

非定常緩勾配不規則波動方程式における 境界条件の改良と実用化の試み

石井 敏雅*・磯部 雅彦**・渡辺 晃**

1. はじめに

非定常緩勾配不規則波動方程式は、緩勾配方程式において周波数の関数となる係数を周波数に対してテイラー展開し、係数を成分波の周波数によらない一定値で近似することにより、不規則波の時間変動を直接解けるようにしたものである。1次近似のテイラー展開による式が窪ら(1991)によって、2次近似による式が小竹ら(1992)によって求められている。また、平面2次元場において1次近似の非定常緩勾配不規則波動方程式を用いた突堤および離岸堤周辺の多方向不規則波浪場の計算が窪ら(1992)によって行われている。しかし、窪らの計算では、開境界条件の処理に必要なエネルギー吸収帯の幅が多くなり、全計算領域に占めるエネルギー吸収帯の割合が多くなること、また、エネルギー吸収帯内にあるすべての格子点から波を入射しているため、入射波の計算に多くの計算を要するといった問題点が残されていた。

そこで、本研究においては、より少ない記憶容量と計算時間で効率的な多方向不規則波の波浪変形計算が行えるように、波の入射境界条件と開境界条件について詳細に検討し、改良を加えた。また、その結果を用いて実務でしばしば生じる離岸堤周辺の波浪変形・海浜流・地形変化の計算を行った。

2. 1次近似非定常緩勾配不規則波動方程式の概要

窪ら(1991)が示した1次近似の非定常緩勾配不規則波動方程式は次式のとおりである。

$$\nabla(\bar{\alpha} \nabla \bar{\eta}) + i \nabla \left[\bar{\beta} \nabla \left(\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} \right) \right] + \bar{k}^2 \bar{\alpha} (1 + i f_D) \bar{\eta} + i \bar{\gamma} (1 + i f_D) \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$\bar{\alpha} = \bar{C} \bar{C}_g \quad (2)$$

$$\bar{\beta} = \frac{\bar{C}}{\bar{k}} \left[-2(1 - \bar{n}) + \frac{1}{2\bar{n}}(2\bar{n} - 1) \cdot \{1 - (2\bar{n} - 1) \cosh 2\bar{k}d\} \right] \quad (3)$$

$$\bar{\gamma} = \bar{k} \bar{C} \left[2\bar{n} + \frac{1}{2\bar{n}}(2\bar{n} - 1) \{1 - (2\bar{n} - 1) \cosh 2\bar{k}d\} \right] \quad (4)$$

$$\bar{n} = (1/2)(1 + 2\bar{k}d / \sinh 2\bar{k}d) \quad (5)$$

ここに、 $\bar{C}$ は波速、 $\bar{C}_g$ は群速度、 $\bar{k}$ は波数、 d は水深、 t は時間、 ∇ は水平2方向の微分演算子、 i は虚数単位、 f_D はエネルギー吸収係数であり、 $\bar{\omega}$ は代表角周波数 $\bar{\omega}$ に対する諸量であることを示す。また、 $\bar{\eta}$ は水面変動 η と次式の関係にある。

$$\eta = \text{Re} \{ \bar{\eta} e^{-i\bar{\omega}t} \} \quad (6)$$

3. 入射境界条件の改良

(1) 従来の入射境界条件(境界帯入射法)

非定常緩勾配不規則波動方程式を用いて多方向不規則波の波浪変形を計算する場合、多方向不規則波は沖側境界と側方境界から入射するが、これらの開境界では波の計算領域への入射とともに、計算領域の外側に向う波(以下では放出波とよぶ)が反射せずに透過することが必要である。この方法として窪ら(1992)が用いていた方法が図-1に示す境界帯入射法で、計算対象領域の周りにエネルギー吸収帯を設け、放出波を十分に吸収させて消去してしまうとともに、入射波はエネルギー吸収帯内にある格子点に強制外力的に入力する方法である。この方法では、放出波がエネルギー吸収帯で完全に消去され、沖側端や側方端では入射波のみとなるようにエネルギー吸収帯の幅を十分な長さに設定するため、多くの格子点に入射波を与えなければならない。多方向不規則波は入射点毎に規則波を合成して作成するため、境界帯入射法では入射波作成にかなり多くの記憶容量と計算時間が必

