

非線型係留浮体の長周期動揺とカオスの挙動に関する数値的検討

青木 伸一*・榎木 亨**・Michael Isaacson***

1. ま え が き

係留された船舶や浮遊式海洋構造物に発生する長周期の動揺は、係留施設の設計において支配的な要因となる場合が多い。この長周期動揺の原因としては、従来波高の変動性に起因する変動漂流力が主たる要因とされ、数多くの研究が行われてきた（例えば Pinkster, 1975）。ただしこれらの研究のほとんどは、明確な応答特性を有する線型係留浮体に対するものであり、非線型係留の影響についてはあまり議論されていない。

一方 Lean (1971) および 榎木・久保 (1977) は、非対称に係留された船舶に波周期の数倍の周期の長周期動揺が発生することを指摘した。さらに近年非線型振動問題に対する関心が高まるにつれ、海洋工学の分野においても浮体の非線型振動における周期倍化現象やカオスの挙動が注目され、いくつかの試験的研究が始められている (Thompson et al., 1984; Bishop and Virgin, 1987)。ただしこれらの研究のほとんどは単一の周波数成分のみをもつ外力の作用に対する周期倍化現象に着目したものであり、従来より長周期動揺の原因とされてきた変動漂流力との関連については全く議論されていない。

本研究は、非線型係留された浮体が波周期での外力以外に波群に伴う長周期変動漂流力の作用を受ける場合を想定し、非線型係留浮体の長周期外力に対する基本的な応答特性、波周期の外力に対する周期倍化現象、ならびに両者が同時に作用する場合の応答の特性について、カオスの挙動（応答の初期条件に対する依存性および予測不能なランダム現象の出現）に着目しつつ数値的に検討するものである。

2. 非線型係留システム

本研究で取扱う係留システムは、図-1(a), (b) に示すような変位 (x)—反力 (R) 特性を有する 2 種類である。Type-A は緊張係留時に生じる材料的な非線型性を、Type-B は非対称な係留と弛緩係留時に生じる無反

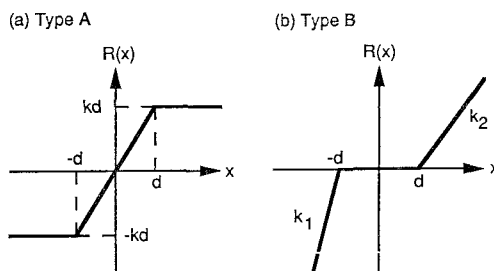


図-1 非線型係留システムの反力特性

力状態を単純化したモデルと考えることができる。 $R(x)$ は次式で表せる。

Type-A:

$$R(x) = \begin{cases} -kd & x < -d \\ kx & |x| \leq d \\ kd & x > d \end{cases} \quad \dots\dots\dots (1)$$

Type-B:

$$R(x) = \begin{cases} k_1 x & x < -d \\ 0 & |x| \leq d \\ k_2 x & x > d \end{cases} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに k , k_1 および k_2 はバネ定数である。

このような係留系の特徴として、系の自由振動周期が初期条件に依存するという点が挙げられる。いま減衰のない 1 自由度の振動系において、質量 m の物体が初期変位 $x(t=0)=0$ 、初期速度 $v(t=0)=v_0$ のもとに自由振動する場合を考えると、Type-A および Type-B の自由振動角周波数 ω_n はそれぞれ次式で表される。

Type-A:

$$\frac{\omega_n}{\omega_0} = \begin{cases} 1 & p \leq 1 \\ \pi/2(\sin^{-1}(1/p) + \sqrt{p^2 - 1}) & p > 1 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (3)$$

Type-B

$$\frac{\omega_n}{\omega_0} = \frac{1}{1 + 2q/\pi} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $p = |v_0|/\omega_0 d$, $q = \omega_0 d/|v_0|$ である。式 (3) および (4) は、無次元パラメータ p および q の増大に伴って自由振動周波数が減少することを示している。自由振動周波数の初期条件に対する依存性は、浮体の応答をより複雑にするだけでなく、今の場合のよ

