

有理式近似に基づく非定常緩勾配不規則波動方程式

磯 部 雅 彦*

1. 序 論

海岸工学上の様々な問題において、浅海域における波浪の屈折・回折・碎波変形を予測することが必要となる。その際、特に波浪の不規則性は重要な役割を果たす。また最近、多方向不規則波の造波水槽が実験に用いられるようになってきているが、造波問題を含む波浪場の再現には不規則波の変形解析が欠かせない。

著者らはこのような解析に用いる目的で、非定常緩勾配不規則波動方程式を提案したが(窪ら, 1991, 1992; 小竹ら, 1992), 近似精度の点や高周波数成分を取り扱う際の計算時間の点でまだ問題が残されていた。灘岡・中川(1992)は同様な目的で Galerkin 法を用いた基礎方程式を提案しているが、これは連立偏微分方程式の解として、広帯域スペクトルを有する不規則波の時間変化を成分波に分離せずに計算する方法となる。

一般に、微小振幅波理論によれば深海波の波長が周波数の 2 乗に反比例することから、高周波数成分を含めて取り扱うためには計算格子間隔を非常に小さくする必要があり、これに応じて時間間隔も小さく取ると計算時間が膨大になるという問題がある。本研究では、より広い周波数帯域にわたる不規則波の変形を、精度良くしかも短い計算時間で計算するための基礎方程式を導き、それに基づく数値モデルを提案することを目的としている。特に、周波数帯域の分割および離散化誤差をあらかじめ考慮した定式化により、精度を保った上で格子間隔と時間間隔を従来よりも大きく取れるようにする。

2. 基礎方程式の誘導

(1) 有理式を用いた緩勾配方程式の近似

複素水面変動振幅 $\hat{\eta}$ を未知数として、緩勾配方程式(Berkhoff, 1972)は

$$\nabla(cc_g \nabla \hat{\eta}) + k^2 cc_g \hat{\eta} = 0 \quad (1)$$

と書ける。ここに、 c , c_g および k はそれぞれ波速、群速度および波数であり、 ∇ は水平 2 方向への微分作用素を表す。ここで、Radder (1979) による変数変換

$$\hat{\phi} = \hat{\eta} \sqrt{cc_g} \quad (2)$$

を用いれば、海底勾配の 1 次の精度の範囲内で次のヘルムホルツ方程式に書き直される。

$$\nabla^2 \hat{\phi} + k^2 \hat{\phi} = 0 \quad (3)$$

$\hat{\phi}$ は時間項 $e^{-i\omega t}$ (ω : 角周波数, t : 時間) を完全に分離した振幅であり、正弦的に変化する時間項を含む変数 ϕ は

$$\phi = \hat{\phi} e^{-i\omega t} \quad (4)$$

と表される。不規則波の取り扱いを念頭に置くと、ある代表的な角周波数 $\bar{\omega}$ によって振動成分を分離せざるを得ないので、それと成分波の角周波数 ω との差 ω' の分の振動が残ることになる。すなわち、

$$\phi = \hat{\phi} e^{-i\bar{\omega} t} \quad (5)$$

とおくと、 $\tilde{\phi}$ は

$$\tilde{\phi} = \hat{\phi} e^{-i\omega' t} \quad (6)$$

$$\omega' = \omega - \bar{\omega} \quad (7)$$

のように ω' に対応してゆっくりと振動する関数であり、このことが近似式を導くのに利用されるほか、後の数値計算で時間間隔を大きくとれる理由となる。

$\tilde{\phi}$ を用いてもヘルムホルツ方程式が成立つが、さらに碎波などによる減衰係数 f_D を用いて表されるエネルギー減衰項を含めると(磯部, 1986),

$$\nabla^2 \tilde{\phi} + k^2 (1 + i f_D) \tilde{\phi} = 0 \quad (8)$$

となる。

上式に含まれる係数は角周波数によって変化するため、このままの形で異なる角周波数成分を重ね合わせたものとしての $\tilde{\phi}$ を計算することはできない。そこで、以前の方法(窪ら, 1992; 小竹ら, 1993)をさらに進め、角周波数によらない係数 a_1 , b_0 , b_1 , b_2 , c_0 および c_1 を用いて上式の近似式とする。

$$\begin{aligned} \nabla^2 \tilde{\phi} - i a_1 \nabla^2 \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \right) + (b_0 + i c_0) \tilde{\phi} \\ + i (b_1 + i c_1) \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} - b_2 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

