

非線形波動方程式に対する無反射境界条件について

Eric Cruz*・横木裕宗**・磯部雅彦***・渡辺 晃***

1. 序 論

近年、波浪変形の数値シミュレーションが盛んになり、非線形モデルも用いられるようになってきた。著者ら(1992)も透水層上の非線形波動方程式を提案し、透過潜堤による波浪変形の計算を行ってきた。このような平面波浪場の数値計算において、無反射性の境界の取り扱い方法は重要な問題である。本研究では、Boussinesq 型の非線形波動方程式を用いて、与えられた入射波を計算領域内に入射させ、かつ領域外へ出ようとする波が反射することなく完全に透過するような境界条件、すなわち無反射境界条件について議論する。

2. エネルギー吸収帯と吸収係数

数値計算における Sommerfeld の放射条件は式 (1) で表せる。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + C \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

ここで U は鉛直方向に平均された水平流速、 C は長波の波速 $\sqrt{gh}$ (h は静水深)。 x, t はそれぞれ水平方向の座標、時間を表している。非線形波の数値計算において、開境界に図-1 に示されるエネルギー吸収帯を設けることにより、境界で放射条件を満足させることができる。エネルギー吸収帯は次の3つの量によって特徴づけられる：1) 吸収帯の幅 F 、2) 吸収帯背後に定義された吸

収係数の代表値 ε_m 、および3) 吸収係数の分布形 $\varepsilon(x)/\varepsilon_m$ である。この吸収帯でのエネルギー減衰は、摩擦項 εU の形で運動方程式に取り込まれる。このようにして得られた1次元の非線形波の連続式と運動方程式をそれぞれ式 (2)、(3) に示す。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [h(U + \eta)] = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} + \varepsilon U = 0 \quad (3)$$

ここで η は水面変動である。これらの式から非線形項を無視して η を消去すると次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{h^2}{3} \frac{\partial^4 U}{\partial t^2 \partial x^2} - gh \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

この式(4)の解を $U(x, t)$ として、次式で表せるような、時間に関しては正弦的で空間に関しては複素波数 $\lambda = \lambda(x)$ によって変化するものを仮定する。

$$U(x, t) = \bar{U} e^{-i\lambda x} e^{i\omega t} \quad (5)$$

ここで、 $\bar{U}$ は速度振幅、 ω は角周波数を表している。式(5)を式(4)に代入すると、複素波数 λ は次式のように求められる。

$$\lambda = \frac{\omega}{\sqrt{gh - \omega^2 h^2/3}} \sqrt{1 - i \frac{\varepsilon}{\omega}} \quad (6)$$

式(5)より、減衰率は $-\lambda$ の虚数部なので、減衰率 $p(x)$ は次式で表せる。

$$p(x) = \left[\frac{\omega (\sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2} - \omega)}{gh - \omega^2 h^2/3} \right]^{1/2} \quad (7)$$

非常に低い周波数帯の波と非常に高い周波数帯の波の、それぞれに対するエネルギー吸収特性を式(7)から求める。浅海波では、式(7)の中の $\omega^2 h^2/3$ は常に gh より小さいので、式(7)の分母は正である。そこで、分母が正である範囲の極限として、以下の関係が求められる。

$$\omega \rightarrow 0 \quad p \rightarrow \frac{1}{\sqrt{gh}} \left(\frac{\omega \varepsilon}{2} \right)^{1/2} \quad (8)$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad p \rightarrow \frac{1}{\sqrt{gh}} \frac{\varepsilon}{2} \quad (9)$$

式(8)、(9)から、運動方程式に εU を導入すること

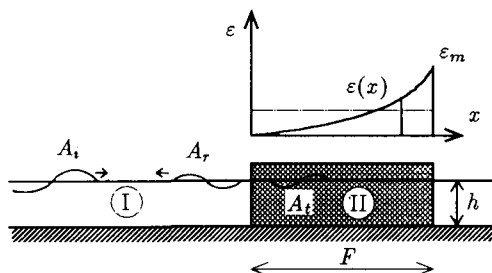


図-1 エネルギー吸収帯の定義図

* 工修 東京大学大学院 土木工学専攻
 ** 正会員 工修 東京大学助手 工学部土木工学科
 *** 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科

によって、広い周波数帯の成分波を減衰させることができることがわかる。

次元解析によると吸収係数 ε_m の関数形として下の3つが考えられる。そしてそれぞれの関数形について、非常に低い周波数帯と非常に高い周波数帯での $p(x)$ を評価した。これらを以下に示す。ただし $\theta, \theta', \theta''$ は定数である。

