

方向スペクトルの推定における最大エントロピー 原理法 (MEP) の拡張

橋本典明* ・永井紀彦** ・浅井 正***
菅原一晃**** ・久高将信***** ・小野修平*****

1. はじめに

方向スペクトルを推定する方法としては、これまでも幾つかの方法が提案されており、例えば著者らの開発した高精度な推定法として、最大エントロピー原理法 (MEP, 橋本ら, 1985) やベイズ法 (BDM, 橋本, 1987) などがある。MEP は波高計と流速計の組み合わせや、ブイに搭載された加速度計と傾斜計の組み合わせなどからなる 3 成分観測データから方向スペクトルを推定可能な方法であり、3 成分観測データをもとに方向スペクトルを推定する場合には他の方法に比べて高い推定精度を有している。一方、BDM は観測データの誤差の影響も考慮した推定法であり、2 方向波浪のような複雑な波浪場においても、任意の 4 成分以上の波動量の観測データを用いれば、他の方法に比べて高精度かつ安定した方向スペクトルの推定値が得られる汎用性に富む方法である。しかしながら、MEP は 3 成分観測データにのみ適用可能という面で、簡便であるが汎用性に乏しく、一方、BDM は汎用性に富むものの、方向スペクトルの推定に多大の計算時間を要し、現地での簡便な方向スペクトル推定法としては不向きである。近年、方向スペクトルの関心が高まり、またその必要性からも、比較的多くの地点で方向スペクトル観測が実施されつつある。今後これらの貴重なデータを有効活用して行くためには、精度が良く、信頼性の高い方向スペクトルを推定し、蓄積していく必要がある。また、現地観測や実験室での即時的な活用のためには、簡便で計算時間の要しない高精度な方向スペクトル推定法の開発が必要である。

そこで、著者らは簡便かつ汎用性に富み、あまり計算時間を要しない方向スペクトル推定法として、上記の MEP を拡張した新しい方向スペクトル推定法「拡張最大エントロピー原理法 (EMEP)」を開発した。本方法は、BDM と同様に観測データの誤差の影響を考慮した方法であり、また、MEP や BDM と同程度の推定精度を有

し、BDM に比べて計算時間を大幅に短縮した方向スペクトル推定法である。

2. 理論式の定式化

微小振幅の不規則波の水面変動、水面勾配、水圧変動、水粒子速度などの任意の波動量間のクロススペクトル $\Phi_{mn}(\omega)$ と、波数・周波数スペクトル $S(k, \omega)$ の関係は、磯部ら (1984) により導かれ、

$$\Phi_{mn}(\omega) = \int_k H_m(k, \omega) H_n^*(k, \omega) \times \exp\{-ik(x_n - x_m)\} S(k, \omega) dk \cdots (1)$$

で与えられる。ここに、 x は平面座標、 k は波数ベクトル、 ω は角周波数、 i は虚数単位、 $*$ は共役複素数である。また、 $H_m(k, \omega)$ は水面変動から任意の波動量への伝達関数である。

以下では、波数 k と角周波数 ω との間に分散関係式が成立することを仮定し、また式の誘導の便宜上、式 (1) の 2 次元的表示式 (m 番目の波動量と n 番目の波動量のクロススペクトルを $\Phi_{mn}(f)$ と表示する方式) を、1 次元的表示式 ($\phi_i(f)$ と表示する方式) に再構成して取り扱う。なお、 $\Phi_{mn}(f)$ から構成される行列 Φ がエルミート行列であることを考慮し、行列 Φ の上三角の部分のみを用いることとする。このとき、式 (1) は次式のように表される。

$$\phi_i(f) = \int_0^{2\pi} H_i(f, \theta) G(\theta|f) d\theta \quad (i=1, \dots, K) \cdots (2)$$