式(8)と(9)との対応において、まず数値計算の安定性の問題から、 k^2 に関連しては b_0 , b_1 および b_2 を用いた 2 次近似を用い、 $k^2 f_D$ に関連しては c_0 および c_1 を用いた 1 次近似としている。また、数値計算を効率的に行うために ADI 法が適用できるよう $\nabla^2 \tilde{\phi}$ の時間微分項は

1次とし、 $\tilde{\phi}$ の時間微分項よりも1次低くとしてある。なお以下では、近似すべき k^2 の関数形およびエネルギーを減衰させる条件から、上式の係数はすべて0以上となることを念頭においている。

今、解を

$$\tilde{\phi} = a \exp[i(\tilde{k}x \cos \theta + \tilde{k}y \sin \theta - \omega' t)], \quad (10)$$

のようにおいて式(9)に代入すれば、

$$-\tilde{k}^2 + a_1 \tilde{k}^2 \omega' + (b_0 + i c_0) + (b_1 + i c_1) \omega' + b_2 \omega'^2 = 0 \quad (11)$$

を得る。この関係式において、1) ω' を与えた場合に決定される $\tilde{k}^2$ が $\omega = \bar{\omega} + \omega'$ での厳密解に近くなること、および2) 任意の $\tilde{k}^2$ ($\tilde{k}$:実数)に対して時間的な発散解を含まない、すなわち必ず $\text{Im}\{\omega'\} \leq 0$ となること、の2つの条件から係数の値を決める。なお、式(11)を $\tilde{k}^2$ について解けば、

$$\tilde{k}^2 = \frac{b_0 + b_1 \omega' + b_2 \omega'^2}{1 - a_1 \omega'} \quad (12)$$

であり、式(9)による近似は k^2 を ω' の有理式で近似したことを意味している。

(2) 係数の制約条件

まず、発散解を含まないための条件を調べるために式(11)を ω' について解くと

$$\omega' = \{-(a_1 \tilde{k}^2 + b_1 + i c_1) \pm \sqrt{(a_1 \tilde{k}^2 + b_1 + i c_1)^2 - 4 b_2 (-\tilde{k}^2 + b_0 + i c_0)}\} / (2 b_2) \quad (13)$$

となる。 $\text{Im}\{\omega'\} \leq 0$ となるためには、第2項の $\sqrt{\quad}$ の虚数部分の絶対値が c_1 以下であればよい。 $\sqrt{\quad}$ の中の実数部および虚数部をそれぞれ X および Y とすれば、このための必要十分条件は

$$X \geq 0 \quad (c_1 = 0) \quad (14)$$

$$X \geq (Y/2c_1)^2 - c_1^2 \quad (c_1 > 0) \quad (15)$$

となる。この式に $\sqrt{\quad}$ 内の表示を代入し、任意の $\tilde{k}$ (実数)に対して成立するための条件を整理すれば、

$$b_1^2 - 4 b_0 b_2 \geq 0, \quad c_0 = 0 \quad (c_1 = 0) \quad (16)$$

$$\left(\frac{c_0}{c_1}\right)^2 - \left(\frac{b_1}{b_2}\right)\left(\frac{c_0}{c_1}\right) + \left(\frac{b_0}{b_2}\right) \leq 0 \quad (c_1 > 0) \quad (17)$$