関数形 (1) $\varepsilon_m = \theta \sqrt{g/h}$

$$\omega \rightarrow 0 \quad p \rightarrow \frac{\sqrt{\theta/2}}{g^{1/4} h^{3/4}} \sqrt{\omega} \dots\dots\dots (10)$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad p \rightarrow \frac{\theta/2}{h} \dots\dots\dots (11)$$

関数形 (2) $\varepsilon_m = \theta' g/\omega h$

$$\omega \rightarrow 0 \quad p \rightarrow \frac{\sqrt{\theta'/2}}{h} \dots\dots\dots (12)$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad p \rightarrow \frac{\theta' \sqrt{gh}}{2h^2} \frac{1}{\omega} \dots\dots\dots (13)$$

関数形 (3) $\varepsilon_m = \theta'' \sqrt{gH}/h$

$$\omega \rightarrow 0 \quad p \rightarrow \frac{\sqrt{\theta''/2} H^{1/4}}{g^{1/4} h} \sqrt{\omega} \dots\dots\dots (14)$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad p \rightarrow \frac{\theta''}{2h} \sqrt{\frac{H}{h}} \dots\dots\dots (15)$$

式(11)より、 $\omega \rightarrow \infty$ のとき p は ω に無関係なので、関数形(1)では高周波数帯において吸収効果がよい。式(13)より、高周波数帯で p が ω に反比例するため、関数形(2)では、高周波数帯で吸収効果が悪い。関数形(3)は、その中に含まれる H/h をエネルギー吸収帯の中で決定するのが困難であるため、実用に向かない。よって、 ω と H に無関係な関数形(1)が最も適切な関数形である。

3. エネルギー吸収関数

領域の外に向かう波が、エネルギー吸収帯で減衰している場合、次式のように書ける。

$$U = \tilde{U} e^{-p(k)t} e^{ik[x-q(k)t]} \dots\dots\dots (16)$$

ここで $p(k)$ は減衰係数、 $q(k)$ は波数 k の波の波速である。式(16)を式(4)に代入すると、式(17)、(18)が導かれる。

$$p(k) = \frac{\varepsilon}{2(1+k^2 h^2/3)} \dots\dots\dots (17)$$

$$q(k) = \left\{ gh - \left[\frac{\varepsilon}{2k(1+k^2 h^2/3)} \right]^2 \right\}^{1/2} \dots\dots\dots (18)$$

式(17)より、波のエネルギー吸収率の分母に k^2 が含まれているので波長の長い波の方が短い波より早く減衰することがわかる。

数値計算の中で扱う波は、理論で仮定した波速である $\sqrt{gh}$ より遅く進行する。このような両者の波速の違い

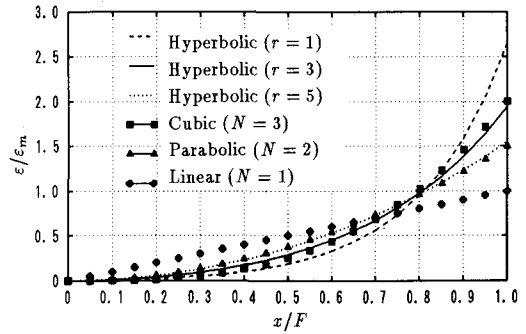


図-2 エネルギー吸収関数

が、開境界であるにも関わらず反射がおきる原因となっている。したがって、吸収帯でのエネルギー減衰を速め、かつ端部からの反射をおさえるためには、 q をできるだけ $\sqrt{gh}$ に近づけて、かつある k に対して ε を操作して p をできるだけ大きくすることが必要である。また、理論的考察によると、エネルギー吸収関数はエネルギー吸収帯の前面で0から徐々に大きくなっていくべきである。これらのことから、エネルギー吸収関数 $\varepsilon = \varepsilon(x)$ の関数形として以下の3種類を考えた。(図-2)

線形：

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_m x/F \dots\dots\dots (19)$$

N乗型 ($N=2$ のとき放物線型)：

$$\varepsilon(x) = \frac{(N+1)\varepsilon_m}{2F^N} x^N \dots\dots\dots (20)$$

双曲線型 (r ：パラメター)：

$$\varepsilon(x) = \frac{r\varepsilon_m}{2(\sinh r - r)} [\cosh(rx/F) - 1] \dots\dots\dots (21)$$