ここに、 K は独立な方程式の数であり、

$$\left. \begin{aligned} H_i(f, \theta) &= H_m(f, \theta) H_n^*(f, \theta) \\ &\quad \times [\cos\{k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\} \\ &\quad - i \sin\{k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\}] \\ &\quad / D_{mn}(f) \\ \phi_i(f) &= \Phi_{mn}(f) / \{S(f) D_{mn}(f)\} \\ G(\theta|f) &= S(f, \theta) / S(f) \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \cdots (3)$$

である。また、 $D_{mn}(f)$ はクロススペクトルを無次元化するとともにクロススペクトルの誤差を正規化するために導入した関数であり、式 (2) の実部、虚部に対してそれぞれ次式で与えられるコスベクトル $\tilde{C}_{mn}(f)$ および $\tilde{I}_{mn}(f)$ を用いて表される。

* 正会員 工博 運輸省港湾技術研究所海洋水理部主任研究官

** 正会員 運輸省港湾技術研究所海象調査研究室長

*** 正会員 工修 運輸省港湾技術研究所海象調査研究室研究官

**** 正会員 運輸省港湾技術研究所海洋水理部主任研究官

***** 正会員 (株)エコー、第一技術部、波浪プロジェクト室

オドラチャスペクトル $\hat{Q}_{mn}(f)$ の推定誤差の標準偏差 (Bendat ら, 1986) を用いることにした。

$$\left. \begin{aligned} \sigma[\hat{C}_{mn}(f)] &= \left[\frac{1}{2N_a} \{ \Phi_{mm}(f) \Phi_{nn}(f) \right. \\ &\quad \left. + C_{mn}(f)^2 - Q_{mn}(f)^2 \} \right]^{1/2} \\ \sigma[\hat{Q}_{mn}(f)] &= \left[\frac{1}{2N_a} \{ \Phi_{mm}(f) \Phi_{nn}(f) \right. \\ &\quad \left. - C_{mn}(f)^2 + Q_{mn}(f)^2 \} \right]^{1/2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 N_a はクロススペクトルを推定する際にアンサンブル平均する相異なるデータ個数である。 $D_{mn}(f)$ による正規化により、与えられたクロススペクトルの偏差の発生確率が最小なバイアスの少ない方向スペクトルが推定されるものと思われる。

さて、MEP の方向スペクトルの定式化に際しては、方向関数 $G(\theta|f)$ の形状はあらかじめ仮定されてはいなかった。しかしながら、方向関数を一種の確率密度関数と仮定して得られるエントロピーを最大化することにより結果的に、指数関数の指数部に Fourier 級数 (次数が 2) が乗った関数形が得られた。この関数形はパラメータの値の如何によらず負のエネルギーは取り得ず、また、次数の少ないモデルでも平坦な形状から先鋭な形状まで種々の形状の方向関数を表現できる便利な関数形となっていた。そこでいま、MEP で得られた関数形を拡張し、方向関数の推定式として、

$$\hat{G}(\theta) = \frac{\exp\left\{\sum_{n=1}^N (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\right\}}{\int_0^{2\pi} \exp\left\{\sum_{n=1}^N (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\right\} d\theta} \dots\dots\dots (5)$$

を仮定する。また、複素数で与えられる $\phi_i(f)$ および $H_i(f, \theta)$ を便宜的に

$$\left. \begin{aligned} \phi_i &= \text{Real}\{\phi_i(f)\}, & \phi_{K+i} &= \text{Imag}\{\phi_i(f)\} \\ H_i(\theta) &= \text{Real}\{H_i(f, \theta)\}, & H_{K+i}(\theta) &= \text{Imag}\{H_i(f, \theta)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

と分離し、すべてを実数に関する式として取り扱う。なお、式 (6) の左辺は周波数 f の関数であるが、省略して記述した。以後特別な場合を除き、周波数 f は便宜的に省略して扱うこととする。このとき式 (5) および (6) より、正規化されたクロススペクトルの誤差 ε_i を考慮して、結局、式 (2) は次式のように表される。

$$\varepsilon_i = \frac{\int_0^{2\pi} \{\phi_i - H_i(\theta)\} \exp\left\{\sum_{n=1}^N (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\right\} d\theta}{\int_0^{2\pi} \exp\left\{\sum_{n=1}^N (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\right\} d\theta} \quad (i=1, \dots, M) \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $\varepsilon_i (i=1, \dots, M)$ は互いに独立であり、平均 0、未知の分散 σ^2 の正規分布に従うものとする。また、式