を得る。これが係数の値に対する制約条件である。

$c_0 = c_1 = 0$ すなわち減衰のない場合に、 $a_1 = 0$ すなわち放物線によって k^2 を近似すると判別式が負となり、式(16)を満たさない。そこで $a_1 > 0$ とすることになるが、これにより式(16)の等号がちょうど成り立つように係数 a_1 、 b_0 、 b_1 および b_2 を決めることにする。すなわち

$$b_1 = 2\sqrt{b_0 b_2} \quad (18)$$

である。次に本来、代表角周波数での減衰係数 c_0 に対して、減衰係数の変化率は独立に決定されるべきものである。しかし、減衰係数の周波数依存性は不明確である。また、微小振幅波理論を用いている関係で碎波帯では先

鋭化した波形の再現は不可能であり、波のエネルギーなどの積分量をはじめとする特性値を予測することが目的となるから、当面 c_1 は安定条件からのみ決めることにする。式(18)のように b_0 、 b_1 および b_2 の関係を決めると、式(17)を満足する唯一の関係は

$$c_1 = (2b_2/b_1)c_0 \quad (19)$$

となる。

以上をまとめれば、式(16)および(17)が発散解を含まないための必要十分条件であるのに対し、以後で用いる式(18)および(19)は十分条件である。

(3) 差分式

k^2 を近似する係数値を決定する際に、離散化誤差の補正も含めることにより、精度の向上を図る。このため、1次元問題をとり上げ、ここで用いた中央差分に基づく差分式を示す。まず、

$$\tilde{\phi}(\mu \Delta x, \tau \Delta t) \equiv \phi_\mu \quad (20)$$

$$\tilde{\phi}(\mu \Delta x, (\tau-1) \Delta t) \equiv \phi'_\mu \quad (21)$$

$$\tilde{\phi}(\mu \Delta x, (\tau-2) \Delta t) \equiv \phi''_\mu \quad (22)$$

と記号を定義すると、添字 $F.D.$ で示される差分式は

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x^2} \Big|_{F.D.} = \frac{1}{3(\Delta x)^2} [(\phi_{\mu-1} - 2\phi_\mu + \phi_{\mu+1}) + (\phi'_{\mu-1} - 2\phi'_\mu + \phi'_{\mu+1}) + (\phi''_{\mu-1} - 2\phi''_\mu + \phi''_{\mu+1})] \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \right) \Big|_{F.D.} = \frac{1}{2\Delta t (\Delta x)^2} [(\phi_{\mu-1} - 2\phi_\mu + \phi_{\mu+1}) - (\phi''_{\mu-1} - 2\phi''_\mu + \phi''_{\mu+1})] \quad (24)$$

$$\tilde{\phi} \Big|_{F.D.} = \frac{1}{3} [\phi_\mu + \phi'_\mu + \phi''_\mu] \quad (25)$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \Big|_{F.D.} = \frac{1}{2\Delta t} [\phi_\mu - \phi''_\mu] \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2} \Big|_{F.D.} = \frac{1}{(\Delta t)^2} [\phi_\mu - 2\phi'_\mu + \phi''_\mu] \quad (27)$$

となる。これらを式(9)に代入して整理すれば、

$$A_\mu \phi_{\mu-1} + B_\mu \phi_\mu + A_\mu \phi_{\mu+1} = A'_\mu \phi'_{\mu-1} + B'_\mu \phi'_\mu + A'_\mu \phi'_{\mu+1} + A''_\mu \phi''_{\mu-1} + B''_\mu \phi''_\mu + A''_\mu \phi''_{\mu+1} \quad (28)$$

を得る。ここに、

$$A_\mu = \frac{1}{3(\Delta x)^2} - \frac{ia_1}{2\Delta t (\Delta x)^2} \quad (29)$$

$$A'_\mu = -\frac{1}{3(\Delta x)^2} \quad (30)$$

$$A''_\mu = -\frac{1}{3(\Delta x)^2} - \frac{ia_1}{2\Delta t (\Delta x)^2} \quad (31)$$

$$B_\mu = -\frac{2}{3(\Delta x)^2} + \frac{ia_1}{\Delta t (\Delta x)^2} + \frac{b_0}{3} + \frac{ib_1}{2\Delta t} - \frac{b_2}{(\Delta t)^2} \quad (32)$$

$$B'_\mu = \frac{2}{3(\Delta x)^2} - \frac{b_0}{3} - \frac{2b_2}{(\Delta t)^2} \dots\dots\dots (33)$$

$$B''_\mu = \frac{2}{3(\Delta x)^2} + \frac{ia_1}{\Delta t(\Delta x)^2} - \frac{b_0}{3} + \frac{ib_1}{2\Delta t} + \frac{b_2}{(\Delta t)^2} \dots\dots\dots (34)$$