* 正会員 工 博 大阪大学助手 工学部土木工学科

** 正会員 工 博 大阪大学教授 工学部土木工学科

*** Ph.D. Professor Dept. Civil Eng., UBC

うに固有周期が長周期側に移行する場合には、長周期の動揺を増大させることが予想される。

3. 運動方程式とその解法

(1) 浮体の運動方程式

本論文では、次式で表されるような運動モード間の連成を無視した1自由度の運動方程式を取扱う。

$$M\ddot{x} + N\dot{x} + R(x) = F(t) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに M は付加質量を含む浮体のみかけの質量、 N は減衰係数、 $F(t)$ は外力であり、 $R(x)$ は式(1)および(2)で与えられる係留反力を表している。また $\cdot$ は時間 t に関する微分を表す。厳密に言えば、浮体が正弦的に振動しない場合には運動方程式を式(5)のように表すことはできないが、ここでは簡単のために M および N を時間および周波数に依存しない定数として取扱う。

(2) 波力の表現

a) 単一成成分波 水位変動が $\eta(t) = a \cos(\omega t)$ のように表される単一成成分波については、1次の波力 $F(t)$ は次式のように表すことができる。

$$F(t) = a F^*(\omega) \cos(\omega t + \delta(\omega)) \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに $F^*(\omega)$ および $\delta(\omega)$ は波力の振幅および位相差の伝達関数である。

b) 2成分波 いま水位変動が次式で表わされるような2成分波を考える。

$$\eta(t) = a_1 \cos(\omega_1 t) + a_2 \cos(\omega_2 t + \varepsilon) \quad \dots\dots\dots (7)$$

これに対応する波力は次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} F(t) = & a_1 F^*(\omega_1) \cos(\omega_1 t + \delta(\omega_1)) \\ & + a_2 F^*(\omega_2) \cos(\omega_2 t + \varepsilon + \delta(\omega_2)) \\ & + a_1 a_2 F_L^*(\omega_1, \omega_2) \cos[(\omega_1 - \omega_2)t - \varepsilon \\ & + \delta_L(\omega_1, \omega_2)] \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

ここに $F_L^*(\omega_1, \omega_2)$ および $\delta_L(\omega_1, \omega_2)$ は2次の波力のうちの長周期の成分、すなわち変動漂流力に対する振幅および位相の伝達関数である。Pinkster (1980) の近似に従って ω_1 と ω_2 の差を微小とすると $\delta_L = 0$ となり、さらに F_L^* は次式で与えられる。

$$F_L^* = \rho g C_d(\omega)/2 \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$ であり、 $C_d(\omega)$ は定常漂流力係数である。さらに特別な場合として $a_1 = a_2 = a$ および $\varepsilon = 0$ において整理すると $F(t)$ は次のようになる。

$$F(t) = F_1 \cos(\Delta\omega t/2) \cos(\omega t + \delta(\omega)) + F_2 \cos(\Delta\omega t) \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに $F_1 = 2aF^*(\omega)$ 、 $F_2 = \rho g a^2 C_d(\omega)/2$ 、 $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ である。

(3) 運動方程式の無次元表示

係留特性を代表する諸量は図-1より、Type-A については d および k 、Type-B については d 、 k_1 および k_2 である。いま Type-B に対して $k = k_2$ 、 $K = k_1/k_2$ と

おくと、 d 、 k および K が Type-B の反力特性を代表する量となる。運動方程式を解くためには初期変位 x_0 および初期速度 v_0 を与える必要があるため、これらも解を決定する変数となる。従って解は次式のように表すことができる。

単一成成分波:

$$x = f(t, M, N, k, d, K, F_1, \omega, x_0, v_0) \quad \dots\dots\dots (11)$$

2成分波:

$$x = f(t, M, N, k, d, K, F_1, F_2, \omega, \Delta\omega, x_0, v_0) \quad \dots\dots\dots (12)$$

上式で $f(\quad)$ は $(\quad)$ 内の諸量の関数を意味しており、また位相差 δ は無視している。なおバネ定数の比 K は、Type-B についてのみ変数である。

次元解析によれば、式(11)および(12)は無次元パラメータを用いて次式のように表すことができる。

単一成成分波:

$$X = f(\tau, \alpha, \zeta, r, K, X_0, V_0) \quad \dots\dots\dots (13)$$

2成分波:

$$X = f(\tau, \alpha, \zeta, r, K, \lambda, \gamma, X_0, V_0) \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここに、

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{F_1/k}, \quad \tau = \omega t, \quad \alpha = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \zeta = \frac{N}{2M\omega_0}, \quad r = \frac{kd}{F_1}, \\ \lambda &= \frac{F_2}{F_1}, \quad \gamma = \frac{\Delta\omega}{\omega}, \quad X_0 = \frac{x_0}{F_1/k}, \quad V_0 = \frac{v_0}{\omega F_1/k} \end{aligned}$$

