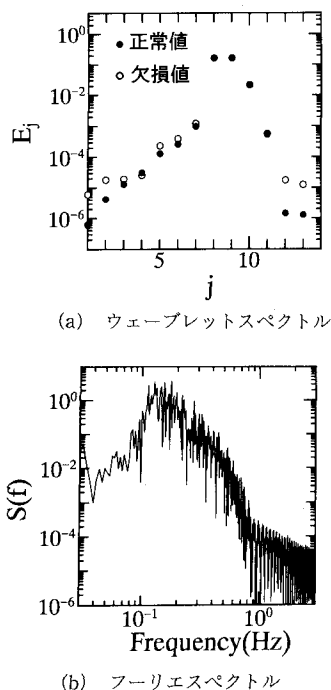


図-3 欠損データより得られたウェーブレットおよびフーリエスペクトル

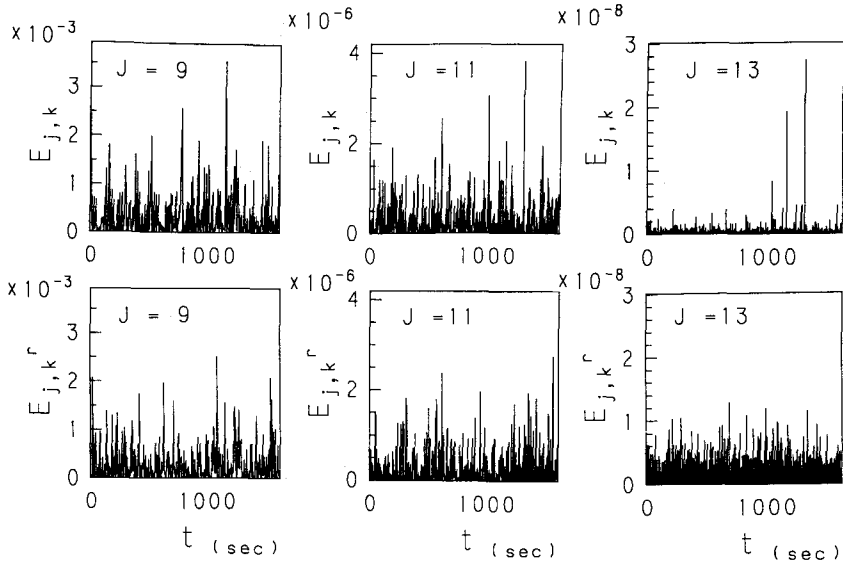


図-4 観測データおよび合成波およびウェーブレット分布 (上段: 観測データ, 下段: 合成波)

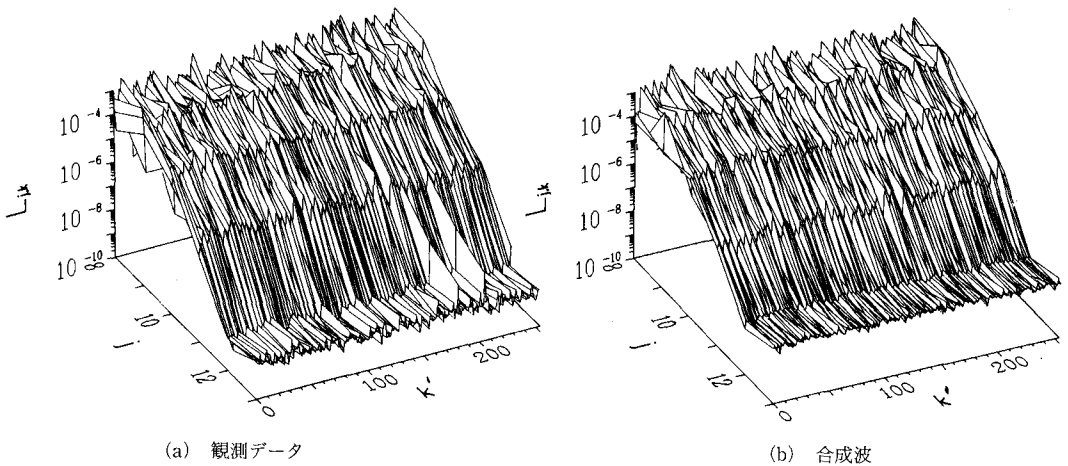


図-5 観測データおよび合成波の局所ウェーブレットスペクトル

とは良く知られている。式 (3) より、ウェーブレット係数 $a_{j,k}$ はそれぞれ 2^{-j} のスケールの水面変動に対応したものであり、そこで各スケールごとのウェーブレット係数の確率密度分布を図-6 に示す。合成波がどのスケールでもガウス分布に従っているのに対し、観測波では低次のモードはほぼガウス分布に従っているが、高次のモードは大きく外れており、細かいスケールの変動は完全独立な変動ではないことを示している。コヒーレンスによってもこのような解析は可能であるが、ウェーブレット解析では、1 測点のデータで良く、また空間波形に対しても用いることが出来る。

3.4 巨大波浪への適用

図-7 に示すのは、山形県由良沖で観測された Freak wave の観測波形 [吉元ら, 1992] およびそのウェーブ

レット分布である。 $j=7$ は、スペクトルのピークモードに対応し、この $j=7$ でのウェーブレット分布は波列中の波群に対応した場所で大きな値を持っており、GF による時系列解析と同じ意味合いを持っていると言えよう。 $t=500$ s 付近に Freak wave が出現しているが、この時のウェーブレット分布は非常に大きな値を持っており、エネルギー的に突出したものであることがわかる。注目すべきは、 $j=8$ および 9 のモードにおいても Freak wave に対応した場所で異常なエネルギーの集中が見られ、マクロスケールからミクロスケールに渡って相似構造が見られることであり、Freak wave が単に重ね合わせの結果として生じたものでないことがわかる。従来、このような時系列の中で局所的に大きな変化をするデータに対しては、非定常発展スペクトル解析が用いられているが、

