

緩勾配地形上の線形不規則波動場の支配方程式とその特性

後 野 正 雄*

1. 結 論

屈折、回折、反射、砕波を含む不規則な波の変形を求める方法は確立されたものがなく、現在様々な方法が提案され、あるいは、試みられている状況にある。

非定常解析を行うものに限ると、まず非定常緩勾配方程式を不規則波に適用できるように拡張した方程式が提案されている(窪ら, 1990; 小竹ら, 1991). 灘岡ら(1992)は4つの波で不規則波を表現できるブーシネスク型と類似した方程式をガラーキン法を用いて定式化している。

数値計算ではMAC法、強非線形ポテンシャルモデルによる研究があるが、3次元波動場の計算は、その実用化に時間がかかりそうである。

本研究はこれらの既往の研究とは異なる手法で非定常不規則な波動場に対する支配方程式を導出し、提案しようとするものである。本報告では、緩勾配の地形を仮定し、線形の波動場に対する場合の支配方程式を導き、一様水深場におけるその基本的な性質について検討を行なう。

2. 理 論

2.1 基礎方程式と境界条件

a) 変動圧力のラプラス方程式

静水面上に原点を置き、鉛直上向きに z 、水平面上に x 、 y 軸を取る。線形化された運動方程式をベクトル表示し、その発散を求め、連続式を用いると圧力 p に関する楕円型の方程式が得られる。ここで、変動圧力 $\bar{p}$ を

$$\bar{p} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) \dots \dots \dots (1)$$

と定義し、圧力 p に関する方程式を書き換えると、変動圧力 $\bar{p}$ に関する基礎式として次式のラプラス方程式を得る。

$$\Delta \bar{p} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

ここで、 p は圧力、 ρ は流体の密度、 g は重力の加速度、 Δ は3次元のラプラシアンである。

b) 境界条件

水面の位置を $z = \eta(x, y, t) = 0$ とした時、水面の力学

的境界条件は $p=0$ であるので、これを変動圧力 $\bar{p}$ を用いて書き換えると以下ようになる。

$$\bar{p} = g\eta \quad \text{at } z=0 \dots \dots \dots (3)$$

一方、水面の運動学的境界条件は、次式で与えられる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = w \quad \text{at } z=0 \dots \dots \dots (4)$$

ここで、 w は鉛直方向流速である。鉛直方向の運動方程式を用いて w を消去すると、水面変動 η に関する時間発展の方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \quad \text{at } z=0 \dots \dots \dots (5)$$

水底の境界条件は水底での法線方向流速(v_n)が $v_n=0$ となる。これを水底における法線方向の運動方程式に適用し、変動圧力 $\bar{p}$ を用いて書き換え、 x 、 y 、 z 座標系で表すと次式のようにになる。

$$\frac{1}{\sqrt{1+(\nabla h)^2}} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nabla \bar{p} \cdot \nabla h \right) = 0 \dots \dots \dots (6)$$

ここで ∇ は水平方向の微分演算子で、 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ で定義される。水底の勾配が十分に小さく、 $|\nabla h| \ll 1$ と考えられる緩勾配においては、式(6)は次式のようにになる。

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = 0 \dots \dots \dots (7)$$

結局、変動圧力 $\bar{p}$ を用いると、基礎式として $\bar{p}$ のラプラス式(2)、水面の境界条件として式(3)および(5)、水底の境界条件として式(7)が得られる。

これまでの理論の展開において渦無し流れの仮定を用いていない。しかし渦の影響は運動方程式の線形化の段階で無視されており、実質的には渦無し流れに対する理論と差異はない。

式(2)の3次元のラプラス方程式を解くためには大変な計算労力を必要とする。そこで、以下では式(2)を平面2次元の方程式に変換することを考える。

2.2 変動圧力の級数展開

a) 直交関数の選択

変動圧力 $\bar{p}$ の鉛直方向分布を直交関数を用いて級数表示することを考える。直交関数として、本論文では偶数次のルジャンドル多項式を用いる(例えば、森口他、

1960).