ここに $\omega_0 = \sqrt{k/M}$ である。 α は外力の無次元周波数、 ξ は減衰比、 r は係留系の線型性を表すパラメータである。Type-A については $r \rightarrow \infty$ のとき、Type-B については $r \rightarrow 0$ かつ $K \rightarrow 1$ のとき係留系はバネ定数 k の線型系となる。2成分波に対しては λ 、 γ の2つのパラメータが追加され、それぞれ波強制力と変動漂流力の振幅比および周波数比を表している。

上記無次元パラメータを用いて運動方程式を書き直す最と最終的に次式を得る。

単一成成分波:

$$\alpha^2 \ddot{X} + 2\alpha \zeta \dot{X} + S(X) = \cos \tau \quad \dots\dots\dots (15)$$

2成分波:

$$\alpha^2 \ddot{X} + 2\alpha \zeta \dot{X} + S(X) = 2 \cos(\gamma\tau/2) \cos \tau + \lambda \cos(\gamma\tau) \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここに $\cdot$ は τ に関する微分を表し、 $S(x)$ は $R(x)/F_1$ を無次元量を用いて表したもので、次式で与えられる。

Type-A:

$$S(X) = \begin{cases} -r: & X < -r \\ X: & |X| \leq r \\ r: & X > r \end{cases} \quad \dots\dots\dots (17)$$

Type-B:

$$S(X) = \begin{cases} KX: & X < -r \\ 0: & |X| \leq r \\ X: & X > r \end{cases} \quad \dots\dots\dots (18)$$

(4) 運動方程式の解法

式 (17) および (20) に示されているように、係留反力を表す関数 $S(x)$ は 3 つの線型な領域: $x < -r$, $|x| \leq r$, および $x > r$ に分割される。各々の領域内では運動方程式は線型であるため、その解は 2 つの未知定数を含む一般解と、外力項に対応する特殊解の和として表される。数値計算は初期変位 X_0 の存在する領域の解の未知定数を初期条件 $X = X_0$, $V = V_0$ を用いて決定し、 X がその領域の境界を越える直前まで解析解を用いて X を計算する。 X が境界をちょうど横切る点の時刻 τ および速度 V を Newton 法と 2 分法を併用して求め、その値を初期値として次領域の解の未知定数を決定する。その後 X が再び境界を越えるまでのその領域の解を用いて X を計算する。このような過程を繰り返して X の時系列を得る。この方法は、解の精度が境界上での τ と V の算定精度のみに依存するので、Runge-Kutta の法などの数値積分法に比べて一般に精度が良い。ただし時系列計算の際には、境界付近での小さな変動を見逃さないために、計算の時間ステップは十分小さくしておく必要がある。

定常解 (周期解) の検出にはポアンカレ断面 (位相面上の位置を外力の周期 2π 毎にプロットしたもの) を用いた。すなわち十分な長さの時系列を計算した後、最終計算点 $\tau = \tau_n$ に対応する位相面上の点 (X_n, V_n) と、 $\tau = \tau_n - 2m\pi$ ($m=1, 2, 3, \dots$) での点 (X_{n-m}, V_{n-m}) を比較し、両者が一致していれば波周期の m 倍の定常解 (m 次の Subharmonic motion) が得られたものとした。ただし偶然の一致を避けるため、今回の計算ではこのような一致が 4 回以上引き続いて起こるとき定常解が得られたと判断した。また計算では $|X_n - X_{n-m}| < 10^{-2} \times r$, かつ $|V_n - V_{n-m}| < 10^{-2} \times r$ を一致の目安とした。本論文では、この様なプロセスで定常解が検出できないとき、その運動を “Chaotic motion” と呼ぶことにする。

式 (16) に示したように、2 成分波については外力の繰返し周波数は $\gamma/2$ となるので、基本的な周期解の周期は $2\pi \times 2/\gamma$ である。周期を 2π の整数倍にするために、以下の計算では $\gamma=0.2$ としている。すなわち基本的な周期解が得られた場合には $m=10$ となり、Subharmonic motion は $m=20, 30, \dots$ のように現われる。計算に用いた時間ステップ $\Delta\tau$ は $2\pi/100$, 計算長は $(60 \sim 200) \times 2\pi$ とした。また各領域の境界上での収束計算においては、 τ の推定誤差が $\Delta\tau \times 10^{-3}$ 以下にするようにした。

