

3次元波浪場における Freak Wave の発生確率

木 村 晃*・太 田 隆 夫**

1. はじめに

従来 Freak Wave は非常に“大きな”波とあいまいに認識されていたが, Klinting ら (1987) によりおおむね次のような定義がなされた. すなわち, (1)有義波高の2倍以上の波高を持つ, (2)前後の波の2倍以上の波高を持つ, (3)峰の高さが波高の65%以上ある, の計3点である. 著者ら (1992) はこれら3条件に対してその事象の出現確率を与え, 十分発達した風波の場合, 条件すべてを満たす波の出現確率は 0.155×10^{-4} すなわち約65000波に1波の現象であることを示した. しかし, この理論は不規則波として uni-directional な波を対象としたもので, 実際の深海域では波が方向分散特性をもつため, 同じ出現確率を用いることが出来ない状況がおこる. すなわち, 固定点で波を観測する場合, 図-1 に示すように観測点が波の最大値の位置から外れると, この波は記録上では小さな波と判定される. しかし, 空間的に見れば観測された波は“大きな波”の一部であり, 航行中の大きな船舶では船体の一部に大きな波の峰を体験した場合, それがどの部分であろうと大きな波の作用を受けたと判定される. このように“大きな波”を選択的に認識する必要がある場合, 観測点を波高の大きな部分に移動することになり, 結果的に Freak Wave の発生頻度が増加する. Freak Wave の発生頻度は波の方向分散特性と船舶など構造物の規模により変化する相対的な値となる

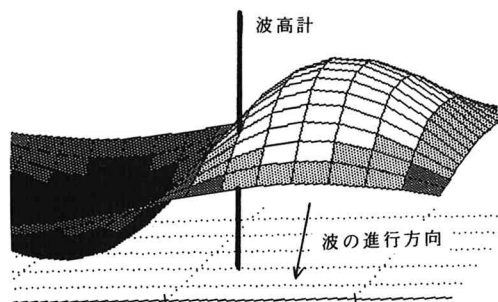


図-1 波高計と2次元的な水面形の関係

ため, 最初に説明した Klinting の定義だけでは十分な定義とならない. この研究は著者らの理論を3次元波浪場に拡張し, 有限な範囲を考慮した場合の Freak Wave の出現頻度を明らかにすることを目指したものである.

2. 波数スペクトル

方向分散特性をもつ不規則波のスペクトル表示としては周波数スペクトルと方向分布関数の積として与える光易型の次式が広く用いられている.

$$E(f, \theta) = S(f) \times H(\theta; f) \quad \cdots \cdots (1)$$

ここに S は周波数スペクトル, H は方向分布関数である. しかし, ここでは波浪の空間的な変化を取り扱うため次のように定義された波数スペクトルの表示を用いる. すなわち, 不規則波の水面形を次式のように与える.

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(K_n x + 2\pi f_n t + \varepsilon_n) \quad \cdots \cdots (2)$$

ここに C_n , K_n , f_n および ε_n はそれぞれ第 n 成分波の振幅, 波数, 周波数, 位相角である. 波数 K の x , y 方向成分を K_x , K_y とし, 分散関係式を用いると (1) 式より

$$E(K_x, K_y) = C_0 / 2\pi K \cdot E(f, \theta) \quad \cdots \cdots (3)$$

のように波数スペクトル $E(K_x, K_y)$ が定義される. K はベクトル K の大きさである. 図-2 は $H_{1/3} = 5.5$ m, $T_{1/3} = 10$ s, $S_{\max} = 10$ (合田ら, 1975) とした場合の $E(K_x, K_y)$ を示したものである (卓越波向き方向は x 軸方向). いま, 静水面上にとった x , y 軸を原点を中心にして θ だけ反時計まわりに回転させた座標軸を x' , y' とすると新しい座標系での波数成分はそれぞれ次式で与えられる.

$$\begin{aligned} K_{x'} &= K_x \cos \theta + K_y \sin \theta \\ K_{y'} &= -K_x \sin \theta + K_y \cos \theta \quad \cdots \cdots (4) \end{aligned}$$

簡単のために K_x , $K_{x'}$ を u , u' , K_y , $K_{y'}$ を v , v' とおくと新しい座標系での不規則波の水面形は次のように表される.

