

新しい非線形・分散性波動方程式による 非線形波動場解析の試み

灘 岡 和 夫*・中 川 康 之**

1. はじめに

波浪変形を支配する最も重要な要素として、波の分散性と非線形性を挙げることができる。特に最近では海洋構造物の大水深化などにより、波の不規則性の評価が重要となりつつあるため、波の分散性を正しく表現できる分散性波動方程式による波動場の解析手法が望まれている。これまでの沿岸域における波動場解析には、緩勾配方程式 (Berkhoff, 1972) に代表される規則波を対象とした解析手法が用いられてきたが、分散性波動場を対象とするには成分波ごとの計算が必要になってしまう。これに対し、解の重ね合わせをすることなく波の分散性を表現できる波動方程式として Smith & Sprinks (1975) や、最近では Kirby ら (1991)、窪ら (1991) により弱分散性の緩勾配方程式が提案されている。ところがこれらは線形波動場を対象としたもので、波の非線形性の効果を導入することは困難となっている。一方、分散性だけでなく非線形性もある程度表現可能にしたものとして Boussinesq 方程式があげられる。しかしながら、これらの波動方程式はいずれも対象とする波動場の波数スペクトルが狭い領域にある場合にしか適用できず、特に Boussinesq 方程式についてはその適用性が長波領域近傍に限られてしまう。

このような既存の波動方程式の制約を打破すべく、さきに著者らは任意の波数スペクトルを有する不規則波動場に適用可能な、強分散性波動方程式を導出し、水平床上の線形波動場を対象とした計算結果と理論解との比較によりその妥当性を確認している (灘岡・中川, 1991, 92)。さらに、この波動方程式は、エネルギーフラックスについても十分精度良く表現できるため斜面上の波動場の浅水変形計算も問題なく行えること (灘岡・中川, 1993)、また Galerkin 法による定式化を行っているため非線形の効果の導入も容易に行えること、などからより一般性の高い波動方程式への拡張が可能である。

そこで本研究では任意地形上の非線形波動場への拡張を行い、台形浅瀬上を通過する規則波を対象とした計算

結果と実験値との比較を通じて、その妥当性を確かめた。ただし、本波動方程式は水平流速場を有限個の成分の和として表すことにより任意の強さを分散性を表現できるが、今回の計算では方程式の強非線形化の効果の検討に重点をおいたため、この成分数を 1 とした強非線形・弱分散性モデルを用いた。

2. 非線形・分散性波動方程式の導出方法

本方法による非線形・分散性波動方程式の導出は、線形波動場を対象とした場合の Galerkin 法に基づく定式化 (灘岡・中川, 1991) とほとんど同様に行うことができる。

具体的には、3 次元空間上で定義される連続式 (1) とオイラーの式 (2) を水面および底面での境界条件式 (3) - (5) を用いて鉛直積分することにより波動方程式を得ることができる。その際、線形強分散性波動方程式を導出する過程では、運動方程式 (2) 中の非線形項 (移流項) は無視されていたが、ここではこれらすべてを考慮する。

[連続式]

$$\nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

[水平方向運動方程式]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad \dots\dots\dots (2.a)$$

[鉛直方向運動方程式]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla + w \frac{\partial}{\partial z} \right) w = -g - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad \dots\dots\dots (2.b)$$

[水面および底面条件]

$$p = 0 \quad (z = \xi) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \xi = w \quad (z = \xi) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla h = -w \quad (z = -h) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 x, y : 水平座標、 z : 鉛直座標 (静水面から上向きに正)、 t : 時間、 h : 水深、 ξ : 水位、 $\mathbf{u}, w$: 水粒子速度の水平および鉛直方向成分、 p : 圧力、 ρ : 密度、 g : 重力加速度、であり、また、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ である。

* 正会員 工博 東京工業大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 運輸省港湾技術研究所 海洋水理部 水理研究室

式(1), (2)の鉛直積分に先立ち, 本方法においては水平流速場 u を以下のように仮定する.

$$u(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^I W_i(x, y, t) F(z; k_i h) \cdots \cdots (6)$$

ここに

$$F_i(z, k_i h) = \frac{\cosh k_i(h+z)}{\cosh k_i h} \cdots \cdots (7)$$

である. これによりまず, 連続式(1)を水面および底面における境界条件式(4), (5)を用いて鉛直方向に底面 ($z = -h$) から水面 ($z = \xi$) まで積分することにより次式を得る.