である。

無反射境界条件は、本来の計算領域の外側にエネルギー吸収帯を設けることによって実現することにする。このとき、本来の計算領域内ではすべての波を含み、エネルギー吸収帯では入射波の部分を除いた波の部分の未知数とし、両者の間で入射波分の不連続をつけることにより、波を入射させる(石井ら, 1993)。したがって、 $\mu < \mu_B$ をエネルギー吸収帯、 $\mu \geq \mu_B$ を本来の計算領域とすると、 $\mu = \mu_B - 1$ における差分方程式は ϕ_{μ_B-2} 、 ϕ_{μ_B-1} 、 $\phi_{\mu_B} - \phi_{\mu_B}^{(in)}$ に対して成立し、 $\mu = \mu_B$ における差分方程式は $\phi_{\mu_B-1} + \phi_{\mu_B-1}^{(in)}$ 、 ϕ_{μ_B} 、 ϕ_{μ_B+1} に対して成立することになる。すなわち、

$$\begin{aligned} A_{\mu_B-1}\phi_{\mu_B-2} + B_{\mu_B-1}\phi_{\mu_B-1} + A_{\mu_B-1}\phi_{\mu_B} \\ = A'_{\mu_B-1}\phi'_{\mu_B-2} + B'_{\mu_B-1}\phi'_{\mu_B-1} + A'_{\mu_B-1}\phi'_{\mu_B} \\ + A''_{\mu_B-1}\phi''_{\mu_B-2} + B''_{\mu_B-1}\phi''_{\mu_B-1} + A''_{\mu_B-1}\phi''_{\mu_B} \\ + A_{\mu_B-1}\phi_{\mu_B}^{(in)} - A'_{\mu_B-1}\phi_{\mu_B}^{(in)} - A''_{\mu_B-1}\phi_{\mu_B}^{(in)} \dots (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{\mu_B}\phi_{\mu_B-1} + B_{\mu_B}\phi_{\mu_B} + A_{\mu_B}\phi_{\mu_B+1} \\ = A'_{\mu_B}\phi'_{\mu_B-1} + B'_{\mu_B}\phi'_{\mu_B} + A'_{\mu_B}\phi'_{\mu_B+1} \\ + A''_{\mu_B}\phi''_{\mu_B-1} + B''_{\mu_B}\phi''_{\mu_B} + A''_{\mu_B}\phi''_{\mu_B+1} \\ - A_{\mu_B}\phi_{\mu_B-1}^{(in)} + A'_{\mu_B}\phi_{\mu_B-1}^{(in)} + A''_{\mu_B}\phi_{\mu_B-1}^{(in)} \dots (36) \end{aligned}$$

である。

(4) 係数の決定法

式(23)～(27)の差分式に式(10)の解の形を代入すると

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x^2} \Big|_{F.D.} = \alpha_2 \beta_0 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x^2} \dots\dots\dots (37)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \right) \Big|_{F.D.} = \alpha_2 \beta_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \right) \dots\dots\dots (38)$$

$$\tilde{\phi} \Big|_{F.D.} = \beta_0 \tilde{\phi} \dots\dots\dots (39)$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \Big|_{F.D.} = \beta_1 \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \dots\dots\dots (40)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2} \Big|_{F.D.} = \beta_2 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2} \dots\dots\dots (41)$$