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(u'_n x' + v'_n y' + 2\pi f_n t + \varepsilon_n) \quad \cdots \cdots (5)$$

ここに

$$\sum_{u,v}^{u+du, v+dv} C_n^2 / 2 = E(u, v) du dv \quad \cdots \cdots (6)$$

である.

* 正会員 工博 鳥取大学工学部社会開発システム工学科教授
** 正会員 工修 鳥取大学工学部社会開発システム工学科助手

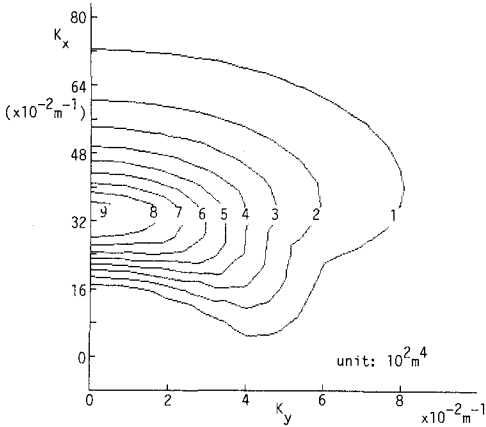


図-2 $E(K_x, K_y)$ の等値線図
($H_{1/3}=5.5\text{ m}$, $T_{1/3}=10\text{ s}$, $S_{\max}=10$)

いま, x, y 平面に垂直で x 軸に対して θ の角度をもつ仮想平面 H をたてる. この平面上における任意時刻の水面形は

(5) 式において $t=0$, $y'=0$ において

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(u'_n x' + \varepsilon_n) \dots\dots\dots (7)$$

で与えられる. (7) 式で与えられる水面形の波数スペクトルは次式で与えられる.

$$E_{\theta}(u') du' = \sum_{du', v'} C_n^2 / 2 = du' \int_{-\infty}^{\infty} E(u, v) dv' \dots\dots\dots (8)$$

ここに 2 番目の式は x' 成分が $(u', u' + du')$ の間に入る波に関してすべての v' の和をとることを意味する. 図-3 は図-2 に示した不規則波の波の場に平面 H と y 軸のなす角を順に 0° (実線), -15° (破線), -30° (点線) と変化させて計算した波数スペクトルである. 0° の場合はピークを中心に左右対称となる. この対称性は H の角度が大きくなっても比較的保たれる.

3. 包絡線の極大値の確率分布

H 平面上の波形は (7) 式で与えられるが, 成分波は相互に独立であるので ξ の確率分布は正規分布, またそれに対して引いた Rice の定義に基づく包絡線 R の確率

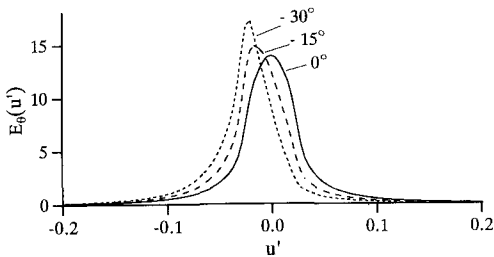


図-3 $E_{\theta}(u')$ ($\theta=0^\circ$: 実線, -15° : 破線, -30° : 点線)

分布は Rayleigh 分布となる. 狭帯域スペクトルを仮定すると十分な精度で ξ の振幅は同じ時刻の包絡線の値 R で近似できる. ここでもこの仮定を用いる. この仮定により, H 平面に沿う ξ の振幅の極大値の確率分布は次のように求められる.

R が $x' \sim x' + dx'$ の間で極大値をとり, その値が R と $R + dR$ の間に入る確率は次のように求めることが出来る. すなわち, R の x' に関する 1 回微分 R' の $x' + dx'$ における値を x' のまわりに Taylor 展開し, 第 2 項まで採用すると,

$$R'(x' + dx') \approx R'(x') + R''(x') dx' \dots\dots\dots (9)$$

となる. R が点 x' で極大値をとるとすれば $R'(x')=0$ より, R' は $x' + dx'$ で $|R''(x') dx'|$ の範囲の値をとる (R'' は R の 2 回微分). したがって R が $x' \sim x' + dx'$ で極大値をとり, その値が $R \sim R + dR$ に入る確率は R, R', R'' の 3 変数の結合分布を $p(R, R', R'')$ とすれば

$$p_{\max}(R) = dR dx' \int_{-\infty}^{\infty} p(R, 0, R'') R'' dR'' \dots\dots\dots (10)$$