(7) では、クロススペクトルの実部が 0 となる式、虚部が 0 となる式および方向関数の正規化条件 (方向関数の方向角に関する積分が 1 となる条件) と等価な式はもとの連立積分方程式から除外しており、このような式を除いた残りの独立な連立積分方程式の数を M として取り扱っている。なお、MEP ではその定式化にラグランジュの未定乗数法を用いたため、与えられた制約条件を厳密に満たし、誤差 ε_i は 0 として定式化されていた。このため、式 (7) の分子の項のみが 0 として定式化されており、式 (7) の分母は解くべき方程式には含まれていなかった。

方向関数を推定するためには、式 (7) で与えられる誤差 ε_i の自乗和が最小になるように未知パラメータ $a_n, b_n (n=1, \dots, N)$ を求めればよい。しかしながら、式 (7) は未知パラメータ a_n, b_n に関して非線形であり、これらを解析的に求めることは難しい。そこでいま、 $\tilde{a}_n, \tilde{b}_n$ が、解 a_n, b_n に十分近いものとし、

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \tilde{a}_n + a'_n \\ b_n &= \tilde{b}_n + b'_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

で解を表現する。ここに、 a'_n, b'_n は解 a_n, b_n と近似値 $\tilde{a}_n, \tilde{b}_n$ との残差である。ここで、

$$F(\theta) = \exp\left\{\sum_{n=1}^N (\tilde{a}_n \cos n\theta + \tilde{b}_n \sin n\theta)\right\} \dots\dots\dots (9)$$

と置き、式 (7) を a'_n, b'_n に関して展開し、1 次の項までとると、結局、式 (7) は次式で表される。

$$\varepsilon_i = Z_i - \sum_{n=1}^N (a'_n X_i + b'_n Y_i) \quad (i=1, \dots, M) \dots\dots\dots (10)$$

ここに、

$$Z_i = \frac{\int_0^{2\pi} \{\phi_i - H_i(\theta)\} F(\theta) d\theta}{\int_0^{2\pi} F(\theta) d\theta} \dots\dots\dots (11)$$

$$\left. \begin{aligned} X_i &= Z_i \left\{ \frac{\int_0^{2\pi} F(\theta) \cos n\theta d\theta}{\int_0^{2\pi} F(\theta) d\theta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\int_0^{2\pi} \{\phi_i - H_i(\theta)\} F(\theta) \cos n\theta d\theta}{\int_0^{2\pi} \{\phi_i - H_i(\theta)\} F(\theta) d\theta} \right\} \dots\dots\dots (12) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} Y_i &= Z_i \left\{ \frac{\int_0^{2\pi} F(\theta) \sin n\theta d\theta}{\int_0^{2\pi} F(\theta) d\theta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\int_0^{2\pi} \{\phi_i - H_i(\theta)\} F(\theta) \sin n\theta d\theta}{\int_0^{2\pi} \{\phi_i - H_i(\theta)\} F(\theta) d\theta} \right\} \dots\dots\dots (13) \end{aligned} \right\}$$

である。

式 (10) で与えられる連立線形方程式を繰り返し計算によって解けば、理論上は方向関数の推定値が求められる。しかしながら、式 (5) は方向関数をパラメトリック・モデルで表現したものであり、実際に観測データを用いて方向関数を推定する際には、式 (5) のモデル次数 N の選択が問題となる。そこで、ここでは Akaike (1973) により開発された AIC (赤池の情報量基準) を導入し、AIC 最小化法によって、最適なモデル次数の選択を行うこととした。観測データに有限の未知パラメータを含むパラメトリック・モデルをあてはめる場合、モデルの属内から最適なモデルを選択する問題では、AIC 最小化法はモデルのデータへの適合度と推定値の滑らかさの両方の観点から望ましい結果が得られることが多い。