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \sum_{i=1}^I \left\{ \nabla \cdot \mathbf{W}_i \frac{\sinh k_i(h+\xi)}{k_i \cosh k_i h} \right\} = 0 \cdots \cdots (8)$$

つぎに鉛直方向の運動方程式(2.b)から圧力 p が次のように表される.

$$\begin{aligned} p(z) = & \rho g(\xi - z) \\ & - \rho \sum_{i=1}^I \left(\bar{p}_{ai} \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{W}_i}{\partial t} + \bar{p}_{bi} \frac{\partial \mathbf{W}_i}{\partial t} \cdot \nabla h \right) \\ & - \rho \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^I \left[\bar{p}_{cij} \{ \mathbf{W}_i \cdot \nabla^2 \mathbf{W}_j \right. \\ & \left. - (\nabla \cdot \mathbf{W}_i)(\nabla \cdot \mathbf{W}_j) \right] \cdots \cdots (9) \end{aligned}$$

ここに

$$\bar{p}_{ai} = \frac{\cosh k_i(h+\xi) - \cosh k_i(h+z)}{k_i^2 \cosh k_i h} \cdots \cdots (10)$$

$$\bar{p}_{bi} = \frac{\sinh k_i \xi - \sinh k_i h}{k_i \cosh^2 k_i h} \cdots \cdots (11)$$

$$\begin{aligned} \bar{p}_{cij} = & \left\{ \frac{\cosh(k_i + k_j)(h+\xi)}{k_i + k_j} \right. \\ & - \frac{\cosh(k_i + k_j)(h+z)}{k_i + k_j} \\ & + \frac{\cosh(k_i - k_j)(h+\xi)}{k_i - k_j} \\ & \left. - \frac{\cosh(k_i - k_j)(h+z)}{k_i - k_j} \right\} \\ & / 2k_i \cosh k_i h \cosh k_j h \cdots \cdots (12) \end{aligned}$$

これにより水平方向の運動方程式(2.a)も鉛直方向に積分することが可能になるわけだが, 本方法においてはここで単に鉛直積分するのではなく, 重み付きの残差法の一つである Galerkin 法に基づき, 式(2.a)の両辺に重みとして式(7)で与えられる鉛直分布関数を乗じた後に, z に関して底面 ($z = -h$) から水表面 ($z = \xi$) まで積分を行う. 積分区間の上限が平均水面 ($z = 0$) ではなく, 水表面とすることが線形波動場を対象とする場合と異なる点である. これにより未知数 W_i の時間発展を記述する以下に示す方程式が I 本 ($n = 1, \dots, I$) 得られる.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^I a_{in} \frac{\partial W_i}{\partial t} \\ & + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^I \{ e_{ijn} \mathbf{W}_i \cdot \nabla \mathbf{W}_j - f_{ijn} \mathbf{W}_j \cdot \nabla \mathbf{W}_i \\ & - g_{ijn} \mathbf{W}_j (\mathbf{W}_i \cdot \nabla h) \} \\ & = b_n \nabla \xi + \sum_{i=1}^I \left[c_{in} \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{W}_i}{\partial t} \right. \\ & + d_{in} \left\{ \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{W}_i}{\partial t} \right) \nabla h + (\nabla h \cdot \nabla) \frac{\partial \mathbf{W}_i}{\partial t} \right\} \\ & + h_{in} \nabla \xi \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{W}_i}{\partial t} \right) + i_{in} \frac{\partial \mathbf{W}_i}{\partial t} (\nabla h \cdot \nabla) \xi \Big] \\ & + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^I [j_{ijn} \{ \nabla (\mathbf{W}_i \cdot \nabla^2 \mathbf{W}_j) \\ & - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{W}_i)(\nabla \cdot \mathbf{W}_j) \}] \quad (n=1, \dots, I) \cdots (13) \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned} a_{in} = & \left\{ \frac{\sinh(k_i + k_n)(h+\xi)}{k_i + k_n} \right. \\ & \left. + \frac{\sinh(k_i - k_n)(h+\xi)}{k_i - k_n} \right\} \\ & / 2 \cosh k_i h \cosh k_n h \cdots \cdots (14) \end{aligned}$$