で与えられる. 狭帯域スペクトルの仮定を置いているので, ξ の極大値 (極小値) の振幅の最大値の確率分布が (10) 式で与えられることになる. Rice (1945) にならって $p(R, R', R'')$ を導くと次のようになる.

$$p(R, R', R'') = \frac{R^3}{8\pi^3 B} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' \int_{-\infty}^{\infty} d\phi'' \times \exp \left\{ -\frac{1}{2B^2} [B_0 R^2 + 2B_1 R^2 \phi' - 2B_2 (RR'' - R^2 \phi'^2) + B_{22} (R'^2 + R^2 \phi'^2) - 2B_3 (RR'' \phi' - 2R'^2 \phi' - R' R \phi'') - R^2 \phi'^3] + B_4 (R''^2 - 2RR'' \phi'^2 + 4R'^2 \phi'^2 + 4RR' \phi' \phi'' + R^2 \phi'^4 + R^2 \phi''^2) \right\} \dots\dots\dots (11)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} B &= b_0 b_2 b_4 + 2b_1 b_2 b_3 - b_2^3 - b_0 b_3^2 - b_4 b_1^2 \\ B_0 &= (b_2 b_4 - b_3^2) B, & B_{22} &= (b_0 b_4 - b_2^2) B \\ B_1 &= -(b_1 b_4 - b_2 b_3) B, & B_2 &= (b_1 b_3 - b_2^2) B \\ B_3 &= -(b_0 b_3 - b_1 b_2) B, & B_4 &= (b_0 b_2 - b_1^2) B \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

である. また, $b_n (n=0, 1, 2, 3, 4)$ は次のように与えられる. すなわち,

$$\left. \begin{aligned} l_{c1} &= R \cos \phi = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(u'_n x' - u'_m x' + \varepsilon_n) \\ l_{s1} &= R \sin \phi = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(u'_n x' - u'_m x' + \varepsilon_n) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

とする. ここに u'_m は H 平面上での平均波数である. 以下同様であるので簡単に示すと

$$l_{c2} = (l_{c1})', \quad l_{s2} = (l_{s1})', \quad l_{c3} = (l_{c1})'', \quad l_{s3} = (l_{s1})'' \text{ のように関数}$$

$l_{cn}, l_{sn}(n=2, 3)$ を定義する。' および '' は x' に関する 1 回および 2 回微分を意味する。これらの関数より $b_n(n=0, 4)$ は

$$\begin{aligned} b_0 &= (\overline{l_{c1}^2}) = (\overline{l_{s1}^2}) \\ b_2 &= (\overline{l_{c2}^2}) = (\overline{l_{s2}^2}) \\ b_4 &= (\overline{l_{c3}^2}) = (\overline{l_{s3}^2}) \\ b_1 &= (\overline{l_{c1}l_{s2}}) = (\overline{l_{c2}l_{s1}}) \\ b_3 &= (\overline{l_{s2}l_{c3}}) = (\overline{l_{c2}l_{s3}}) \end{aligned}$$

のように与えられる。—— は平均操作を意味する。

(11) 式の ϕ および ϕ'' に関する積分は容易であるが ϕ' に関する積分は困難である。計算を簡単にするために (8) 式の $E_0(u')$ がピークに関して対称であるとする。図-3 からわかるようにこの仮定は $\theta=0$ の場合に成立し、 θ が 0 でない場合もほぼ成立する。この仮定より

$$\begin{aligned} p(R, R', R'') &= 2\alpha \int_0^\infty \exp\{-\beta\phi'^4 - \gamma\phi'^2\} d\phi' \\ \alpha &= \frac{R^2}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{B_4}} \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2B^2}(B_0R^2 - 2B_2RR'' + B_{22}R'^2 + B_4R'^2)\right\} \\ \beta &= B_4R^2/2B^2 \\ \gamma &= (B_{22}R^2 - 2B_4RR'' + 2B_2R'^2)/(2B^2) \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