を得る。ここに、 α_2 、 β_0 、 β_1 および β_2 は差分化によって生じた係数であり、

$$\alpha_2 = \left\{ \left(\sin \frac{\bar{k}\Delta x}{2} \right) / \left(\frac{\bar{k}\Delta x}{2} \right) \right\}^2 \dots\dots\dots (42)$$

$$\beta_0 = (2/3) \cos \omega' \Delta t + (1/3) \dots\dots\dots (43)$$

$$\beta_1 = \{ (\sin \omega' \Delta t) / (\omega' \Delta t) \} \dots\dots\dots (44)$$

$$\beta_2 = \left\{ \left(\sin \frac{\omega' \Delta t}{2} \right) / \left(\frac{\omega' \Delta t}{2} \right) \right\}^2 \dots\dots\dots (45)$$

と表される。与えられた Δx および Δt に対し、これらは

1 よりも小さくなる。これが離散化誤差をもたらすため、式(9)の差分式は式(11)でなく、次の関係を与える。

$$\begin{aligned} -\alpha_2 \bar{k}^2 \beta_0 + \alpha_1 \alpha_2 \bar{k}^2 \beta_1 \omega' \\ + b_0 \beta_0 + b_1 \beta_1 \omega' + b_2 \beta_2 \omega'^2 = 0 \dots\dots\dots (46) \end{aligned}$$

なお、上式では減衰のない $c_0 = c_1 = 0$ について表示した。ここで制約条件式(18)を考慮して

$$\begin{aligned} b_2^* = 1/b_2, \quad \xi = \sqrt{b_0/b_2}, \quad a_1^* = a_1/b_2 \\ \dots\dots\dots (47), (48), (49) \end{aligned}$$

とおけば、これらの3つの独立なパラメタは、3つの異なる角周波数とそれに対応する波数の厳密解との組合せから決定される。それらを (ω'_l, k_l) ($l=1, 2, 3$) とすれば、

$$\begin{aligned} -b_2^* \alpha_2 k_l^2 \beta_0 + a_1^* \alpha_2 k_l^2 \beta_1 \omega'_l \\ + \xi^2 \beta_0 + 2\xi \beta_1 \omega'_l + \beta_2 \omega_l'^2 = 0 \quad (l=1, 2, 3) \dots (50) \end{aligned}$$

である。上の3元連立方程式は b_2^* と a_1^* に関して線形であるために、3つの式を用いてこれらの未知数を簡単に消去することができる。その結果、 ξ に関する2次方程式を得るが、そのうち正の解をとればよい。 ξ が求めれば、 b_2^* と a_1^* を経て b_2 、 b_0 、 a_1 および b_1 を容易に決定することができる。

(5) 砕波減衰係数

砕波減衰項は磯部(1986)と同様に評価する。すなわち、水面変動の振幅 $|\eta|$ に対して

$$\gamma = |\eta|/h \dots\dots\dots (51)$$

によって相対振幅を定義し、これが次式の γ_0 と等しくなったところが砕波点である。

$$\gamma_0 = 0.8 \times \gamma'_0 \dots\dots\dots (52)$$

$$\begin{aligned} \gamma'_0 = 0.53 - 0.3 \exp(-3\sqrt{h/L_o}) \\ + 5 \tan^{3/2} \beta \exp[-45(\sqrt{h/L_o} - 0.1)^2] \dots (53) \end{aligned}$$

砕波帯での減衰係数は次式で評価する。

$$f_D = \frac{5}{2} \tan \beta \sqrt{\frac{1}{k_{oh}}} \sqrt{\frac{\gamma - \gamma_r}{\gamma_s - \gamma_r}} \dots\dots\dots (54)$$

$$\gamma_s = 0.4 \times (0.57 + 5.3 \tan \beta) \dots\dots\dots (55)$$

$$\gamma_r = 0.135 \dots\dots\dots (56)$$

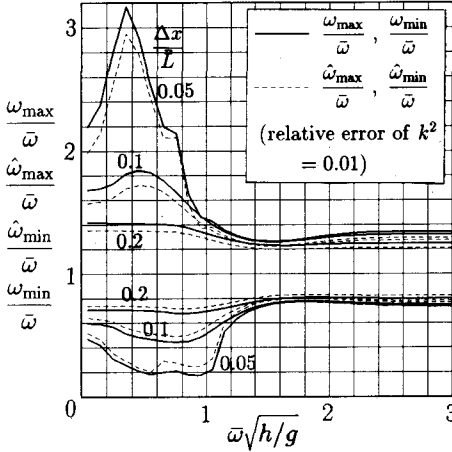
代表周波数における f_D の値から、 $c_0 = \bar{k}^2 f_D$ によって c_0 が決定される。また、前述のように、ここでは式(19)により c_1 を決定することにする。