$$b_n = -g \frac{\sinh k_n(h+\xi)}{k_n \cosh k_n h} \cdots \cdots (15)$$

$$c_{in} = \left\{ \frac{\cosh k_i(h+\xi) \sinh k_n(h+\xi)}{k_n \cosh k_i h \cosh k_n h} - a_{in} \right\} / k_i^2 \cdots \cdots (16)$$

$$\begin{aligned} d_{in} = & \left[\frac{\sinh k_i(h+\xi) \sinh k_n(h+\xi)}{k_n} \right. \\ & - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\cosh(k_i + k_n)(h+\xi) - 1}{k_i + k_n} \right. \\ & \left. + \frac{\cosh(k_i - k_n)(h+\xi) - 1}{k_i - k_n} \right\} \Big] \\ & / k_i \cosh k_i h \cosh k_n h - k_i c_{in} \tanh k_i h \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{ijn} = & (\text{SH1} + \text{SH2}) \\ & / 4 \cosh k_i h \cosh k_j h \cosh k_n h \cdots \cdots (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{in} = & k_j (\text{SH1} - \text{SH2}) \\ & / (k_i 4 \cosh k_i h \cosh k_j h \cosh k_n h) \cdots \cdots (19) \end{aligned}$$

$$g_{ijn} = e_{ijn} k_j \tanh k_j h - f_{ijn} k_i \tanh k_i h \cdots \cdots (20)$$

$$h_{in} = \frac{\sinh k_i(h+\xi) \sinh k_n(h+\xi)}{k_i \cosh k_i h \cdot k_n \cosh k_n h} \cdots \cdots (21)$$

$$i_{in} = \frac{\cosh k_i \xi \sinh k_n(h+\xi)}{\cosh^2 k_i h \cdot k_n \cosh k_n h} \cdots \cdots (22)$$

$$\begin{aligned} j_{ijn} = & \left[\sinh k_n(h+\xi) \left\{ \frac{\cosh(k_i + k_j)(h+\xi)}{k_i + k_j} \right. \right. \\ & \left. + \frac{\cosh(k_i - k_j)(h+\xi)}{k_i - k_j} \right\} \Big] / k_n \\ & - \{ \text{SH1} / 2(k_i + k_j) + \text{SH2} / 2(k_i - k_j) \} \\ & / 2k_j \cosh k_i h \cosh k_j h \cosh k_n h \cdots \cdots (23) \end{aligned}$$

ただし

$$SH1 = \frac{\sinh(k_i + k_j + k_n)(h + \zeta)}{k_i + k_j + k_n} + \frac{\sinh(k_i + k_j - k_n)(h + \zeta)}{k_i + k_j - k_n}$$

$$SH2 = \frac{\sinh(k_i - k_j + k_n)(h + \zeta)}{k_i - k_j + k_n} + \frac{\sinh(k_i - k_j - k_n)(h + \zeta)}{k_i - k_j - k_n}$$

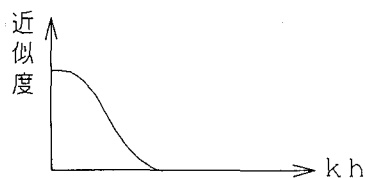
式(8), (14)は ζ と W_i ($i=1, \dots, I$)に関する連立微分方程式を構成しており, これらの未知変数の時間発展を記述する非線形波動方程式となる。なお, 水平流速場の仮定における展開項数 I の値を4程度とすれば, ほぼ任意の波数スペクトルをもつ不規則波動場を精度よく表現できる強分散性の波動方程式となることが確かめられており(灘岡・中川 1993), 対象とする波動場のスペクトル幅が狭い場合には, より少ない I の値で対応できる。また, 今回導出された非線形・分散性波動方程式は, 基礎式中の非線形項をすべて考慮して導かれたものであるため, 任意の非線形性を表現できる強非線形モデルとなっている。