となる。Rice (1945) は上式の解析解を得ているが複雑であるのでここでは数値計算によった。(14) 式の R' を 0 と置き (10) 式に代入すると $p_{\max}$ が計算できる。積分は同様に数値計算によった。

4. 近傍の包絡線の極大値

いま図-4 に示す A 点に波高計が設置されており、水面変動を観測しているものとする。図中で y' は平面 H 上の静水面と一致するように引かれた座標軸、実線は H 平面上の包絡線 R である。図に示すように A 点での R の振幅 R_A と近傍で R が極大となる点 B での R の振幅 R_B との関係は $R_A \leq R_B$ である。 R_A が非常に大きい場合には B は A の比較的近傍に存在することが予想される。ここでは A 点の情報から B 点の位置と R_B の値を次のように求める。

いま、包絡線 $R(y')$ を $y'=0$ (A 点) まわりに展開する

$$R(y') = R(0) + R'(0)y' + R''(0)y'^2/2 + \dots\dots (15)$$

ここでは A, B 両点の間隔が小さいとし、両点間の R を (15) 式の第 2 項までの項で近似する。 R は y' に関する 2 次式となるので B 点までの距離および R_B の値は A 点での R, R', R'' の値を用いて次のように与えられる。

B 点までの距離；

$$y' = \Delta y = |R'_A/R''_A| \quad \dots\dots\dots (16)$$

R_B ；

$$R_B = \{2R_A R''_A - R'^2_A\}/2R''_A \quad \dots\dots\dots (17)$$

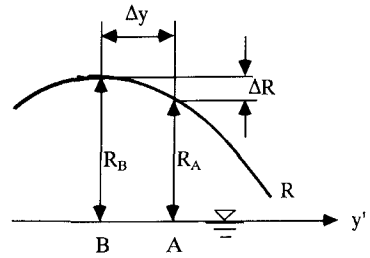


図-4 包絡線の極大値と波高計の位置の関係

(17) 式より、

$$\Delta R = R_B - R_A = -R'^2_A/2R''_A \quad \dots\dots\dots (18)$$

すなわち、A から Δy だけ離れた点に R_A より ΔR だけ振幅の大きな点が存在することになる。

A 点での R の値が R_A なる条件下で R_B が R_A より $\Delta R \sim \Delta R + dR$ だけ大きくなる確率は次式で与えられる。

$$p_F = \int_S P(R', R''; R_A) dR' dR'' \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここに $P(R', R''; R_A)$ は R_A なる条件下での R' と R'' の結合分布であり、

$$P(R', R''; R_A) = P(R, R', R'')/p(R)|_{R=R_A} \quad (20)$$

で与えられる。また S は

$$\Delta R < -R'^2/2R'' < \Delta R + dR \quad \dots\dots\dots (21)$$

なる領域である。図-5 は図-3 に用いた不規則波で平面 H が波の卓越方向に直角におかれている場合、 R_A が R の確率分布 (Rayleigh 分布) から計算した $R_{1/3}$ (1/3 最大振幅) の 1.5 倍になる場合の $P(R', R''; R_A)$ を示したものである。ただし $R'=0$ に関して対称であるので $R' > 0$ の部分だけ示した。いま、

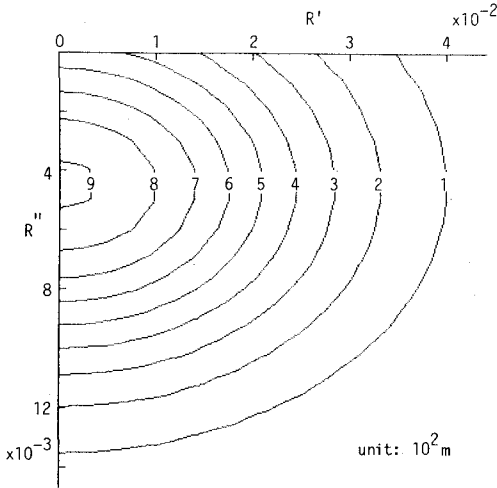
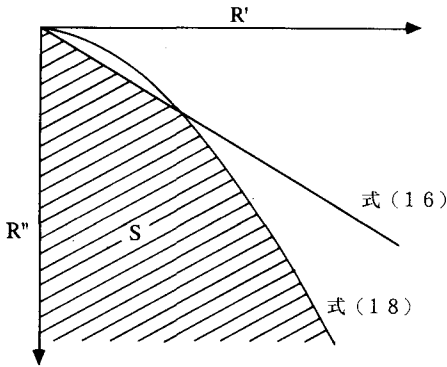
$$R_F = 2R_{1/3}, \quad \Delta R_* = R_F - R_A \quad \dots\dots\dots (22)$$