(6) 境界条件

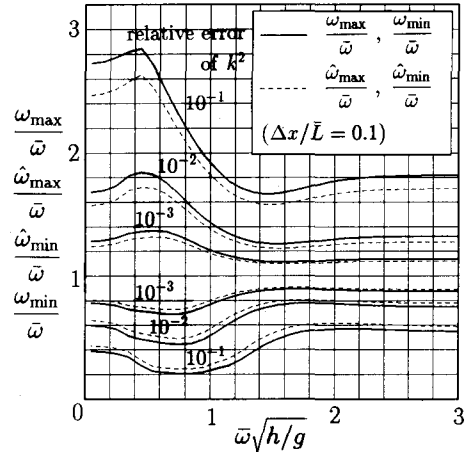
エネルギー吸収帯で十分に放出波のエネルギーが減衰されるならば、エネルギー吸収帯の外側の境界条件は任意である。しかし、ここでの反射が小さくなるようにしておけば、エネルギー吸収帯の幅を狭くすることができるために、計算効率がよい。ここでは、代表周波数の波に対する無反射境界条件を用いた。すなわち、

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} = \mp i \bar{k} \tilde{\phi} \dots\dots\dots (57)$$

であり、複号の上下が沖側・岸側に対応する。



図一 格子間隔別の k^2 の相対誤差が 1% となる角周波数範囲



図二 与えられた k^2 の相対誤差に対する角周波数範囲

(7) 水面変動の計算

基礎方程式と境界条件から計算された $\tilde{\phi}$ から水面変動に対応する $\tilde{\eta}$ を求める場合には、次式を用いれば数値的発散の心配なく高精度に計算できる。

$$\tilde{\eta} = d_0 \tilde{\phi} + id_1 \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} - d_2 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2} \dots (58)$$

ここに、差分式は式 (40) および (41) を用いることとし、係数の値は前と同様に差分化による補正係数も考慮して、3 種類の厳密値の組合せ $(\omega'_i, (1/\sqrt{cc_g})_i)$ ($i=1, 2, 3$) から、

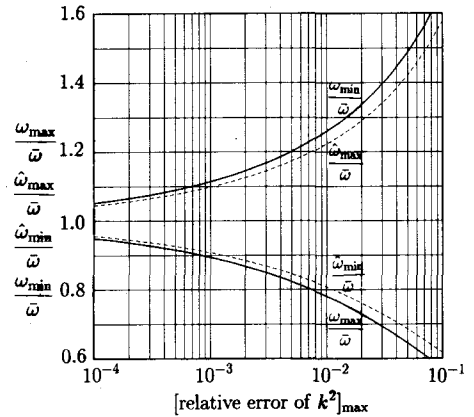
$$d_0 + d_1 \beta_1 \omega'_1 + d_2 \beta_2 \omega'^2_i = (1/\sqrt{cc_g})_i \dots (59)$$