いずれの関数形においても、 ε_m と F が同じ値であれば、それぞれの関数曲線と横軸で囲まれた領域の面積は互いに等しくなる。

4. 線形波の反射率—理論解

式(19) - (20) で示された関数形でのエネルギー吸収関数の吸収効率を比較するために、式(2)、(3)を線形化して解き、吸収帯前面での反射率を求めた。式(2)、(3)を線形化した方程式の解析解は、Bessel関数を用いて求めることができるが、ここでは以下のように、疑似定数を用いて近似解を求める方法で解くことにする。

式(2)、(3)を線形化した方程式のエネルギー吸収帯上(図-1で領域II)での解として、次式のような周期解を仮定する。

$$\eta_{II}(x, t) = \text{Re}[\zeta(x)e^{i\omega t}] \dots\dots\dots (22)$$

$$U_{II}(x, t) = \text{Re}[V(x)e^{i\omega t}] \dots\dots\dots (23)$$

これらを式(2)、(3)を線形化した方程式に代入し、 ε が $0 < x < F$ で疑似定数であると仮定すると、解は以下

のように表せる。

$$\eta_{II}(x, t) = \frac{h\lambda}{\omega} \operatorname{Re} \left[(A_1 e^{i\lambda x} - A_2 e^{-i\lambda x}) e^{i\omega t} \right] \dots (24)$$

$$U_{II}(x, t) = \operatorname{Re} [V(x) e^{i\omega t}] \dots (25)$$

ここで、

$$\lambda = \lambda_\omega \sqrt{1 - i\varepsilon/\omega} \dots (26)$$

$$\lambda_\omega = \omega / \sqrt{gh - \omega^2 h^2 / 3} \dots (27)$$

である。領域 I では入射波 A_i と反射波 A_r が重なっている。領域 II では入射波 A_i と反射波 A_r が重なっている。領域 I では入射波 A_i と反射波 A_r が重なっている。領域 II では入射波 A_i と反射波 A_r が重なっている。

$$\eta_I(x, t) = \operatorname{Re} [A_i e^{-i\lambda_\omega x} + A_r e^{i\lambda_\omega x}] e^{i\omega t} \dots (28)$$

$$U_I(x, t) = \frac{\omega}{h\lambda_\omega} \operatorname{Re} [A_i e^{-i\lambda_\omega x} - A_r e^{i\lambda_\omega x}] e^{i\omega t} \dots (29)$$

式 (24) - (29) を以下の 3 つの境界条件に適用して、未知数である A_1 , A_2 , A_3 を求める。

1. $x = F$ での Sommerfeld の放射条件

$$\frac{\partial U_{II}}{\partial t} + C \frac{\partial U_{II}}{\partial x} = 0 \dots (30)$$

式 (25) を式 (30) に代入する際に ε が疑似定数であるという制限を取ると、次式が得られる。

$$A_1 = -\mu_2 A_2 e^{-i2\lambda F} \dots (31)$$

ここに、

$$\mu_2 = \frac{\sqrt{1 - i\varepsilon_F/\omega} - C\lambda_\omega [1 - \varepsilon_F + \varepsilon'_F F/2]/\omega}{\sqrt{1 - i\varepsilon_F/\omega} + C\lambda_\omega [1 - i(\varepsilon_F + \varepsilon'_F F/2)/\omega]} \dots (32)$$

$$\lambda_F = \lambda_\omega \sqrt{1 - i\varepsilon_F/\omega} \dots (33)$$

$$\varepsilon_F = \varepsilon|_{x=F} \dots (34)$$

$$\varepsilon'_F = \left. \frac{d\varepsilon}{dx} \right|_{x=F} \dots (35)$$

である。

2. $x = 0$ における水位の連続条件

$$\eta_I = \eta_{II} \dots (36)$$

式 (24), (28) より次式が得られる。

$$A_i + A_r = -\frac{h\sqrt{1 - i\varepsilon/\omega}}{\omega} (A_1 - A_2) \dots (37)$$