$$\bar{p} = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(x, y, t) P_{2(m-1)}(\bar{z}) \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 $\bar{z}=1+z/h$ 、 q_m は級数展開の係数、 $P_m(\bar{z})$ は m 次のルジャンドル多項式である。

線形理論では z は区間 $[-h, 0]$ で定義されるので、 $\bar{z}$ は $[0, 1]$ で定義される。通常、ルジャンドルの多項式はその変数が区間 $[-1, 1]$ で定義され、この区間で直交性が保証されている。これに対して、式 (8) は、区間 $[0, 1]$ で定義されている。しかし、偶数次のルジャンドル多項式が偶関数であることを用いると、区間 $[-1, 1]$ における直交性から

$$\int_0^1 P_{2(m-1)}(\bar{z}) P_{2(n-1)}(\bar{z}) d\bar{z} = \begin{cases} 0, & \text{for } m \neq n \\ \frac{1}{4m-3}, & \text{for } m = n \end{cases} \dots\dots\dots (9)$$

($m, n=1, 2, \dots$)

という関係が容易に導ける。すなわち、区間 $[0, 1]$ における偶数次のルジャンドル多項式は直交性を有し、式 (8) のような級数表示が可能である。

また、偶数次のルジャンドル多項式は水底 ($\bar{z}=0$) において次の性質を持つ。

$$\frac{d}{d\bar{z}} P_{2(m-1)}(\bar{z}) = 0, \quad \text{at } \bar{z}=0 \dots\dots\dots (10)$$

この性質により、式 (8) により級数展開された変動圧力 $\bar{p}$ は水底の境界条件式 (7) を満足する。

b) 級数の収束性

実際には式 (8) の無限級数をどこかで打ち切らなければならない。この時、級数の収束性が高ければたかだか数個の項数で元の関数が精度良く表現できる。

ここでは微小振幅波理論における変動圧力の振幅 $\bar{p}_s$ を式 (8) で表し、その収束性を検討する。ここで、 $\bar{p}_s$ としては微小振幅波理論の変動圧力の振幅を $g\eta$ で無次元化した次式を用いる。

$$\bar{p}_s = \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} = \frac{\cosh kh\bar{z}}{\cosh kh} \dots\dots\dots (11)$$

級数展開の係数 q_m は次式で求めることができる。

$$q_m = (4m-3) \int_0^1 \bar{p}_s P_{2(m-1)}(\bar{z}) d\bar{z} \dots\dots\dots (12)$$

図-1 は式 (12) で得られた $q_m (m=1, \dots, 5)$ を比水深 $h/L (=kh/2\pi)$ の関数として表したものである。比水深が小さいほど q_1 が卓越し、 q_2 以上の係数は小さくなっている。比水深が大きくなると q_2 が卓越するようになり、 q_3 以上の係数も比水深とともに値が大きくなって行く。しかし、比水深の大きな領域においても、式 (8) による変動圧力の級数展開は非常に高い収束性を示し、たかだか5項程度を採用するだけで変動圧力を精度良く表現できることが分かる。

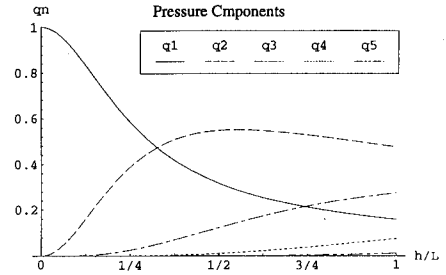


図-1 ルジャンドル多項式による級数展開の収束性

しかし、本論文で対象とする不規則な波動場においては、有義波の比水深が小さくても、短周期側の波は大きな比水深を示す。したがって、採用する項数が多いほど不規則な波動場を正確に表現できることになる。逆に、項数が多いほど計算量が増加し、非実用的な計算法となる。そこで、本論文では4項だけを採用し、以下の議論を進めることにする。

2.3 支配方程式の導出

a) 水面の境界条件

まず、水面 ($\bar{z}=1$) において、偶数次のルジャンドル多項式は $P_{2(m-1)}(1)=1$ という値をとる。したがって、水面の境界条件式 (3) は次の様に書替えられる。

$$g\eta = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 \dots\dots\dots (13)$$