によって定める。

3. 数値的検討

(1) 数値計算パラメタの検討

数値計算に際しては、所要の精度を保証するための格子間隔 Δx 、時間間隔 Δt 、代表角周波数 $\bar{\omega}$ 、式 (50) と (59) を適用する 3 種類の角周波数 ω'_i ($i=1, 2, 3$) を知る必要がある。その際、 $1/\sqrt{cc_g}$ は ω に対して一定値から比例関係に移移する関数となるため、式 (59) によって決まる係数による 2 次近似を用いれば広い範囲で高精度の近似となる。他方、 k^2 は ω の 2 次式から 4 次式に移移する関数であり、式 (50) によって決まる係数による有理式近似を用いてもなお所要の精度が得られる周波数範囲が限られる。これを具体的に調べるため、 $\bar{\omega}$ に対して $\bar{\omega}_{\min}$, $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}_{\max}$ ($\bar{\omega}_{\min} < \bar{\omega} < \bar{\omega}_{\max}$, $\omega'_1 = \bar{\omega}_{\min} - \bar{\omega}$, $\omega'_2 = 0$, $\omega'_3 = \bar{\omega}_{\max} - \bar{\omega}$) をとるとその区間での k^2 の相対誤差の最大・最小値が $\pm 1\%$ となるような $\bar{\omega}_{\min}$ と $\bar{\omega}_{\max}$ を計算し、さらにその場合に区間 $(\bar{\omega}_{\min}, \bar{\omega}_{\max})$ の外で相対誤差の絶対値が 1% となる $\omega_{\min}$, $\omega_{\max}$ を求めて $\bar{\omega}$ との比を表示したものが図一である。図中で横軸は、 $\bar{\omega}$ を水深 h と重



図三 k^2 の相対誤差に対する許容角周波数範囲

力加速度 g を用いて無次元化したものである。高周波数では、格子間隔波長比 $\Delta x/\bar{L}$ による差は小さく、係数決定の式において格子間隔による補正係数を考慮した効果が現れている。図二は格子間隔波長比を 0.1 に固定して、種々の許容相対誤差に対する角周波数範囲を表示したものであり、相対誤差が大きくなれば適用範囲が広がる様子を表している。そこで、この種の図の $\bar{\omega}\sqrt{h/g} = 1.4$ 付近に現れる最も狭い適用範囲を取り出し、それを許容相対誤差の関数として表示したものが図三である。この図より、所要の精度に対して適用可能な最大限の角周波数範囲がわかる。

その結果、不規則波に対しては、スペクトルの有効周波数帯域の広さによって 2~4 分割した周波数範囲ごとに変形計算を行い、結果を重ね合わせればよいことになる。

(2) 数値計算例

以上において誘導した基礎方程式に基づく数値モデルを用いて、まず規則波の浅水変形の計算を行った。図一 4 においては、 $(\bar{\omega}_{\min}, \bar{\omega}_{\max})/\bar{\omega} = (0.6, 1.4)$ とした場合に最

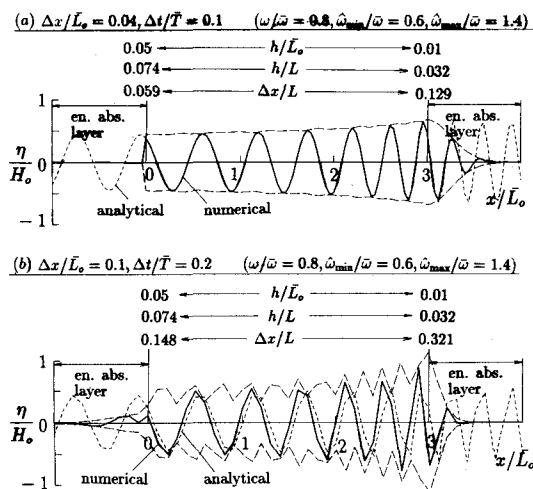


図-4 格子間隔と時間間隔による計算精度の違い

も精度が落ちる付近の $\omega = 0.8\bar{\omega}$ の角周波数の規則波を対象とし、 $\bar{\omega}$ での深海波長 L_0 に対する相対水深 h/L_0 が 0.05 から 0.01 に至る $3L_0$ 分の斜面での変形の計算結果が実線で示されている。(a) は相対格子間隔 $\Delta x/L_0 = 0.04$ 、および相対時間間隔 $\Delta t/T = 0.1$ と、本研究での手法に対しては十分に小さくとした場合である。この場合、浅水係数と数値積分による位相から計算した厳密解（点線）と、本手法の結果とは図上での差は現れない。(b) は $\Delta x/L_0 = 0.1$ および $\Delta t/T = 0.2$ と意識的に大きくしたために、実際の局所的な波長 L との関係では $\Delta x/L$ が 0.148 から 0.321 にもなってしまう、厳密解の表示でも折れ線が明瞭になってしまうにもかかわらず、波長・浅水係数ともに大きな差はないといえる。