式 (5) で与えられる方向関数のモデル次数として N 次の項まで考慮すると、未知パラメータの数は誤差 ε_i の分散 σ^2 を含めて $2N+1$ である。したがって、この場合の AIC は次式で与えられる。

$$AIC = M(\ln 2\pi + 1) + M \ln \hat{\sigma}^2 + 2(2N+1) \dots (14)$$

ここに、 M は式 (10) の独立な連立方程式の数、 $\hat{\sigma}^2$ は式 (10) から最小自乗推定値 a'_n, b'_n を求めた際の収束時の誤差 ε_i の分散である。

3. EMEP の数値計算法

2. で述べた理論式の数値計算上の特性を種々検討し、EMEP の数値計算では低次のモデルから高次のモデルへと順次計算を進めることとした。AIC 最小化法を含む具体的な計算手順は以下のとおりである。

- ① モデル次数として 1 次のモデル、すなわち式 (5) のサンメンション (総和) において $N=1$ を選び、 $\bar{a}_1, \bar{b}_1$ の初期値を 0 として、式 (11) ~ (13) で係数 X_i, Y_i, Z_i を求め、式 (10) に最小自乗法を適用する。
- ② ①で得られた推定値 a'_1, b'_1 を式 (8) に代入して得られた a_1, b_1 を式 (9) および式 (11) ~ (13) の $\bar{a}_1, \bar{b}_1$ に置き換えて①の計算を繰り返す。
- ③ ①~③の計算を繰り返し、 $|a'_n|, |b'_n|$ が適当な収束条件 (10^{-2} より小さい) を満たす場合には繰り返し計算を止め、式 (14) により AIC を算出する。
- ④ モデル次数として 2 次のモデルを選択し、①~③と同様の繰り返し計算および AIC の計算を実施する。ただしこの場合には、 $\bar{a}_1, \bar{b}_1$ の初期値には③で得られた収束解 a_1, b_1 を使い、 $\bar{a}_2, \bar{b}_2$ の初期値は 0 として繰り返し計算を実施する。なお、収束計算の途中で、 $|a'_n|, |b'_n|$ のいずれかがある設定条件 (10 を越える値を示す) を満たす場合には、式 (8) に収束計算を制御するための変数 r を導入し、式 (8) の代わりに、次式によって再計算を実施する。

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \bar{a}_n + r a'_n \\ b_n &= \bar{b}_n + r b'_n \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

すなわち、繰り返し計算の途中で $|a'_n|, |b'_n|$ が設定値を越える場合には、 r の値を、

$$r = (0.5)^l : (l=0, 1, \dots) \dots (16)$$

として徐々に r を小さな値に変化させて繰り返し計算を実施する。今回の計算では $l=4$ まで変化させることとし、 $l=4$ の場合にも解が収束しない場合には、推定値は不安定、すなわち最適モデル次数を既に越えたものとして数値計算を止め、1 次のモデルを最適モデルとして選択した。また、2 次のモデルの収束解が得られる場合には、2 次のモデルの AIC と 1 次のモデルの AIC を比較し、1 次モデルの AIC が 2 次モデルの AIC よりも小さい場合は、1 次のモデルを最適モデルとして選択し、計算を打ち切る。逆に、2 次モデルの AIC が 1 次モデルの AIC よりも小さい場合には最適モデルは 2 次以上であり、次の⑤に進む。

- ⑤ モデルの次数をさらに 3 次、4 次、…と順次高次のモデルに変化させ、④と同様の計算を繰り返すが、あるモデル次数で AIC が最小値を示し、次の次数で AIC が増大する場合にはその段階で計算を止め、最小の AIC 値を示すモデルを最適モデルとして選択する。