また、ルジャンドル多項式の微係数に関する特性を用いると、水面の運動学的境界条件式 (5) は次のように変動圧力の係数で表すことができる。

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{1}{h} (3q_2 + 10q_3 + 21q_4) \dots\dots\dots (14)$$

b) 未知変数 q_m の支配方程式

級数展開の項数を4に限ると変動圧力 $\bar{p}$ は次の様になる。

$$\bar{p} = q_1 P_0(\bar{z}) + q_2 P_2(\bar{z}) + q_3 P_4(\bar{z}) + q_4 P_6(\bar{z}) \dots\dots (15)$$

この式の中の未知変数 $q_m = q_m(x, y, t)$ は式 (2) のラプラス式を満たすように決定しなければならない。そこで、ガラーキン法を用いて係数 q_m の支配方程式を求める。 η と $q_1 \sim q_4$ の5つの未知数に対して、すでに式 (14), (13) の2つの方程式を得ているので、残り3つの方程式が必要となる。

ガラーキン法に基づき、式 (2) に式 (15) を代入し、 P_0, P_2, P_4 をそれぞれ重みとして掛け、 z に関して $[-h, 0]$ の間積分を行う。このようにして求められた3つの方程式には $|\nabla h|^2, \nabla^2 h$ に関する項が含まれる。緩勾配の仮定に従い、これらの項を無視するとともに、式 (13) を用いて係数 q_4 を消去すると最終的に以下の方程式が得られる。

$$\nabla^2 \mathbf{q}_m + \frac{A}{h} \nabla h \nabla \mathbf{q}_m + \frac{1}{h^2} \mathbf{B} \mathbf{q}_m = -\frac{g \nabla \eta \nabla h}{h} \mathbf{a} - \frac{g \eta}{h^2} \mathbf{b} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで、太字の記号はベクトルあるいはマトリックスで、それぞれ以下のである。

$$\mathbf{q}_m = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \mathbf{a} = \frac{1}{64} \begin{pmatrix} 40 \\ 115 \\ 234 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 21 \\ 90 \\ 99 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{64} \begin{pmatrix} -40 & 24 & -88 \\ 115 & 99 & 275 \\ -234 & -306 & -251 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = -\begin{pmatrix} 21 & 18 & 11 \\ 90 & 90 & 55 \\ 99 & 99 & 99 \end{pmatrix}$$

なお、式 (16) の ∇ および ∇^2 は $\mathbf{q}_m$ の成分にそれぞれ作用するものとする。すなわち、 $\nabla \mathbf{q}_m = (\nabla q_1, \nabla q_2, \nabla q_3)$ 、 $\nabla^2 \mathbf{q}_m = (\nabla^2 q_1, \nabla^2 q_2, \nabla^2 q_3)$ を表す。

式 (14) においても式 (13) を用いて q_4 を消去すると次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{1}{h} (21g\eta - 21q_1 - 18q_2 - 11q_3) \quad \dots\dots (17)$$

以上の議論より、式 (16) と式 (17) の2式が最終的な緩勾配地形上の不規則波動場の支配方程式である。

これらの式の特徴は、まず、ルジャンドルの多項式を用いて変動圧力を表現したことにより式中に現れる係数が水深 h を除いて全て定数であることがあげられる。従来の理論では式中の係数に波速 C 、群速度 C_g と言った係数が用いられる。

次に、従来の波動理論は理論の展開上全く用いられていない。従来の波動理論は級数展開の打ち切り項数を決定するために参照しただけである。

最後に、波動場を表現するための方程式であるにも関わらず、水位変動 η の時間発展を記述した式 (17) は波動方程式の形式ではなく、むしろ振動方程式の形式に近い。式 (16) は波動場全域の水位の分布から、波動場全域の圧力特性を決定する。水位の時間発展は振動型の方程式から圧力の鉛直方向の勾配によって定まる。すなわち、本理論で不規則波動場の支配方程式として提案した式 (16) と式 (17) は、波動場を連成振動の場として表現したものと考えられる。