特に I を1とした場合には(その場合でも本波動方程式は後に示すように分散性を持つ), 次のようになる。

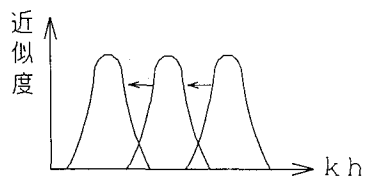
$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot \left\{ W_i \frac{\sinh k_i(h + \zeta)}{k_i \cosh k_i h} \right\} = 0 \dots \dots \dots (24)$$

$$\begin{aligned} a_{ii} \frac{\partial W_i}{\partial t} + \{ e_{iii} W_i \cdot \nabla W_i \\ - f_{iii} W_i \cdot \nabla W_i - g_{iii} W_i (\nabla W_i \cdot \nabla h) \} \\ = b_i \nabla \zeta + \left[c_{ii} \nabla \cdot \frac{\partial W_i}{\partial t} \right. \\ + d_{ii} \left\{ \left(\nabla \cdot \frac{\partial W_i}{\partial t} \right) \nabla h + (\nabla h \cdot \nabla) \frac{\partial W_i}{\partial t} \right\} \\ + h_{ii} \nabla \zeta \left(\nabla \cdot \frac{\partial W_i}{\partial t} \right) \\ + i_{ii} \frac{\partial W_i}{\partial t} (\nabla h \cdot \nabla) \zeta \left. \right] + j_{iii} \{ \nabla (W_i \cdot \nabla^2 W_i) \\ - \nabla (\nabla \cdot W_i) (\nabla \cdot W_i) \} \quad (i=1) \dots \dots \dots (25) \end{aligned}$$

これらの式(24), (25)は, 強非線形・弱分散性波動方程式を構成しており, 対象とする波動場のスペクトル帯域が狭い場合には, その中心波数 k_p に対応するようにパラメータ k_i の値を設定することにより, 近似度の良い計算が可能となる。このため浅水変形に伴って中心波数が変化する様な場合にも, それにあわせて k_i の値を設定できるので, スペクトル帯域が狭い波動場であれば, 沖から入射し浅海域に至るまでの波形変形を追うことが可能となる。図-1は, Boussinesq方程式と $I=1$ とした場合の本波動方程式の, 分散性に関する近似度と波数領域との関係を模式的に表したものである。Boussinesq方



(a) Boussinesq 方程式の場合



(b) 本波動方程式 ($I=1$) の場合

図-1 分散関係に関する近似精度と波数領域との関係の模式図

程式の場合, 長波近似に基づいた方程式であるためにその適用性が長波領域近傍に限定されてしまう。これに対し, $I=1$ の場合の本方法においては, 精度良く近似できる領域を対象とする波動場のスペクトル領域の移動に連動させて, 柔軟に対応させることができる。

また, この波動方程式(24), (25)に対して, Boussinesq方程式を導出する際の仮定である $(kh)^2 \ll 1$ および $H/h \ll 1$ (H :波高)の条件を考慮すると両者は一致する。すなわち本波動方程式は, その極限形としてBoussinesq方程式を含んでいることになる。その具体的な説明については紙面の都合上, 別の機会にゆずることとする。

3. 計算結果と実験値の比較

ここで計算対象とした波動場は, さきにBejiら(1992)が実験を行っている, 図-2に示される台形浅瀬上を通過する断面2次元の規則波であり, ここで比較に用いた実験値はBejiらにより測定されたものである。計算では, 1次元化した式(24)および(25)を差分法によって解き, 造波境界より実験条件に等しい規則波を入射させ, 各測点における表面水位 ζ の時間波形を求めた。その際, 本波動方程式中のパラメータ k_i の値は入射波の波数と一致するように設定した。今回の計算で用いた $I=1$ の場合の本波動方程式は, 三重対角化された差分スキームにより高速に解くことが可能である。

図-3は, 周期(T) 2s, 波高(H) 2.0 cmの規則波を入射させたときの計算結果と実験値の比較を示したものである。まず, 斜面から浅瀬上の一様水深部にさしかかったSt. 3での波形を見ると実験波形とほとんどパーフェクトな一致が得られていることがわかる。さらにSt. 4では, 非線形干渉により分裂している様子が表現され,