3. $x = 0$ における運動量の連続条件

$$U_I = U_{II} \dots (38)$$

式 (25), (29) より次式が得られる。

$$A_i - A_r = \frac{h\lambda_\omega}{\omega} (A_1 + A_2) \dots (39)$$

式 (31), (37) と (39) を連立させて整理すると次式が得られる。

$$\frac{A_r}{A_i} = \frac{\sqrt{1 - i\frac{\varepsilon}{\omega}} - 1 + \left(\sqrt{1 - i\frac{\varepsilon}{\omega}} + 1 \right) \mu_2}{\sqrt{1 - i\frac{\varepsilon}{\omega}} + 1 + \left(\sqrt{1 - i\frac{\varepsilon}{\omega}} - 1 \right) \mu_2}$$

$$\frac{\exp\left(-i2\lambda_\omega F \sqrt{1 - i\frac{\varepsilon_F}{\omega}}\right)}{\exp\left(-i2\lambda_\omega F \sqrt{1 - i\frac{\varepsilon}{\omega}}\right)} \dots (40)$$

反射率 K_r は次のように表されるので、式 (40) から求められることになる。

$$K_r = |A_r/A_i| \dots (41)$$

まず、式 (19) で表された線形の吸収関数と、次式の吸収係数を用いて反射率を求めることにする。

$$\varepsilon_m = \theta \sqrt{g/h} \dots (42)$$

いま、疑似定数 ε が式 (43) を満たすように定義すると、式 (44) を得る。

$$\int_0^F \lambda[\varepsilon(x)] dx = \int_0^F \lambda(\bar{\varepsilon}) dx \dots (43)$$

$$\sqrt{1 - i\bar{\varepsilon}/\omega} = i \frac{2\omega}{3\varepsilon_m} [(1 - i\varepsilon_m/\omega)^{3/2} - 1] \dots (44)$$

$\bar{\varepsilon}$ を単に吸収関数の平均値と定義したときの、 K_r と F/L_1 の関係を図-4 に示す。数値計算の結果と比較すると、図-3 より良好な結果となっている。この $\bar{\varepsilon}$ の定義を他の吸収関数の関数形にも用いた。

図-5 と図-6 は、それぞれ放物線型と双曲線型の吸収関数を用いたときの K_r と F/L_1 の関係を示したものである。図-6 で、 $r=3$ のときに、全体を通して最も良いエネルギー吸収を示すが、この値は次節で述べる数値シミュレーションを数回繰り返して求めたものである。一般に L_1 に比べて吸収帯の幅 F が短いほど K_r は大きくなる。さらに、ある F/L_1 に対して K_r がある値を越えないような係数 θ の範囲が存在する。全体としてみると双曲線型の吸収関数が最も良い吸収特性を持っている。

5. 非線形波の反射率—数値計算

式 (2), (3) を用いて、水平床上での非線形波の伝播の数値シミュレーションを行った。入射波を沖側境界で与え、岸側境界にエネルギー吸収帯を設け Sommerfeld の放射条件 (式 (1)) を満足させた。吸収帯の幅 F

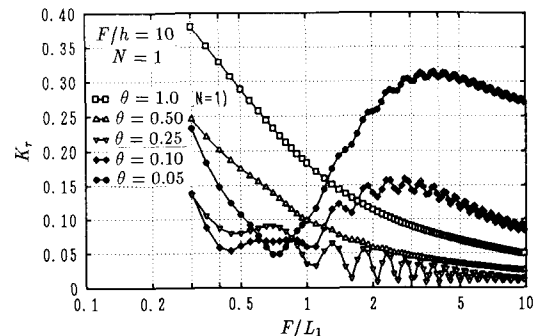


図-3 線形波での反射率 (波速を補正)

と F/h は固定して、波の周期を変化させた。反射率 K_r は、計算域の中での波形の包絡線から Healy の方法を使って求めている。

図-7 は、線形分布する吸収関数を使った場合の種々の θ の値に対する K_r と F/L_1 の関係を示す。図-8 は放物線型の、図-9 は双曲線型の吸収関数を用いた結果を示す。前節で述べたように、図-9 では $r=3$ としている。

図-7, 9 の結果は線形波としての解析結果と同様になった。波長に対して吸収帯の幅が短ければ、 θ を大きくすると K_r が大きくなる。このことは過大なエネルギーの吸収によって逆に反射が引き起こされることを示している。波長に対して吸収帯の幅が長ければ、実際の波速と

仮定された長波の波速との差によって反射が起きても、エネルギー吸収によってこの反射を減少させることができる。しかし、さらにより大きなエネルギー吸収係数とすると、 K_r は増加し始める。

図-10 は 3 種類の関数形に対する θ と最大反射率 $K_{r\max}$ との関係を示している。 $K_{r\max}$ は、 F/L_1 が図中に示される範囲にある場合に得られた最大の K_r として定義される。全ての関数形で、エネルギー吸収帯の幅が長いときに $K_{r\max}$ が小さくなっている。 θ の最適範囲は、双曲線型で最も広く、この特性は深海波のシミュレーションをする際に有効である。ここで得られた θ の最適値を以下に示す。