(3) 実験結果との比較

最後に渡辺ら (1988) による不規則波の浅水砕波変形の実験結果と、本研究での数値モデルによる計算結果との比較を行った。計算では、総計 64 の成分波を 4 つの周波数帯に分割した。図-5 の上段は入射波の時間波形を表している。入射波の測定位置は水深 40 cm の水平床上であり、そこから 0.4 m の水平床、1 m の 1/10 勾配斜面、および 2.6 m の 1/30 斜面を経た測定点での時間波形が下段に示されている。実線が計算結果、点線が測定結果を示すが、計算開始時刻から図示されているため、計算では波が伝播するまでに 5 s 程度の時間を要していることがわかる。それ以降について両者の一致は良好であり、ここでの手法の有効性が確認できる。

4. 結 論

不規則波の屈折・回折・砕波変形を直接時系列的に行

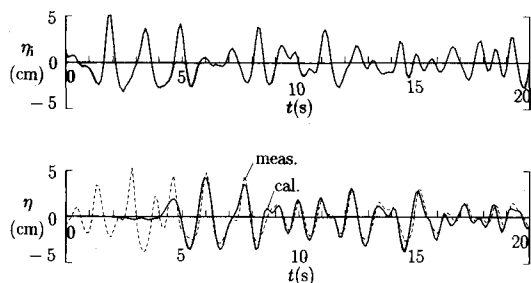


図-5 斜面上での不規則波の時間波形の計算値と実測値との比較

えるようにすることを目的として、緩勾配方程式において角周波数の関数となる係数を、角周波数の有理式に近似してモデル方程式を導いた。そして、方程式に含まれる係数について、理論的な数値不安定や差分化にともなう数値誤差を考慮して詳細に検討し、一般的な決定方法を示した。その結果、広い周波数範囲において高精度で波の屈折・回折・砕波変形計算ができるようになり、広帯域の不規則波に対しても周波数領域を 2 から 4 分割して重ね合わせるにより、精度よく計算が行えるようになり、さらに単一方向不規則波の場合についてその有効性が実験結果との比較により検証された。

参 考 文 献

- 石井敏雄・磯部雅彦・渡辺 晃 (1993): 非定常緩勾配不規則波動方程式における境界条件の改良と実用化の試み, 海岸工学論文集, 第 40 巻, pp. 31-35.
- 磯部雅彦 (1986): 放物型方程式を用いた不規則波の屈折・回折・砕波変形の計算法, 第 33 回海岸工学講演会論文集, pp. 134-138.
- 窪 泰浩・小竹康夫・磯部雅彦・渡辺 晃 (1991): 非定常緩勾配不規則波動方程式について, 海岸工学論文集, 第 38 巻, pp. 46-50.
- 窪 泰浩・小竹康夫・横木裕宗・磯部雅彦・渡辺 晃 (1992): 非定常緩勾配不規則波動方程式を用いた波浪場・海浜流場・海浜地形変化の予測モデル, 海岸工学論文集, 第 39 巻, pp. 201-205.
- 小竹康夫・磯部雅彦・渡辺 晃 (1992): 非定常緩勾配不規則波動方程式の高精度化, 海岸工学論文集, 第 39 巻, pp. 91-95.
- 灘岡和夫・中川康之 (1992): Galerkin 法に基づく強分散性波動方程式の基本特性に関する検討, 土木学会第 47 回年次学術講演会講演概要集 2, pp. 1024-1025.
- 渡辺 晃・磯部雅彦・泉宮尊司・中野英樹 (1988): 非定常緩勾配方程式による不規則波の浅水砕波変形の解析, 第 35 回海岸工学講演会論文集, pp. 173-177.
- Berkhoff, J. C. W. (1972): Computation of combined refraction-diffraction, Proc. 13th Int. Conf. on Coastal Eng., pp. 471-490.
- Radder, A. C. (1979): On the parabolic equation method for water-wave propagation, J. Fluid Mech., Vol. 95, pp. 159-176.