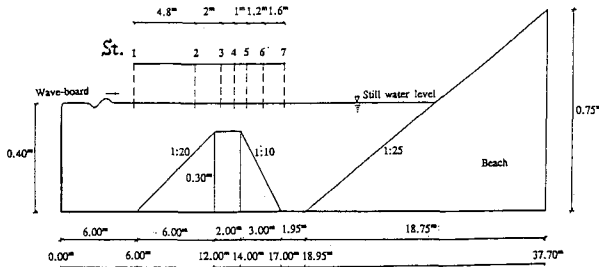


図-2 実験水槽の断面図と波高計の位置

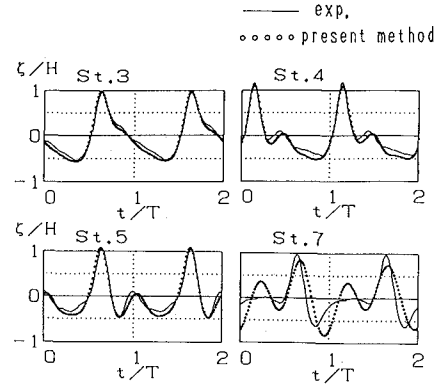
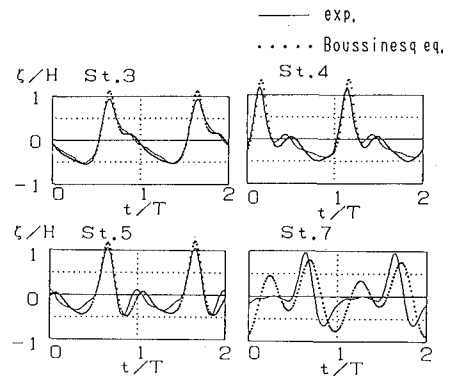
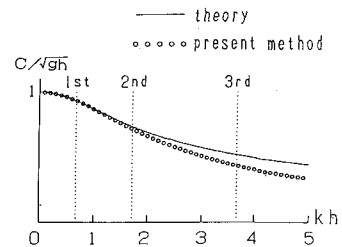
ここでも実験値との良好な一致がみられる。これらのことは、本波動方程式 ($I=1$) によって浅水変形を十分精度良く表すことができ、同時に非線形性についても十分な精度が得られていることを示すものである。

比較のため、既存の弱非線形・弱分散性波動方程式である Boussinesq 方程式を用いて同様なケースの計算を行った結果が図-4 である。ここでは鉛直平均流速を用いて表される Boussinesq 方程式 (例えば Mei, 1983) を差分法によって解いた結果を示している。

これらの計算結果を比較してみると、Boussinesq 方程式による結果においては、波の非線形性が強く現れる水深の浅い領域 (St. 4, 5) で実験値よりも主波峰の波高が大きくなっており、本波動方程式を用いたほうがより実験値に近い結果が得られていることがわかる。これは Boussinesq 方程式が、その導出過程において弱い程度の非線形性までしか考慮されていないものであるのに対し、本方程式においてはより厳密に非線形の効果を取り込んでいるためと考えられる。

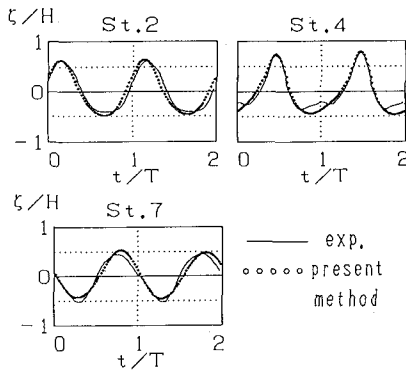
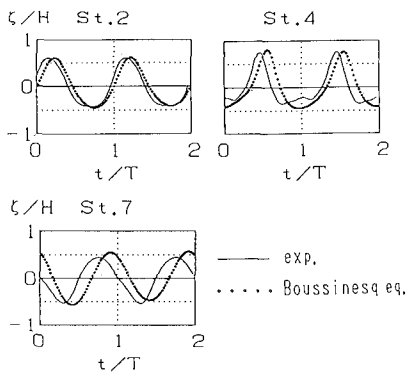
一方、本方法による結果における St. 5 までの良好な計算結果に対して、水深が再び大きくなる部分 (St. 7) では実験値からのずれが顕著となる。これは、今回示した計算結果が流速成分 I を 1 とした、弱分散性のモデルを用いて得られたものであるためと考えられる。本波動方程式中のパラメータ k_i の値を入射波の波数と一致するように設定した場合、本波動方程式の分散曲線は図-5 のようになる。これに対し、浅い領域で発生した高次モードの波は浅瀬背後の深い領域に進入すると自由波となり、同図中に示した個々の位相速度で進行を始める。したがって、流速成分を 1 つしか設定していない今回の計算では、高次モードの成分波の位相速度については精度が落ちてしまうことになる。