放物線型吸収関数：

$$K_{r\max} \leq 0.03 : \quad \theta = 0.10 \sim 0.25 \quad F/L_1 \geq 1.0$$

$$K_{r\max} \leq 0.03 : \quad \theta = 0.05 \sim 0.60 \quad F/L_1 \geq 2.0$$

双曲線型吸収関数：

$$K_{r\max} \leq 0.03 : \quad \theta = 0.15 \sim 0.40 \quad F/L_1 \geq 1.0$$

$$K_{r\max} \leq 0.01 : \quad \theta = 0.20 \sim 5.00 \quad F/L_1 \geq 2.0$$

6. 適用結果

図-11 は、浅海域を伝播する非線形波の空間波形を示す。放物型の吸収関数を持つエネルギー吸収帯を岸側に設けて、方程式 (2), (3) を領域の外に向かう波 ($\eta - \eta_{\text{incident}}$) と ($U - U_{\text{incident}}$) にのみ適用した。沖側境界

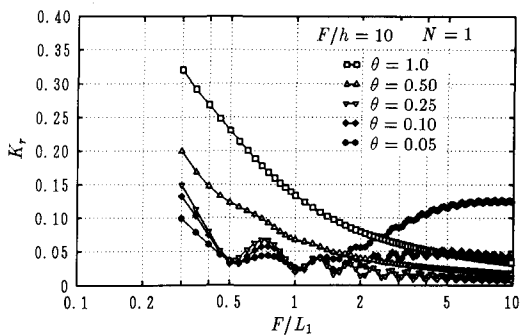


図-4 線形波での反射率 (線形の吸収関数)

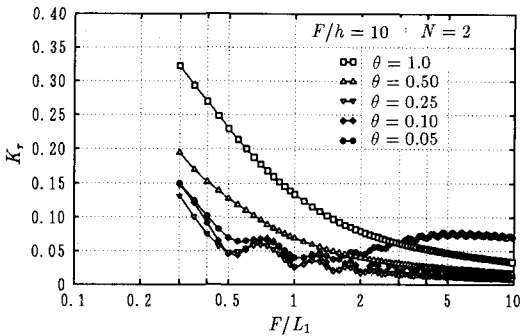


図-5 線形波での反射率 (放物線の吸収関数)

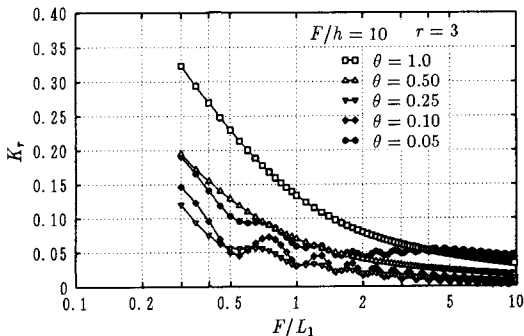


図-6 線形波での反射率 (双曲線型の吸収関数)

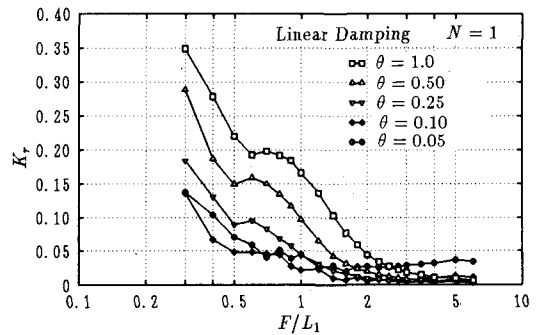


図-7 非線形波での反射率 (線形の吸収関数)

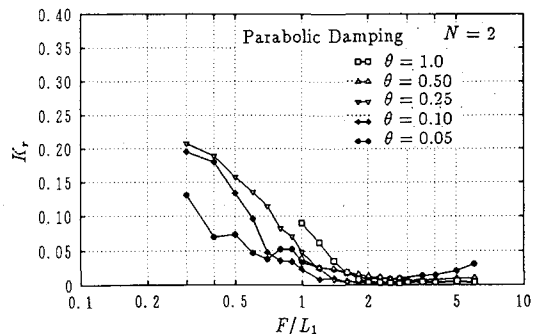


図-8 非線形波動方程式に対する無反射境界条件について

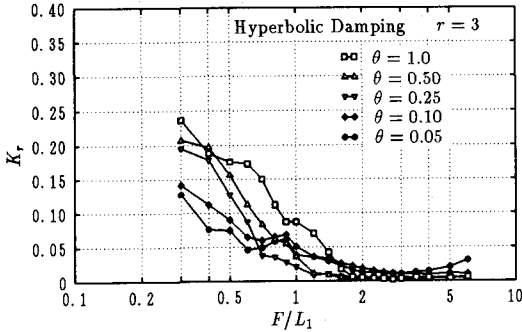


図-9 非線形波での反射率 (双曲線型の吸収関数)