本理論は上述のように従来の理論とはかなり異なった形式や特性を有していることから、本理論の一般的な適用性を検討する前に、基礎的な特性を詳細に検討する必要がある。

3. 定常波動場における分散関係

ここでは、先の不規則波動場の支配方程式を一定水深上の定常規則波に適用し、支配方程式が持つ固有の分散関係式を求め、従来の微小振幅波理論と比較することに

よりその基本的な特性を明らかにする。

3.1 支配方程式の分散関係式

まず、一定水深上を x 軸の正の方向に進む定常進行波を考え、 $\eta = e^{i(kx - \sigma t)}$ とおく。ここで k は波数、 σ は角周波数である。線形理論を扱っているので振幅は1としている。式 (17) の形式から q_m に関しても

$$q_m = \bar{q}_m e^{i(kx - \sigma t)}, \quad (m=1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots (18)$$

のように仮定できる。これらの η, q_m を式 (16) に代入すると振幅 $\bar{q}_m$ に関する代数方程式が得られる。これを解いて $\bar{q}_m$ を求め、 η とともに式 (17) に代入し整理すると、支配方程式の固有の分散関係式が次のように求められる。

$$\frac{\sigma^2 h}{g} = (kh)^2 \frac{10395 + 1260(kh)^2 + 21(kh)^4}{10395 + 4725(kh)^2 + 210(kh)^4 + (kh)^6} \quad \dots\dots\dots (19)$$

これは次の微小振幅波理論の分散関係式と対応する式である。

$$\frac{\sigma^2 h}{g} = kh \tanh kh \quad \dots\dots\dots (20)$$

図-2 は本理論と微小振幅波理論の分散関係式 (19) と (20) の比較をしたもので、縦軸には $h/L_0 (= \sigma^2 h/g/(2\pi))$ 、横軸には $h/L (= kh/2\pi)$ を用いている。この図より、 $h/L < 1$ 以下において両者はよく一致しているが、 $h/L > 1$ においては本理論と微小振幅波理論との差異が大きくなっていくことがわかる。

群速度 C_g は $\partial\sigma/\partial k$ で表され、これは分散関係式の微係数に相当する。式 (19) は式 (20) の Padé 近似表現になっている。一般に、関数値の近似精度に比べ、微係数の近似精度は低い。従って、群速度 C_g についてもその精度を調べる必要がある。ここでは群速度係数、 C_g/C について調べることにする。本理論における群速度係数は次のようになる。

$$\frac{C_g}{C} = \frac{30}{495 + 60kh^2 + kh^4} \times \frac{343035 + 83160kh^2 + 14049kh^4 + 564kh^6 + 10kh^8}{10395 + 4725kh^2 + 210kh^4 + kh^6} \quad \dots\dots\dots (21)$$

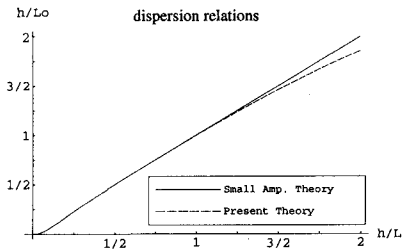


図-2 分散関係式の比較

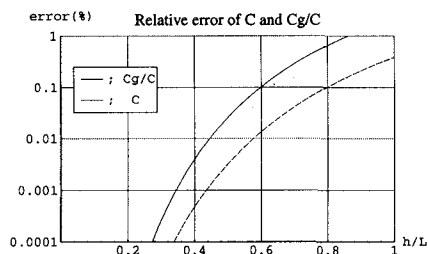


図-3 速度, 群速度係数の相対誤差

図-3は、本理論における波速 C 、群速度係数 C_g/C の微小振幅波理論に対する相対誤差(%)を示したものである。この図より、 $h/L < 0.6$ 以下においては相対誤差0.1%以下の精度で波速、群速度が一致していることがわかる。 $h/L > 0.6$ になると群速度の精度が急激に下がり、 $h/L \approx 0.75(3/4)$ で0.5%、 $h/L \approx 0.85$ で1%に達する。このことから、本理論は比水深約1/2以下の規則波に対して高い精度で適用可能であることがわかる。

4. 不規則波動場の計算

ここでは、式(16)と(17)の不規則波への基礎的な適用性を調べる。不規則波の伝播変形の基礎的な性質を抽出するために、一様水深場を一方に伝播する、基本周波数の異なる、2組の波群の伝播を計算する。