この点については、本波動方程式は流速成分を増やすことにより、分散性に関する精度を向上させることができることから、2 つないしは 3 つの流速成分で構成される本波動方程式を用いた計算によりこの問題は解決で

図-3 本方法による計算結果 ($T=2.0$ s)図-4 Boussinesq 方程式による計算結果 ($T=2.0$ s)図-5 本波動方程式 ($I=1$) の分散曲線と高次モード波の位相速度

きと考えられる。

つぎに、周期 1.25 s、波高 2.5 cm の規則波を入射させた場合の本方法による計算結果を図-6 に示す。ここでも比較のため、Boussinesq 方程式を用いた計算結果を図-7 に示す。これらの図からも明らかのように、Boussinesq 方程式を用いた場合には波速が遅くなってしまうことがわかる。これはここでの入射波が深海波に近づいたため、長波領域に適用が制限される Boussinesq 方程式では位相速度の近似度が低下してしまうためと考えられる。これに対し、本波動方程式では図-1 のイメージ図で示したように、分散関係を精度良く近似できる領域

図-6 本方法による結果 ($T=1.25$ s)図-7 Boussinesq 方程式による結果 ($T=1.25$ s)

を、対象とする波動場に対応させて移動させることができる分散性波動方程式となっている。このため、図-6に示すように、実験値との一致度が Boussinesq 方程式を用いた結果よりも向上する。

4. おわりに

さきに著者らが導出した線形・強分散性波動方程式をより一般性の高いものとするために、任意地形上の非線形波動場への拡張を行い、特に任意の程度の非線形性を表現できる強非線形・分散性波動方程式の導出を行った。このため、非線形性の強く現れる波動場を対象とした計算結果と実験値の比較をしたところ、本波動方程式が波の浅水変形ならびに非線形現象を精度良く表現できることがわかった。また、Boussinesq 方程式を用いた同

様なケースを対象とした計算結果との比較から、非線形効果の表現が向上していることが示された。

なお、本波動方程式が極限形として Boussinesq 方程式を含んでいること、あるいは浅水変形に関する線形波動場での計算結果と理論値との比較、および本波動方程式がなぜエネルギーフラックスを精度良く算定できるかなどの理論的考察を含めた基礎的事項の検討結果については別の機会に述べるつもりである。

今後は、流速成分を増やした場合の強非線形・強分散性モデルに対する、効率の良い計算ルーチンの開発を行い、それを用いた計算結果について紹介する予定である。

謝辞：本研究を行うに当たっては、文部省科学研究費一般研究 C (研究課題番号：0265034, 研究代表者：灘岡和夫) の補助を受けた。ここに記して謝意を表します。

参 考 文 献

- 窪 泰浩・小竹康夫・磯部雅彦・渡辺晃 (1991): 非定常緩勾配不規則波動方程式について, 海岸工学論文集, 第 38 巻, pp. 46-50.
- 灘岡和夫・中川康之 (1991): Galerkin 法に基づく強分散性波動方程式の導出と背景について, 東京工業大学土木工学科研究報告, No. 44, pp. 63-75.
- 灘岡和夫・中川康之 (1992): Galerkin 法に基づく強分散性波動方程式の基本特性に関する検討, 第 47 回年次講演会講演集, pp. 1024-1025.
- 灘岡和夫・中川康之 (1993): 不規則波動シミュレーションのための強分散性波動方程式の導出とその基本特性の検討, 土木学会論文集, No. 467/II-23, pp. 83-92.
- Beji, S., T. Ohyama, J. A. Battjes and K. Nadaoka (1992): Transformation of nonbreaking waves over a bar, Proc. 23rd Int. Conf. on Coastal Eng., ASCE, pp. 51-61.
- Berkhoff, N. (1972): Computation of combined refraction-diffraction, Proc. 13th Int. Conf. on Coastal Eng., ASCE, pp. 471-490.
- Kirby, J. T. and C. Rasmussen (1991): Numerical solutions for transient and nearly periodic waves in shallow water, Proc. ASCE, Engineering Mech. Specialty Conf., pp. 328-332.
- Mei, C. C. (1983): The applied dynamics of ocean surface waves, John Wiley & Sons, p. 512.
- Smith, R. and T. Sprinks (1975): Scattering of surface waves by a conical island, J. Fluid Mech., Vol. 72, part 2, pp. 373-384.