とすると、 $-R'^2/2R'' = \Delta R_*$ より下の部分に存在する R' と R'' の組合せが近傍に $R \geq R_F$ となる R の極大点を生じる。ここでは“近傍”と説明したが、(16) 式の Δy が大きくなると (15) 式による近似の精度が悪くなるのでこの値をある程度以下の値に限定する必要がある。

図-6 はこれらの考慮すべき条件を示した概略図である。図中の直線は (16) 式、曲線は (18) 式である。結局図の斜線部分が条件を満たす部分であり、(19) 式の S としてこの部分をとれば指定する近傍 (Δy_*) 内に $R_B \geq R_F$ なる部分が存在する確率を計算することが出来る。(16) 式と (18) 式の交点の座標は原点と $\{2\Delta R_*/\Delta y_*, 2\Delta R_*/(\Delta y_*)^2\}$ である。

5. Freak Wave の発生確率

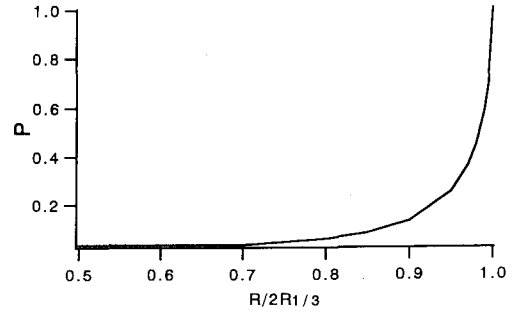
Freak Wave の定義は最初に述べた通りであるが、Klinting の定義すべてが用いられることは少なく、第 1

図-5 $P(R', R''; R_A)$ の等値線図 ($R_A = 1.5R_{1/3}$)図-6 指定の近傍内に Freak wave が存在する R' と R'' の組み合わせの範囲 (概念図)

の条件すなわち有義波高の2倍という条件だけが用いられることが多いようである (Sand, 1990). 波高が Rayleigh 分布をするという条件だけでこの定義を適用すると Freak Wave の発生確率は約 3.215×10^{-4} となる (木村ら, 1992). これは約 3000 波に 1 波の割合で Freak Wave が現れることに対応する. この確率は次式から計算されたものである. すなわち,

$$p = \int_{2H_{1/3}}^{\infty} p(H) dH \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここに $p(H)$ は Rayleigh 分布である. ところがここまでの論議からもわかるように, 波の場の3次元性を考えると固定点で観測される波高が上の条件を満たしてなくても近傍にこれを越える波が存在する可能性があり, その確率は S として図-6の範囲をとれば (19) 式で与えることが出来る. いま, Δy_* として有義波の波長の半分の値をとると, 図-5で計算に用いた不規則波の場合, Δy_* の近傍内に Freak Wave が存在する確率は図-7のように

図-7 P_F の値

与えられる. ただし, 計算は R_A, R_B をそれぞれ A, B 点での半波高として計算を行った. 図からもわかるように 0.9 あたりから急激に P_F の確率が大きくなる. これらの確率が (23) 式の p の計算に繰り込まれるとすれば, Freak Wave の出現確率は次式で計算される.

$$p = \int_0^{\infty} p_F p(H) dH \quad \dots\dots\dots (24)$$

ただし,

$$p_F = \begin{cases} p_F & 0 < R < 2R_{1/3} \\ 1 & R > 2R_{1/3} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (25)$$

である. ただし $R = H/2$ としている. (24) 式の積分結果は 4.77×10^{-4} となり, 前述の 3.215×10^{-4} に比して約 45 % 程度大きくなっており, この場合, 2100 波に 1 波の割合で Freak Wave があらわれることになる. たとえば有義周期を 10 s とすればほぼ 6 時間に 1 波の割合となる.