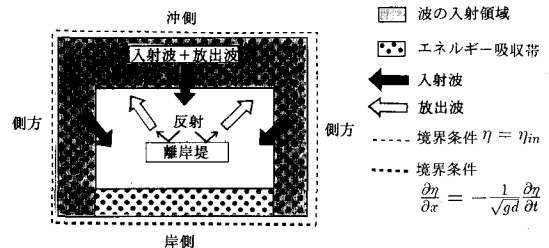


図-1 境界帯入射法概念図

* 正会員 東京大学大学院社会人コース、東京電力(株)
** 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科

B～E 領域についても図-3 に従い、同様な操作を行うことにより入射波項を差分式中に導入し、これを解くことにより波を入射することができる。

x 方向の場合の図-3 と対称の位置では図-3 の黒塗りの点と白抜きの点を逆に置き換えて考えればよく、ADI 法の y 方向の計算の場合は、図-3 の $t+1$ 時点と $t-1$ 時点の 2 重丸の点を置き換えて考えればよい。

4. 開境界条件の改良

(1) 1次元の開境界条件

窪ら (1992) の境界帯入射法を用いた計算では、エネルギー吸収帯の外側に設けられた仮想の境界において、図-1 に示するような境界条件が用いられていた。すなわち、沖側と側方の境界では、放出波はエネルギー吸収帯により完全に消去され、水面変位は入射波の水面変位に等しいという条件であり、岸側境界では、大山ら (1990) のように波速 C に長波近似式を適用した 1 次元の Sommerfeld 型境界条件である。このため、窪ら (1992) のように水深の浅い海域に離岸堤がある場合には、沖側で放出波を完全に消去するために幅の広いエネルギー吸収帯が必要となった。水深の比較的深い海域を対象とした計算の場合は、側方境界、岸側境界でも幅の広いエネルギー吸収帯が必要となる。そこで、本研究では、Sommerfeld 型境界条件にも角周波数と波向に対するテイラー展開を適用することにより、多方向不規則波に対する開境界条件を新たに導き、エネルギー吸収帯の幅を縮小できるようにした。この境界条件の 1 次元の場合の式を示すと、次式のとおりである。

$$\begin{aligned} & \eta(x_b, t + \Delta t) \\ &= \eta(x_b - \bar{C}\Delta t, t) + \bar{C}(1 - \bar{n})\Delta t \\ & \cdot \left[\frac{\partial \eta(x_b - \bar{C}\Delta t, t)}{\partial x} - i\bar{k}\eta(x_b - \bar{C}\Delta t, t) \right] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 $\eta(x_b, t + \Delta t)$ は、時刻 $t + \Delta t$ の仮想境界の座標 x_b における水面変位、 $\bar{C}$ 、 $\bar{n}$ 、 $\bar{k}$ は、各々、代表角周波数の波の波速、波速と群速度の比、波数である。式(9)は、Sommerfeld 型境界条件の波速 C を代表角周波数の周りにテイラー展開し、角周波数によらず一定値となる係数のみとし、不規則波に適用可能としたものである。式(9)の概念図を示すと図-4 のようになる。すなわち、この境界条件式の右辺第 1 項は、 t 時点において、境界より微小距離 $\bar{C}\Delta t$ 内側にある波が Δt 時間後には仮想境界に進んできて、仮想境界での水面変位となることを示している。一方、右辺第 1 項中の $\bar{C}$ は代表角周波数の波の波速であるのに対し、不規則波は様々な角周波数の規則波の合成であるため、不規則波の波速は $\bar{C}$ とは異なってくる。左辺第 2 項以下はこの差異に対する仮想境界での水面変位の位相の補正を表わしたものである。すなわち、図-4 中の次式

$$\eta_n(x_b - \bar{C}\Delta t, t) + (C_n - \bar{C})\Delta t \frac{-\partial \eta_n(x_b - \bar{C}\Delta t, t)}{\partial x} \dots\dots\dots (10)$$

の第2項中の C_n を以下に述べるようにテイラー展開して変形することにより式(9)が得られる。まず、 C_n を代表角周波数の周りに1次までテイラー展開すると、

$$C_n = \bar{C} + \left(\frac{d\bar{C}}{d\omega} \right) \Delta\omega_n \dots\dots\dots (11)$$

となる。また、 $\eta_n(x, t) = a_n e^{i(k_n x - \omega_n t)}$ とし、 x について偏微分するとともに、 k_n を代表角周波数の周りに 1 次までテイラー展開すると、

$$\frac{\partial \eta_n(x - \bar{C}\Delta t, t)}{\partial x} = i(\bar{k} + \Delta k_n) \eta_n(x - \bar{C}\Delta t, t) \quad \dots\dots\dots (12)$$