- ⑥ ①~⑤の計算で得られた最適モデルの解 a_n, b_n を用い、式 (5) により方向関数を計算する。

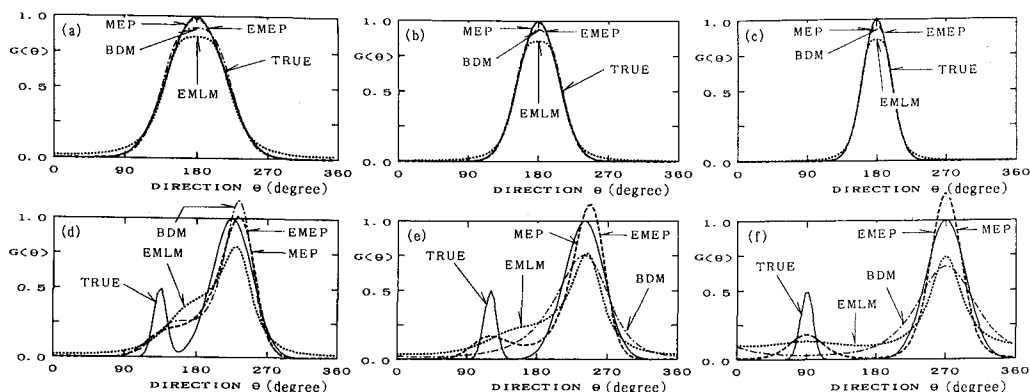
なお、上記の繰り返し計算においては、モデルの取り得る最高次数は式 (10) で与えられる独立な連立方程式の数により制限される。すなわち、未知パラメータの数は方程式の数よりも小さくなくてはならず、 $2N+1 \leq M$ である。最大限この範囲内で①~⑥の計算を実施すればよい。

4. EMEP の数値シミュレーションによる検討

数値シミュレーション法を利用して EMEP により推定される方向スペクトルの推定精度の検討を行った。ここでは、任意の周波数 f に着目したとして方向関数についてのみ検討することとし、磯部ら (1984) と同じ方法により数値シミュレーションを実施した。

1) 3 成分観測データを用いた場合の解析例

図-1 は MEP を適用可能な 3 成分観測データとして、水位変動 η および同一地点の水面下での x 軸方向および y 軸方向の流速成分 u および v を観測した場合の、種々の波浪条件での数値シミュレーション例を示したものである。図中の TRUE はシミュレーション条件として用いた真の方向関数を示し、EMLM は拡張最尤法 (磯部ら, 1984) による推定結果を示している。なお、図の縦軸は真の方向関数のピーク値で基準化して描いてい


 図-1 3成分観測データ (η , u , v) を用いた場合の方向関数の推定精度の比較

る。

図-1 (a)~(c) に見られるように、一方向波浪を対象とする場合にはいずれの方法もほぼ妥当な推定値を示している。しかしながら、EMLM では、エネルギーピーク付近でやや偏平な推定値を示し、この影響のためにエネルギーが 0 の領域にもエネルギーが広がっている。BDM は方向集中度が低い場合にエネルギーピーク付近でやや偏平な推定値を示しているものの、EMLM に比べるとその程度は小さく、エネルギーの横漏れは生じていない。EMEP と MEP は真値とほぼ一致する推定値を示しており、図-1 からそれらの差を識別出来ない。

図-1(d)~(f) の二方向波浪の例でも、EMEP と MEP はほぼ同じ値を推定し、また、(e), (f) に見られるように、二つの波群が 90° より大きい角度で交差する場合には、二方向波浪を明確に識別可能である。しかしながら、EMLM では二方向波浪は明確には識別されておらず、BDM では一方向波浪として推定されている。

2) 4つの観測波動量を用いた場合の解析例

図-2 は BDM が威力を発揮する 4 成分以上の観測例として、スターアレイを用いて 4 地点で水位変動 η を観測し、図-1 と同じ波浪条件を用いた場合の数値シミュレーション例を示したものである。