Klinting の定義のうち, (3) は他の条件に比して非常に厳しい条件となり, この条件を考慮すると Freak Wave はきわめて希な現象となる. しかし著者ら (木村ら, 1992) は, 波高の大きな波ではゼロクロス波の上下の振幅の非対称性は小さいこと (木村ら, 1991), 波形の非線形性を考慮するとほぼ自動的にこの条件は満たされていること等の理由からこの条件は重要でないこと, さらに突然現れることが Freak Wave の特性 (per Bruun, 1985) であるとすれば, Klinting の (2) の条件は前半の部分 ($H_2 > 2H_1$) だけで十分であり, 後半の部分 ($H_2 > 2H_3$) は重要ではないことなどを指摘した. したがって (24) 式の条件に加えて $H_2 > 2H_1$ の条件を加味すると Freak Wave の発生確率は次のように与えられる.

波高 H_1 がその 2 倍以上の波高 H_2 に jump する確率は次式で与えられる (Kimura, 1980).

$$p_{12}(H_2) = \frac{\int_0^{H_2/2} \int_{H_2}^{H_2+dH} p(H_1, H_2) dH_2 dH_1}{\int_0^{H_2/2} p(H_1) dH_1} \quad \dots\dots\dots (26)$$

ここに $p(H_1, H_2)$ は 2 次元 Rayleigh 分布, $p(H_1)$ は Rayleigh 分布である. (24) 式にならうと Freak Wave

の出現確率は

$$p = \int_0^{\infty} p_F p_{12}(H_2) dH_2 \dots\dots\dots (27)$$

で与えられる。 p_F は(19), (25)の両方から与えられる。

上と同じ条件で計算を行うと 2.78×10^{-4} となり, 著者が前に示した同じ条件の1方向不規則波に対する Freak Wave の出現確率 (1.98×10^{-4}) に比して約 46 % 増加する。これは約 3600 波に1波の割合で現れる現象である。

6. おわりに

この研究では3次元不規則波浪場において一定の近傍内 (ここでは $L/2$ 以内とした) に基準を越える波高をもつ波が現れる場合について理論的な検討を行った。その結果, 最近における一般的な Freak Wave の定義である $H > 2H_{1/3}$ を用いた場合, 約 2100 波に1波, 波高の jump を加味した場合でも約 3600 波に1波の現象であることがわかった。これらの結果はこの現象が決して希なものではないことを示している。山口ら(1991), 安田ら(1992)による観測結果の解析でも Freak 基準を越える波がデータ中に頻繁に現れているが, これらの波がそれほど注目されていないことを考えると, 有義波高の2倍以上とする従来の基準を越える波はあまり Freak な波ではな

いことになる。Freak Wave が力学的に特異な現象である可能性の検討も含めて今後とも研究の必要がある。

参考文献

- 木村 晃・太田隆夫・松見吉晴 (1991): 波高の中分点位置の確率特性, 海岸工学論文集, 第38巻, pp. 96-100.
- 木村 晃・太田隆夫 (1992): 深海域における Freak Wave の発生頻度について, 海岸工学論文集, 第39巻, pp. 136-140.
- 合田良実・鈴木康正 (1975): 光易型方向スペクトルによる不規則波の屈折・回折計算, 港湾技研資料, No. 230, 45 p.
- 安田孝志・森 信人・林 修市 (1992): 日本近海における Freak Wave の出現特性について, 海岸工学論文集, 第39巻, pp. 131-135.
- 山口正隆・大福 学・山本大樹 (1991): 資料解析に基づく最高波の統計的特性の検討, 海岸工学論文集, 第38巻, pp. 106-110.
- Klinting, P. and S. E. Sand (1987): Analysis of prototype Freak wave, Coastal Hydrodynamics (Ed. Dalrymple), ASCE, pp. 618-632.
- Kimura, A (1980): Statistical properties of random wave groups, Proc. 17th ICCE, pp. 2955-2973.
- Bruun, P. (1986): Design and Construction of Mounds for Breakwaters and Coastal Protection, Elsevier, 938 p.
- Rice, S. O. (1945): たとえば宮脇一男他訳, 雑音理論, 電気書院, 221 p.
- Sand, S (1990): Report from the Workinggroup on Breaking and Freak Waves, Water Wave Kinematics, NATO ASI series, pp. 17-20.