4. 計算結果

(1) 長周期外力による応答特性

ここでは長周期外力 (ω_0 に近い周波数を有する単一

成分の外力で、今の場合変動漂流力に対応する) に対する系の基本的な応答をみるため、式 (15) の運動方程式を用いて $0 < \alpha < 3$ の範囲での応答を計算した。

a) Type-A 本研究で行った数値計算の範囲内では、Type-A については Subharmonic motion および Chaotic motion のいずれも現われず、すべて外力の周期と同一の周期解 (ただし正弦波とは限らない) が得られた。そこで以下では X の最大値と最小値の差 $|x|$ を用いて応答特性を論じる。

図-2 は異なる線型パラメータ r に対する周波数応答曲線を示したものである。 $r=\infty$ はバネ定数 k の、 $r=0$ は係留反力がゼロの線型系にそれぞれ対応している。これより非線型系 ($r=1, 2, 3$) の応答曲線は、2 つの線型系の応答曲線の間位置しており、 r が減少するに従って応答のピークは低周波数側に移行しかつピーク値は大きくなっている。 $r=1, 2$ および 3 に対する曲線がそれぞれ $|X| \leq 2, 4$ および 6 の範囲で $r=\infty$ の曲線と一致しているのは、その範囲内では式 (17) で与えられる $S(x)$ が線型になるためである。また $r=1, 2, 3$ の応答曲線には、 α の変化に伴って応答値が急変するジャンプ現象がみられる。図-3 は $r=1$ のケースについて初期条件の違いによる応答曲線の相違を示したものであるが、ジャンプの発生する位置は初期条件に大きく依存していることがわかる。

b) Type-B Type-B の応答は Type-A に比べると複雑であり、Subharmonic motion や Chaotic motion が発生する。Subharmonic motion は周期解であるので、Type-A の場合と同様に動揺の絶対値 $|X|$ を用いて議論できるが、Chaotic motion については最大値および最小

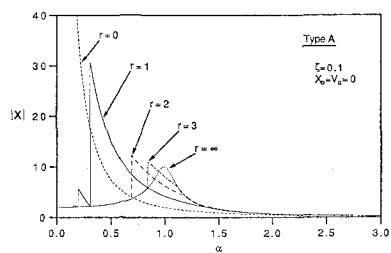


図-2 周波数応答曲線 (Type-A, r の影響)

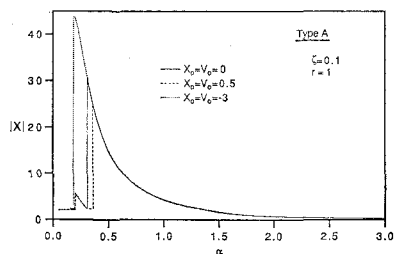
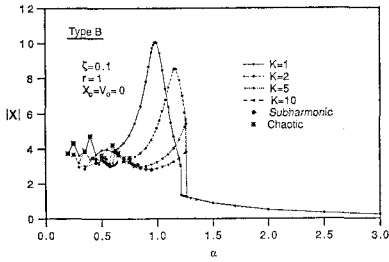
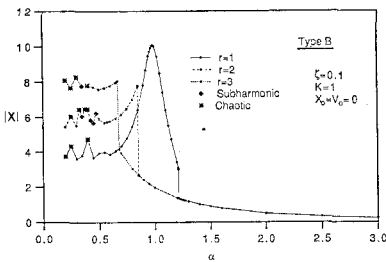


図-3 初期条件の違いによる応答曲線の相違

図-4 周波数応答曲線 (Type-B, K の影響)図-5 周波数応答曲線 (Type-B, r の影響)

値を特定できない。そこで本研究では Chaotic motion を定量的に評価するための1つの指標として、40サイクルの強制外力中の X の最大値と最小値の差を $|X|$ として定義した。

図-4 は異なる4種類のバネ定数比 K に対する周波数応答曲線を示したものである。 $K=1$ (対称係留) の場合は線型系 ($r=0$) の応答に類似しているが、 $\alpha < 0.5$ の領域で Chaotic motion が現われ、やや大きな応答値を示している。 K の増大に伴って応答曲線のピークが低減し、線型系の応答とはかなり異なったものとなっている。また α が大きい領域では、応答曲線は K の大小にかかわらず線型系 ($r=\infty$) の応答曲線に一致する。