レーション例を示したものである。

図-2 (a)~(f) に見られるように、EMEP, BDM, EMLM のいずれの場合も、図-1 に比べて推定精度は向上している。特に、EMEP と BDM はほとんど真値と一致する推定値を示しており、推定精度は極めて高い。しかしながら、EMLM では、例えば (f) に見られるように、真値には見られないいくつかの疑似ピークを示す例もある。これは EMLM は観測波動量の増大により分解能は向上するものの、安定性は逆に低下することを示している。

5. 現地観測データへの適用例

EMEP の現地観測データへの適用性を検討するために、「いわき沖波浪観測システム」の観測データ (橋本ら, 1988) を用いて方向スペクトル解析を実施した。

図-3 は有義波高 $H_{1/3}=3.81$ m, 有義波周期 $T_{1/3}=12$. 3 秒で、光易型方向関数の方向集中度パラメータ $S_{\max}$ が 75 程度のうねりを対象として方向スペクトル解析した例である。図-3 の下段はそれぞれの図の上段の立体図を等値線図で示したものであり、等高値は低い方から順に $10^{0.0}$, $10^{0.2}$, $10^{0.4}$, $10^{0.6}$, ... ($\text{m}^2/\text{s}/\text{rad}$) として描いて

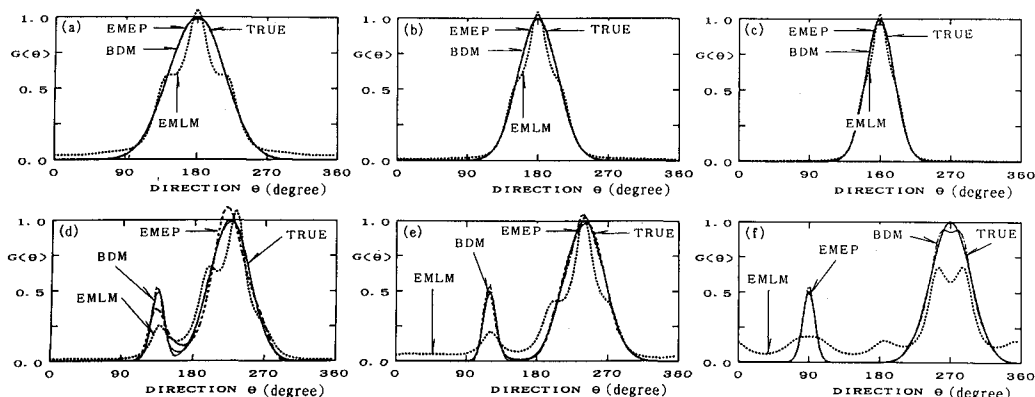


図-2 4成分観測データ (スターアレイ) を用いた場合の方向関数の推定精度の比較

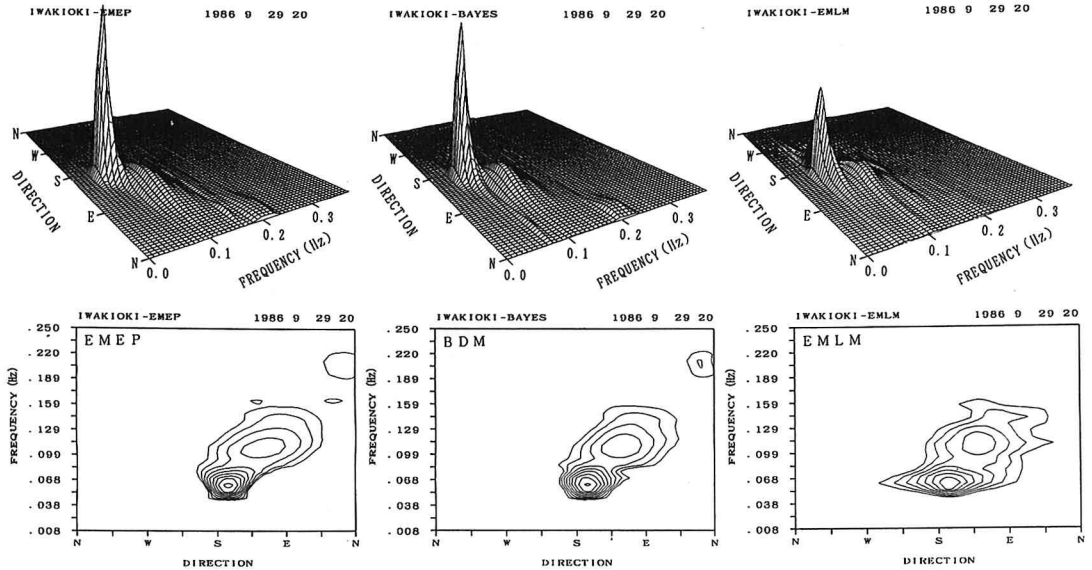


図-3 現地観測データを用いた場合の方向スペクトルの解析結果の比較

いる。

図-3に見られるように、いずれの方法による推定結果も周波数が0.05 Hz付近に鋭いピークを有する幅の狭い方向スペクトルを示している。しかしながら、EMLMはEMEPやBDMに比べて、やや幅の広いエネルギー分布を示し、このためEMLMのピーク値はEMEPやBDMのピーク値に比べて明らかに低く推定されている。また、EMEPのピーク値はBDMよりもやや高く推定されているが、その差はBDMのピーク値の1割以下であり、等値線図の形状は両者ともよく類似している。

この他にも、 $S_{\max}$ が10程度の風波や多方向に複数のピークを有する種々の形状の方向スペクトルを対象として同様の解析を実施したが、EMEPにより推定される方向スペクトルはBDMにより推定される方向スペクトルに近い値を示すことを確認している(橋本ら, 1993)。