となる。さらに、

$$\left(\overline{\frac{dC}{d\omega}}\right) = \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{\bar{n}}\right) \dots\dots\dots (13)$$

$$\Delta\omega_n = \left(\frac{d\omega}{dk} \right) \Delta k_n = \bar{n} \bar{C} \Delta k_n \dots\dots\dots (14)$$

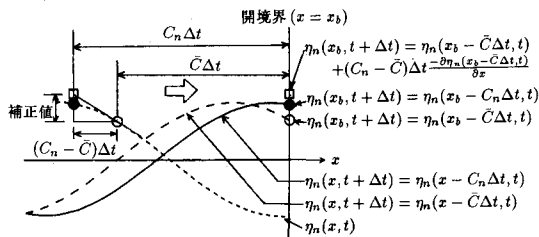
となることから式 (11) ~ 式 (14) を式 (10) の第 2 項に代入し、その結果得られる式の 2 次の微小項を無視すると次式となる。

$$\begin{aligned} & (C_n - \bar{C}) \Delta t \frac{-\partial \eta_n(x - \bar{C} \Delta t, t)}{\partial x} \\ & = i \bar{C} (1 - \bar{n}) \Delta t \Delta k_n \eta_n(x - \bar{C} \Delta t, t) \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

ここで、式 (12) を変形することにより得られる次式

$$i\Delta k_n \eta_n(x - \bar{C}\Delta t, t) = \frac{\partial \eta_n(x - \bar{C}\Delta t, t)}{\partial x} - i\bar{k} \eta_n(x - \bar{C}\Delta t, t) \quad \cdots (16)$$

を式 (15) に代入すると、全ての係数が成分波の角周波数と無関係に代表角周波数のみによって決定されるようになり、成分波を重ね合わせると式 (9) の右辺第 2 項が得られることになる。大山ら (1990) のように、式 (9) と計算対象領域の外側に向かってエネルギー吸収係数 f_0 を直線的に増加させたエネルギー吸収帯を組み合わせることで開境界条件とするが、ここでエネルギー吸収帯の幅と式 (9) の波速 $\bar{C}$ は、不規則波に適用する場合、次のように設定する。エネルギー吸収帯の幅 B は、数値計算による検討の結果、波長 L の波に対し、エネルギー吸収帯の流体抵抗による反射が急増しはじめる幅が



図一4 改良した Sommerfeld 型境界条件の概念図

おおよそ $0.6L$ であることから不規則波の成分波の最も長い波長を L_1 として $B=0.6L_1$ とする。また、波速 $\bar{C}$ については、エネルギー吸収帯での吸収が最も少なく、境界端に達するエネルギーが大きい波、すなわち波長 L_1 の波の波速とした。これは、波速 C を最も波長の長い波の角周波数の周りにテイラー展開したことになる。このようにして設定した開境界条件の反射率の周期特性を計算した結果を図-5に示す。計算条件としては、水深 10 m で代表周期 6 s、波長の最も長くなる波の代表角周波数からの偏差 $\omega_i/\bar{\omega}$ は 0.5 とし、12 s 以下の周期の波を成分波とする不規則波を想定し、各周期の規則波の反射率を求めたものである。図-5には参考として $B/L < 0.6$ の波の反射率も示してある。境界端のエネルギー吸収係数の最大値を適切に設定すれば、反射率は十分に小さくなることがわかる。この境界条件により従来の境界帯入射法では波長 L の規則波に対し、 $2L$ の幅の長さが必要であったエネルギー吸収帯の長さを短くすることができるようになった。

(2) 2次元の開境界条件

平面 2 次元の場合は、角周波数のテイラー展開による近似の他に波向角を代表波向の周りにテイラー展開することによる近似を行う。1次元の場合の式 (9) を第 n 成分波について考え、平面 2 次元に拡張すると次式のようになる。

$$\begin{aligned} \eta_n(x, y, t + \Delta t) &= \eta_n(x - \bar{C}\Delta t \cos \theta_n, y - \bar{C}\Delta t \sin \theta_n, t) \\ &+ \bar{C}(1 - \bar{n})\Delta t \cos \theta_n \\ &\cdot \frac{\partial \eta_n(x - \bar{C}\Delta t \cos \theta_n, y - \bar{C}\Delta t \sin \theta_n, t)}{\partial x} \\ &+ \bar{C}(1 - \bar{n})\Delta t \sin \theta_n \\ &\cdot \frac{\partial \eta_n(x - \bar{C}\Delta t \cos \theta_n, y - \bar{C}\Delta t \sin \theta_n, t)}{\partial y} \\ &- i\bar{C}(1 - \bar{n})\Delta t k \eta_n \\ &(x - \bar{C}\Delta t \cos \theta_n, y - \bar{C}\Delta t \sin \theta_n, t) \cdots \cdots (17) \end{aligned}$$