図-5 は $K=1$ のケースについて、 r の変化に伴う応答曲線の変化を示したものである。これより対称係留の場合でも r が増大するにつれて $\alpha=1$ 付近での応答曲線のピークは消え、低周波数領域での応答が増幅されていることがわかる。またここでも応答にジャンプがみられる。

(2) 短周期外力による応答特性

ここでは短周期外力 (ω_0 よりも大きな周波数を有する単一成分の外力、今の場合波強制力に対応する) に対する応答、特に Subharmonic motion および Chaotic motion に焦点を絞る。ただし波強制力は(1)で対象とした変動漂流力よりも1オーダー大きいことを考慮して $r=0.1$ とした。また周波数は $2 < \alpha < 6$ の範囲で変化させた。前述したように、Type-A については Subharmonic motion や Chaotic motion は発生しなかった

ため、以下では Type-B についてのみ計算結果を示す。

図-6 は種々のバネ定数比 K に対する周波数応答曲線を示したものである。 $K=1$ の対称係留の場合には $3.1 < \alpha < 3.3$ の範囲で Subharmonic motion が発生し、応答が若干大きくなっている。 K が大きくなって非対称性が増すにつれ Subharmonic motion および Chaotic motion の発生割合が増大し、それに伴って応答値も大きくなっている。図-7 は Subharmonic motion の時

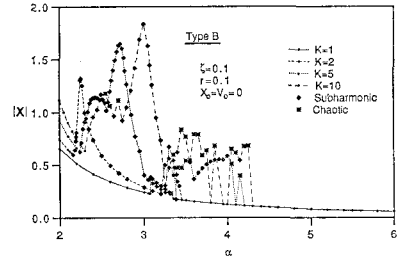
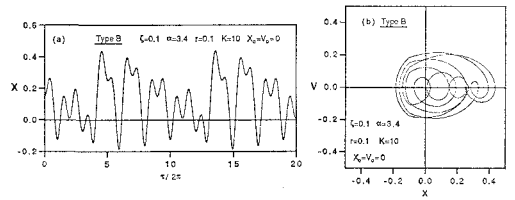
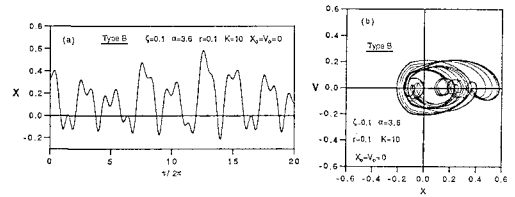
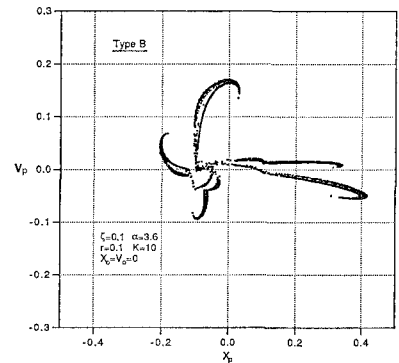


図-6 周波数応答曲線 (Type-B, 高周波数領域)

図-7 運動の時系列および phase portrait ($\alpha=3.4$)図-8 運動の時系列および phase portrait ($\alpha=3.6$)図-9 ポアンカレ断面 ($\alpha=3.6$)

系列および位相面上の軌跡 (phase portrait) の一例であり、外力周期の9倍の周期での動揺が現われている。

図-8は図-7のケースとは α がわずかに異なるケースの応答であるが、このケースでは周期解は得られず、phase portraitが位相面上で閉じない Chaotic motionが現われている。図-9は図-8に対するポアンカレ断面を描いたものであり、約4000点がプロットされているが、いわゆる Strange attractor と呼ばれるフラクタル形状が見られる。

(3) 2成分波による応答特性

式(16)に示したように、2成分波では短周期の外力(波強制力)とそれより1オーダー小さな長周期の外力(変動漂流力)が混在する。本研究では $\lambda=0.1$, $\gamma=0.2$, $r=0.1$ とし、無次元周波数 α を $2<\alpha<6$ の範囲で変化させて計算を行った。従って長周期外力からみた線型パラメータの値は $r/\lambda=1$ となり、無次元周波数の範囲は $0.4<\gamma\alpha<1.2$ となる。