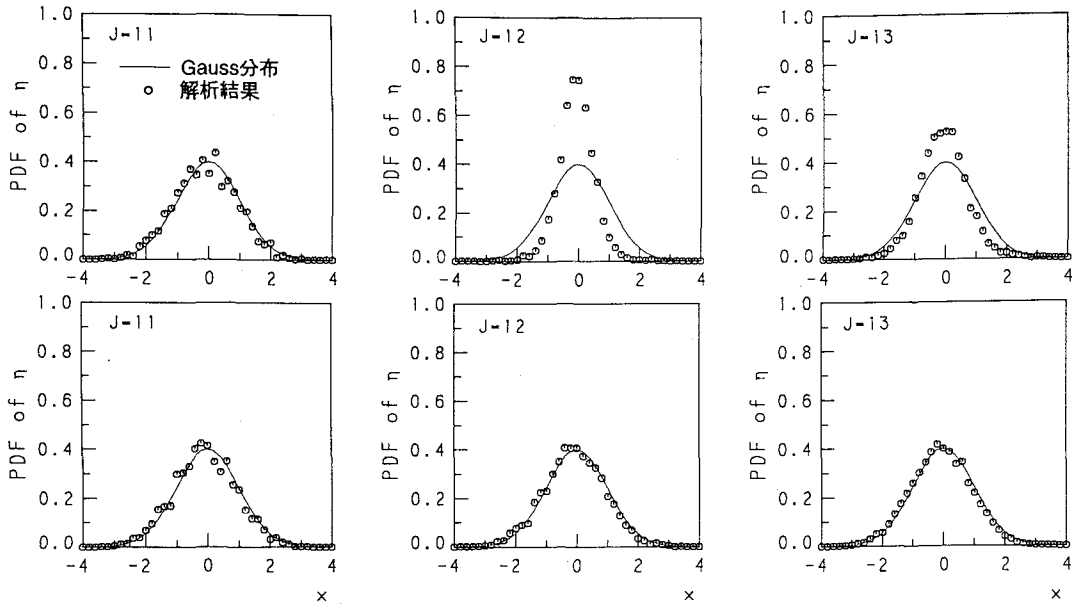


図-6 観測データおよび合成波のウェーブレット係数の確率分布 (上段: 観測データ, 下段: 合成波)

発達スペクトル解析では低波数成分の分解精度が低下するのに対し、ウェーブレット解析では低次から高次まで問題なく解析を行うことが容易に可能である。

4. 結 語

以上、現地観測データに対してウェーブレット解析を行ない、べき乗則および波列の局所的な変化について検討を行った。これより、ウェーブレット解析は波列の局所的な相似構造の解析に適したものであることが明らかとなった。

また、本論文中で用いた大湊海岸および由良沖での波浪観測データはそれぞれ京都大学防災研究所ならびに運輸省船舶技術研究所に提供して戴いたものであり、謝意を表するとともに、本研究を行うに当たり様々な助言を頂いた本学 田中光宏博士に深く感謝する。

参 考 文 献

- 吉元博文・加藤俊司 (1992): 浮遊式海洋構造物の実海域実験; VII, 設計値と実測値, 船舶技術研究所報告別冊, pp. 109-140.
 山田道夫 (1992): ウェーブレット解析変換とは何か, 数理科学, No. 354, pp. 11-27.
 Farge, M. (1992): Wavelet transforms and their applications to turbulence, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 24, pp. 395-457.
 Yamada, M. and K. Ohkitani (1990): Orthonormal wavelet expansion and its application to turbulence, *Prog. Theor. Phys.*, Vol. 83, No. 5, pp. 819-823.

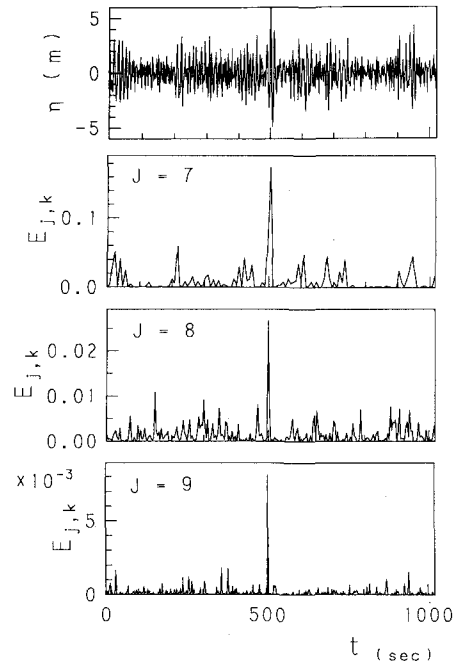


図-7 由良沖で観測されたFreak waveを含む波列のウェーブレット分布

- Yamada, M. and K. Ohkitani (1991): An identification of energy in turbulence by orthonormal wavelet analysis, *Prog. Theor. Phys.*, Vol. 86, No.4, pp. 799-815.
 Meyer, Y. (1989): *Wavelets*, J. M. Combes *et al.* (Eds.), Springer.