4.1 数値計算法と計算条件

式(16)と(17)は差分法を用いてその解を求めた。特に式(16)は各時間ステップ毎に解く必要があるが、係数マトリックスは時間によって変化しないことから、 $L-U$ 分解法を用いて計算時間の短縮を図った。

領域の両端における境界条件の取扱は重要な問題である。本計算では一方の端は反射壁とした。入射波側は次のように取り扱った。

a) 入射境界の作成法

本理論では入射境界において η , q_1 , q_2 , q_3 の4変数の値を与える必要がある。このうち η については観測可能な物理量であるので問題ない。

q_1 , q_2 , q_3 については、角周波数 σ が与えられれば微小振幅波理論を用いて変動圧力 $\bar{p}$ を式(11)の様な形式で与えることができる。このとき q_m は式(12)を用いて求められる。ここでは、入射境界における水位変動の時系列 $\eta_{in}(t)$ が与えられたとき、以下に示す方法により、角周波数 σ の時系列を求めることにした。

まず、与えられた水位変動 $\eta_{in}(t)$ とそのHilbert変換 $\tilde{\eta}_{in}(t)$ を用いて複素水位変動 $\xi(t)$ を次のように求める。

$$\xi(t) = \eta_{in} + i\tilde{\eta}_{in} \quad (22)$$

$\tilde{\eta}_{in}(t)$ と $\eta_{in}(t)$ はそれぞれの複素フーリエ係数 $\tilde{H}(\omega)$ と $H(\omega)$ の間に次のような関係があるので、これを用いて

$\tilde{\eta}_{in}(t)$ を容易に求めることができる。

$$\tilde{H} = \begin{cases} H, & \text{for } \omega > 0 \\ 0, & \text{for } \omega = 0 \\ -H, & \text{for } \omega < 0 \end{cases} \quad (23)$$

角周波数 $\sigma(t)$ の時系列は次式で定義した。

$$\sigma(t) = -\Re \left\{ \frac{d^2 \xi / dt^2}{\xi} \right\} \quad (24)$$

ここで $\Re$ は実数部を表す。

b) 計算条件

空間上の節点間隔 Δx は0.73 m、時間間隔 Δt は0.188 s、節点数は2800で計算領域は約2 kmの長距離の伝播について計算した。2つの波群の基本周期は3.0 sと9.0 sで、水深は7 mとした。基本周期を用いた比水深はそれぞれ1/2と1/10となる。

本計算手法では、節点間隔と時間間隔は最も短周期側の波の分割の程度により定まる。ここでは節点間隔を周期3 sの波の波長の1/20、時間間隔は周期の1/16とした。

なお波群は sech^2 型の包絡波形で、入射端において4~7波程度の長さとなるようにした。包絡波形の最大振幅はどちらの波群も1とした。

4.2 数値計算結果

図-4は計算結果を水位変動 η の空間波形の形式で示したもので、各図はそれぞれ37.5 s毎の結果である。なお、横軸の値は接点番号を示している。図中には短周期の波群が先行し、これを長周期の波群が追いつき、追いつき、さらに反射壁で反射し、再び短周期の波群と衝突し通り抜けていく様子が表れている。また個々の波群は、伝播とともに前後に広がりながら、振幅が小さくなっていく。波群の中央部の伝播速度は微小振幅波理論の群速度とほぼ一致している。

ここで用いた波群は数波長の長さを有し、非常にせまいスペクトル幅を有する不規則波である。線形理論であるので、個々の波群は周波数分散により、伝播とともに分散していく。また、波群間の干渉も表れないので、個々の波群はそれぞれの群速度で互いに独立に伝播する。しかし、水位変動 η は個々の波群による水位変動の重ね合わせたものになる。

すなわち、図に示された結果は線形理論では当然の結果である。しかし、この結果は単一の方程式系により、 η の時間発展として求められたものであり、このことは式(16)、(17)が線形不規則波の時系列を直接求め得ることを示している。