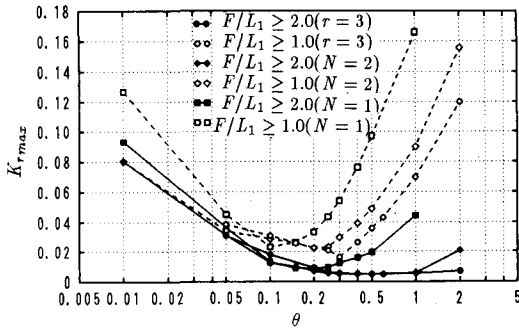


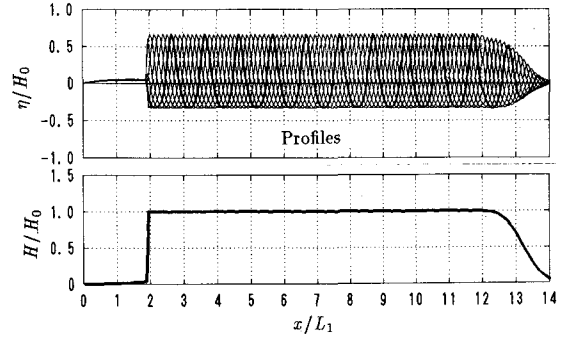
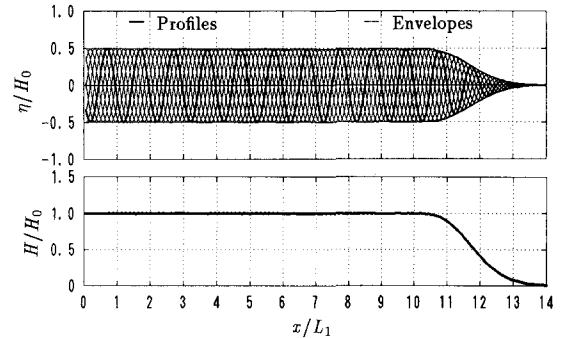
図-10 反射率の最大値

上での差分手法は石井ら (1992) によっている。得られた空間波形はクノイド波と一致しており, K_r は3%以下であった。

図-12 は, 深海域における数値シミュレーション結果を示している。沖側には吸収帯を設けていないが, 岸側には長い吸収帯を設けている。このときの波形は正弦曲線であり, 吸収関数には双曲線型を用いた結果, $K_r=1.5\%$ であった。

7. 結 論

開境界にエネルギー吸収帯を設置し, その内部で線形または非線形波動方程式に減衰項 εU を導入することにより, 吸収係数, 吸収関数やこれらに関連する係数値を適当に選べば, 数値シミュレーションにおいて十分な放射条件を実現することが可能である。

図-11 浅海域における非線形波の空間波形及び波形包絡線 ($h/L_0=0.02$, $H_0/h=0.1$, $F/L_1=2.0$, $\theta=0.4$)図-12 深海域における線形波の空間波形及び波形包絡線 ($h/L_0=0.51$, $H_0/gT^2=0.001$, $F/L_1=4.0$, $\theta=5.0$)

非線形および線形波の両方に対して, 双曲線型の吸収関数は吸収特性が良好で, 広い範囲ではほぼ一定の最適減衰係数を持っている。

参 考 文 献

- 石井敏雄・磯部雅彦・渡辺晃 (1992): 非定常緩勾配不規則波動方程式における波の入射境界条件の改良, 土木学会学術講演会講演概要集, 第47巻, 第2部, pp. 1022-1023.
- Eric Cruz・芝和彦・磯部雅彦・渡辺晃 (1992): 透過潜堤による平面二次元非線形波浪変形の計算法, 海岸工学論文集, 第39巻, pp. 621-625.
- Ohyama T., Nadaoka K. (1991): Development of a numerical wave tank for analysis of nonlinear and irregular wave field, Fluid Dynamics Research, 8, pp. 231-251.