この式中の $\Delta t \cos \theta_n$ と $\Delta t \sin \theta_n$ について成分波の波向角 θ_n を代表波向角の周りに $\theta_n = \bar{\theta} + \Delta\theta_n$ とテイラー

展開し、加法定理を用いて展開した後、2次の微小項を無視すると、

$$\Delta t \cos \theta_n = \Delta t \cos \bar{\theta} \cdots \cdots (18)$$

$$\Delta t \sin \theta_n = \Delta t \sin \bar{\theta} \cdots \cdots (19)$$

となる。式 (18)、式 (19) を式 (17) に代入すると係数が角周波数と波向によらず、一定となり、これを重ね合わせるにより平面 2 次元の場合の Sommerfeld 型境界条件式を改良した開境界条件が得られる。ここで、代表波向角 $\bar{\theta}$ は、時間ステップ毎に仮想境界の格子点における x, y 方向の水面変位の傾きから次式によって求める。

$$\bar{\theta} = \tan^{-1} \left(\frac{\partial \eta(x, y, t) / \partial y}{\partial \eta(x, y, t) / \partial x} \right) \cdots \cdots (20)$$

5. 波浪・海浜流・地形変化の計算

これまで示してきた境界条件を用いて、シングルサメイション法により作成した 958 成分から成る多方向不規則波を入射した場合の離岸堤周辺の波高分布を求め、この結果を用いて海浜流速分布、地形変化を計算し、規則波を入射した場合の結果と比較した。海浜流と地形変化の計算方法は、窪ら (1992) と同じ方法を用いている。

図-6は沖側の水深が 3.5 m、岸側の水深が 0.2 m となる平行等深線地形において、多方向不規則波 ($(H_{1/3})_0 = 1$ m, $T_{1/3} = 6$ s) を沖波の主波向が 0° で離岸堤に直角に入射した場合の波高分布であり、図-7はこれと等しいエネルギーの規則波 ($H_0 = 0.7064$ m, $T = 6$ s) を離岸堤に直角に入射した場合である。規則波では、離岸堤前面に明確な腹と節が形成されるのに対し、多方向不規則波では、離岸堤直前を除いて波高変化が小さくなっている。これは、多方向不規則波が様々な方向と周波数の成分波よりなるため、これらの成分波に対する節・腹の位置がずれるためである。また、多方向不規則波の波高分布では、窪ら (1992) の計算結果にみられたような離岸堤前面での水面変動の標準偏差の統計的なばらつきによる不自然な波高の値はなくなっている。図-8と図-9は、これらの波浪条件における海浜流場の計算結果である。全体的な流況はほぼ同じ傾向を示すが、多方向不規則波では等エネルギー波よりも流速が小さくなる。これは、不規則波では等エネルギー波よりも砕波点が沖側に位置し、砕波帯が広いことと不規則波では砕波点が個々の波でずれるため、砕波点付近の radiation stress の変化が緩やかとなり、流速の分布が平滑化されることによる。また、離岸堤前面では反射波によって波高変化が大きく、radiation stress の変化も大きい流れは生じていない。これは、砕波によるエネルギー逸散がないために radiation stress の勾配と平均水位がつりあうためである。図-10は、多方向不規則波について図-6の波浪場と図-8の海浜流場を準定常的な外力条件として 24 時間後の地形変化を計算したものである。図-11は等エネルギー波につ

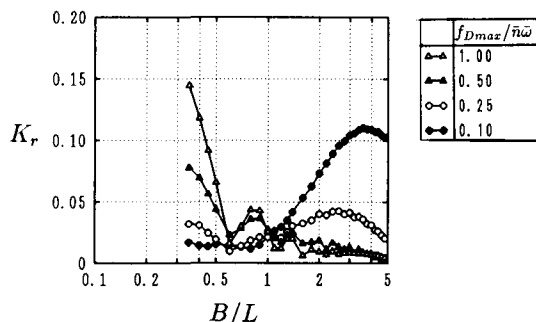


図-5 改良した開境界条件の反射率の周期特性

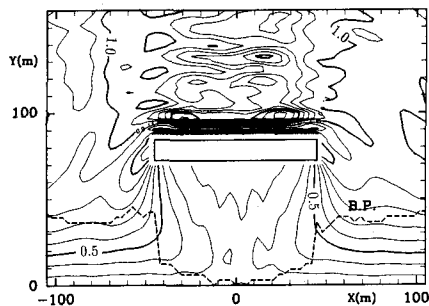


図-6 波高分布 (多方向不規則波)