5. 結 論

緩勾配地形上の線形不規則波動場の支配方程式(16)と(17)を導いた。支配方程式は圧力の級数展開の係数

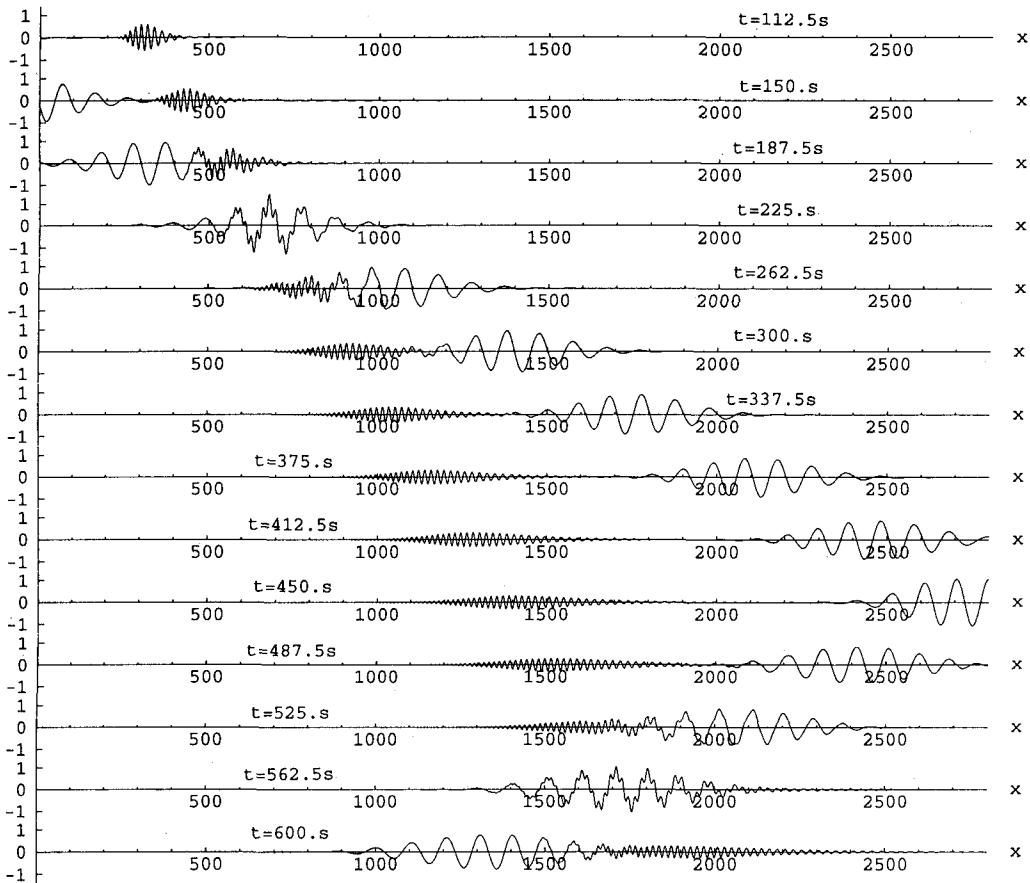


図-4 基本周波数の異なる2つの波群の伝播変形計算の結果

q_m と水位変動 η によって表されている。支配方程式の基礎的な特性について検討を行い、比水深 $1/2$ 以下の条件で、この式が従来の微小振幅波理論と一致することを示した。一様水深上での基本周期の異なる2つの波群の伝播を計算することによって、支配方程式が不規則波動場の水位変動の時間発展を精度良く求められることを示した。

参 考 文 献

窪 泰浩・小竹康夫・磯部雅彦・渡辺 晃 (1991): 非定常緩勾

配不規則波動方程式について, 第38回海岸工学論文集, pp. 45-50.

小竹康夫・磯部雅彦・渡辺 晃 (1992): 非定常緩勾配不規則波動方程式の高精度化, 第39回海岸工学論文集, pp. 91-95.

灘岡和夫・中川康之 (1991): Galerkin 法に基づく強分散性波動方程式の導出と背景について, 東工大土木工学科研究報告, No. 44.

森口繁一・宇田川欽久・一松 信 (1960): 数学公式III, 岩波全書, 岩波書店, p. 310.