6. おわりに

EMEPは3成分観測データに適用する場合にはMEPと同じ方向スペクトルを推定し、4成分以上の観測波動量に適用する場合にはBDMとほぼ同じ方向スペクトルを推定し、その推定精度はMEPやBDMを除く他の既往の方向スペクトル推定法に比べて極めて高い。また、EMEPによる方向スペクトルの推定はBDMに比べて計算が簡便であり、パーソナル・コンピュータによるリ

アル・タイム処理が可能である。さらに、EMEPの定式化にはBDMと同様にクロススペクトルの誤差の影響も考慮されており、この意味でも妥当な推定法となっており、今後の標準的な方向スペクトル推定法として有用かつ強力な方法である。

参考文献

- 磯部雅彦・近藤浩右・堀川清司 (1984): 方向スペクトルの推定におけるMLMの拡張, 第31回海岸工学講演会論文集, pp. 173-177.
- 橋本典明・小舟浩治 (1985): 最大エントロピー原理(MEP)を用いた方向スペクトルの推定, 港湾技術研究所報告, 第24巻, 第3号, pp. 123-145.
- 橋本典明 (1987): ベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定, 港湾技術研究所報告, 第26巻, 第2号, pp. 97-125.
- 橋本典明・小舟浩治・亀山 豊 (1988): 現地観測データを用いた方向スペクトル推定法に関する検討, 港湾技術研究所報告, 第27巻, 第2号, pp. 59-94.
- 橋本典明・永井紀彦・浅井 正・菅原一晃 (1993): 海洋波の方向スペクトルの推定における最大エントロピー原理法(MEP)の拡張, 港湾技術研究所報告, 第32巻, 第1号, pp. 3-25.
- Akaike, H. (1973): Information theory and an extension of the maximum likelihood principle, 2nd Inter. Symp. on Information Theory (Petrov, B. N. and Csaki, F. eds.), Akademiai Kiado, Budapest, pp. 267-281.
- Bendat, J. S. and A. G. Piersol (1986): Random data analysis and measurement procedures, Second edition, John Wiley & Sons, 566 p.