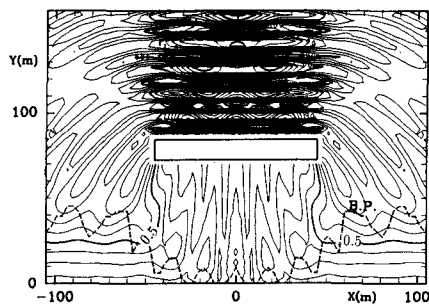


図-7 波高分布 (等エネルギー波)

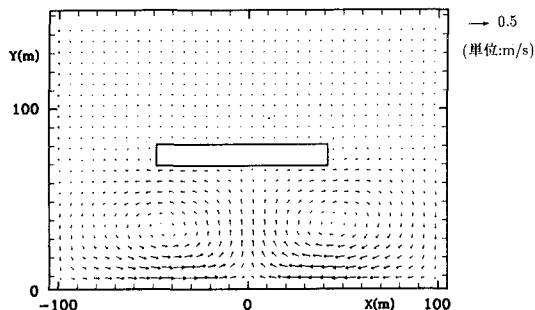


図-8 海浜流速分布 (多方向不規則波)

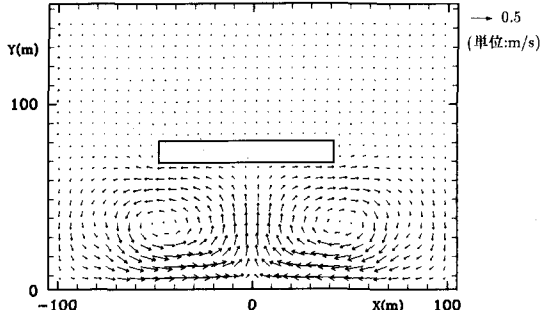


図-9 海浜流速分布 (等エネルギー波)

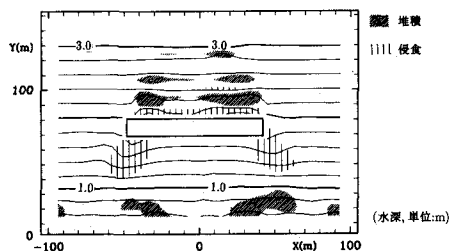


図-10 24時間後の地形変化 (多方向不規則波)

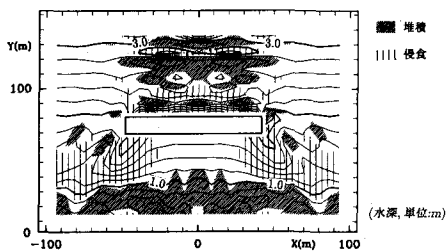


図-11 24時間後の地形変化 (等エネルギー波)

いて同様の計算を行ったものである。これらの図を比較すると不規則波による地形変化は、等エネルギー波による地形変化よりも小さいことがわかる。これは、不規則波は、波高が平滑化されて小さいため、底面波動流速が小さくなることと不規則波のほうが海浜流速が小さくなるためである。

6. おわりに

非定常緩勾配不規則波動方程式を用いた多方向不規則波の波浪変形計算をより少ない計算時間と記憶容量で効率的に行うために入射境界条件と開境界条件について検討し、境界線入射法と Sommerfeld 型放射条件を改良した境界条件を提案した。また、これらの境界条件を用いて多方向不規則波の波高分布を計算し、その結果を用いて海浜流、地形変化についても計算を行い、規則波の結

果と比較した結果、多方向不規則波と規則波では、各々の計算結果に無視できない差異が生じることが確認された。

参考文献

- 窪 泰浩・小竹泰夫・横木裕宗・磯部雅彦・渡辺 晃 (1992): 非定常緩勾配不規則波動方程式を用いた波浪場・海浜流場・海浜地形変化の予測モデル: 第39回海岸工学論文集, pp. 201-205.
- 小竹泰夫・磯部雅彦・渡辺晃 (1992): 非定常緩勾配不規則波動方程式の高精度化: 第39回海岸工学論文集, pp. 91-95.
- 窪泰浩・小竹泰夫・磯部雅彦・渡辺晃 (1991): 非定常緩勾配不規則波動方程式について: 第38回海岸工学論文集, pp. 46-50.
- 大山 巧・灘岡和夫 (1990): 数値波動水槽における開境界処理のための数値消波フィルターの開発: 第37回海岸工学論文集, pp. 16-20.