図-10はType-Bの異なるケースに対する運動の時系列を外力の時系列と対応させて示したものである。図

(b)および(c)のいずれのケースについても、波周期の10倍周期での動揺が現われているが、時系列はかなり異なっている。図-11はType-Aに対する周波数応答曲線を、 $\lambda=0$ (長周期外力が存在しない場合)と対比して示したものであるが、 α の小さい領域で長周期外力の影響を受けて応答が大きくなっている。これは図-2の $r=1$ の応答曲線が $0.4<\alpha<1.2$ の範囲では左上りになっていることに対応している。図-12は $K=1$ の場合のType-Bに対する同様の周波数応答曲線を示したものであるが、今度は長周期外力の影響が α の大きい領域で現われ、 $\alpha=5$ で応答がピークを示している。これは図-4の $K=1$ に対する応答曲線が $\alpha=1$ でピークを示しているのに対応している。図-13は $K=10$ の場合のType-Bの周波数応答曲線である。図-4に示されているように $K=10$ のケースについては長周期外力に対する応答が小さいことより、 $\lambda=0$ の場合と $\lambda=0.1$ の場合とで全体的な応答値の大きさにはあまり差はないが、応答曲線の形は異なっている。

以上のように、2成分波については、基本的には長周期および短周期の外力に対する応答の特性を重ね合わせ

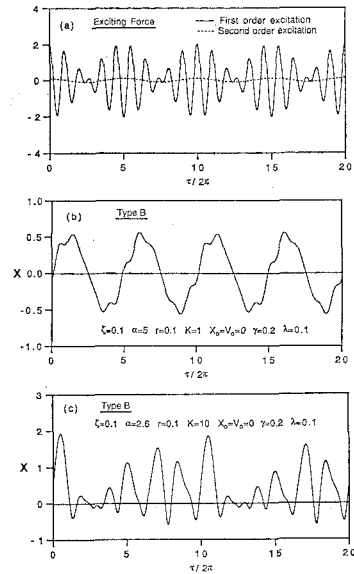


図-10 2成分波による波力と運動の時系列

たような応答傾向を示すが、例えば図-13のように応答に Subharmonic motion や Chaotic motion が頻繁に発生するような場合には、応答はかなり複雑になる。

謝辞：本研究は著者の一人青木が(財)鹿島学術振興財団の援助によりブリティッシュコロンビア大学に滞在中に行われたものである。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 榎木 亨・久保雅義 (1977): 荷役限界からみた港内穏度に関する研究 (第2報), 第25回海岸工学講演会論文集, pp. 593-597.
- Bishop, S. R. and L. N. Virgin (1987): The Onset of Chaotic Motions of a Moored Semi-Submersible, Proc. of 6th OMAE, Vol. 2, pp. 319-323.
- Lean, G. H. (1971): Subharmonic motion of moored ships subjected to wave action, Trans. Roy. Int. Naval Arch., Vol. 113, pp. 387-399.
- Pinkster, J. A. (1975): Low Frequency Phenomena Associated with Vessels Moored at Sea, Soc. of Petroleum Eng., SPE Paper No. 4837, pp. 487-494.
- Thompson, J. M. T., A. R. Bokaian and R. Ghaffari (1984): Subharmonic and Chaotic Motions of Compliant Offshore Structures and Articulated Mooring Towers. Proc. of the 3rd OMAE, Vol. 2, pp. 25-35.

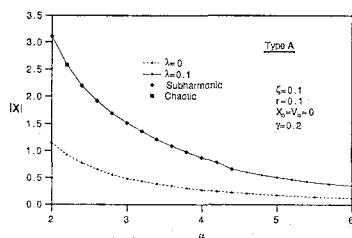


図-11 周波数応答 (Type-A)

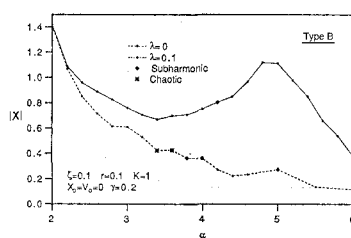


図-12 周波数応答 (Type-B, K=1)

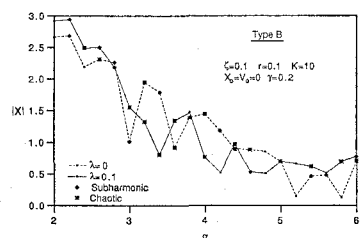


図-13 周波数応答 Type-B, K=10